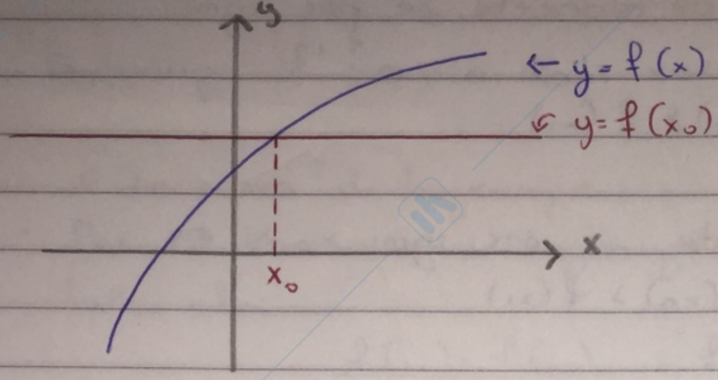
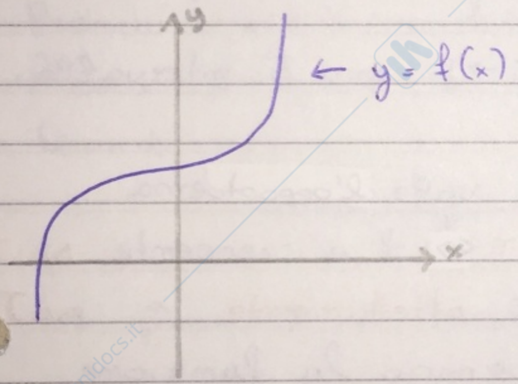
INTERPRETAZIONE GRAFICA



1. Un punto che si muove lungo il grafico spostandosi da sinistra verso destra sale (l'ordinata cresce)

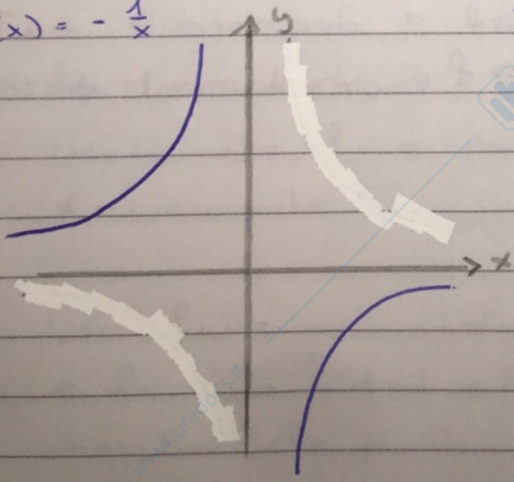
2. Presa $x_0 \in X$, la parte del grafico a destra di x_0 sta sopra la retta $y = f(x_0)$,
la parte a sinistra di x_0 sta sotto.



f è crescente ma non strettamente crescente

ESEMPIO IMPORTANTE

1. $f(x) = -\frac{1}{x}$



f è crescente su $(-\infty, 0)$ e su $(0, +\infty)$ ma non su tutto $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
Per verificare che f non è crescente sul dominio basta osservare che $-1 < 1$ ma $f(-1) = 1 > f(1) = -1$

DEFINIZIONE FUNZIONE DECRESCENTE

- Una funzione $f: X \to \mathbb{R}$ $\overset{X \subset \mathbb{R}}{\forall}$ è decrescente se per ogni $x_0, x_1 \in X$

$$x_0 < x_1 \Rightarrow f(x_0) \geq f(x_1)$$

- f è strettamente decrescente se per ogni $x_0, x_1 \in X$

$$x_0 < x_1 \Rightarrow f(x_0) > f(x_1)$$

esempi

1. $f(x) = -x$ è strettamente decrescente
   x^2 è " crescente su $[0, +\infty)$
   è " decrescente su $(-\infty, 0]$

TEOREMA 1

Sia f una funzione definita da $I \to \mathbb{R}$ con I intervallo, f derivabile.

Allora:

vale il viceversa

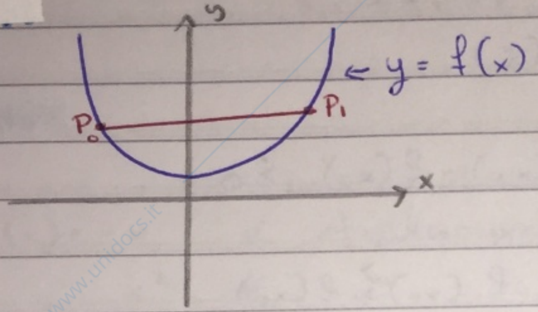
1) $f' \geq 0$ (derivata positiva) su I $\Leftrightarrow$ f è crescente su I
2) $f' > 0$ (" ") $\Rightarrow$ f è strettamente " su I

Osservaz. (in (2) non vale $\Leftarrow$: per esempio la funzione $f(x) = x^3$ è strettamente crescente ma la derivata $f'(x) = 3x^2$ si annulla in 0)

3) $f' \leq 0$ (derivata negativa) su I $\Leftrightarrow$ f è decrescente su I
4) $f' < 0$ (" ") " $\Rightarrow$ f è strettamente decresc. su I

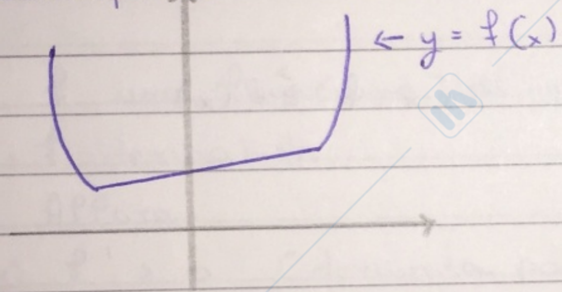
FUNZIONI CONVESSE E CONCAVE

- Data una funzione da un intervallo (semirette/rette) in $\mathbb{R}$
  $f: I \to \mathbb{R}$ con I intervallo, dico che
  f è convessa se per ogni P_0, P_1 punti del grafico
  di f, il segmento che li congiunge sta sopra il grafico

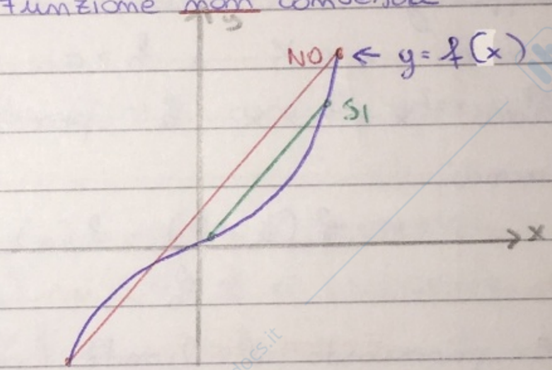


esempi

① convessa piatta

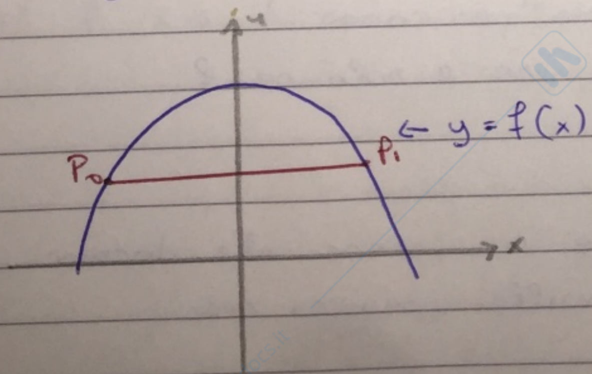


② funzione non convessa



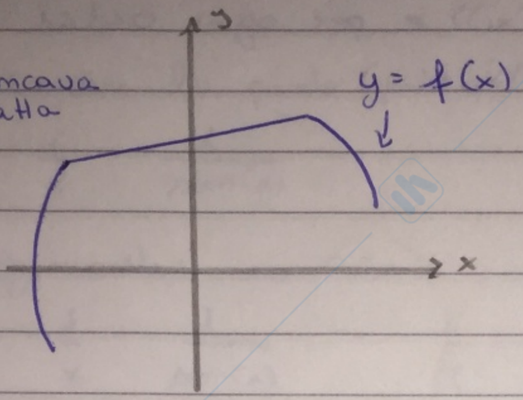
DEFINIZIONE FUNZIONE CONCAVA

- Una funzione $f: I \to \mathbb{R}$ con I intervallo si dice concava
  se per ogni P_0 e P_1 sul grafico di f il
  segmento che li congiunge sta sotto il grafico

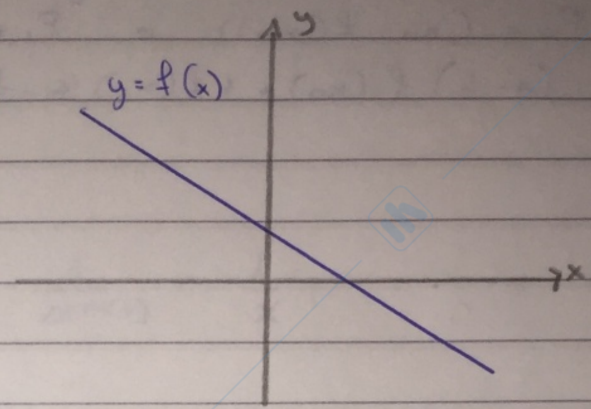


esempi

1. Concava piatta

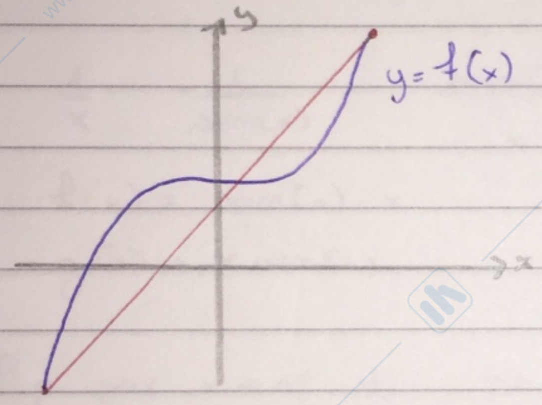


2.



sia concava che convessa

3.

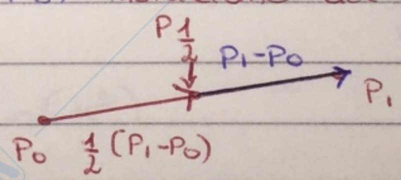


non è né concava
né convessa

- È concava su $(-\infty, 0]$
- È convessa su $[0, +\infty]$

OSSERVAZIONE

- Dati $P_0 = (x_0, y_0)$ e $P_1 = (x_1, y_1)$ il segmento che li congiunge è formato dai punti
$P_t = P_0 + t(P_1 - P_0)$ notazione del corso di algebra lineare
con $0 \leq t \leq 1$



Inoltre $P_t = (x_0 + t(x_1 - x_0); y_0 + t(y_1 - y_0)) =$
$= ((1-t)x_0 + tx_1; (1-t)y_0 + ty_1$

Ma allora f è convessa se per ogni
$P_0 = (x_0, f(x_0))$ e $P_1 = (x_1, f(x_1))$ e per ogni $0 \leq t \leq 1$
$(1-t)f(x_0) + tf(x_1) \geq f((1-t)x_0 + tx_1)$

Lezione 27

04-11-2020

NUOVO ARGOMENTO

FUNZIONI CRESCENTI E DECRESCENTI

Considero una funzione $f: X \to \mathbb{R}$ con $X \subset \mathbb{R}$

- Dico che f è crescente (su X) se quando aumento il valore di x aumenta quello di f(x) (ovvero la y) cioè ogni volta che prendo ogni $x_0, x_1 \in X$

$$x_0 < x_1 \Rightarrow f(x_0) \leq f(x_1)$$

- Dico che f è strettamente crescente se per ogni $x_0, x_1 \in X$ con $x_0 < x_1$, allora x_0 è strettamente più piccolo di x_1

$$x_0 < x_1 \Rightarrow f(x_0) < f(x_1)$$

Esempi

1. e^x è strettamente crescente ($x_0 < x \Rightarrow e^{x_0} < e^{x_1}$)
   e lo stesso vale per altre funzioni.
   es. x^3, $\log x$

- La funzione x^2 non è crescente (se $x_0 = -1$ e $x_1 = 0$ allora $x_0 < x_1$ ma $f(x_0) = 1 > f(x_1) = 0$
- Tuttavia x^2 è strettamente crescente su $[0, +\infty]$ ($0 < x_0 < x_1 \Rightarrow x_0^2 < x_1^2$) fatto noto

INTERPRETAZIONE GRAFICA →

DIMOSTRAZIONE DI 1 e DIMOSTRAZIONE DI 2

Suppongo $f' \overset{>}{\geq} 0$ e dati $x_0 < x_1$ dimostro che $f(x_0) \overset{<}{\leq} f(x_1)$

Uso il teorema di Lagrange

- Per il teorema di Lagrange esiste $\tilde{x}$ con $x_0 < \tilde{x} < x_1$ tale che:

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(\tilde{x})$$

per ipotesi $f'(\tilde{x}) \overset{>}{\geq} 0 \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \overset{>}{\geq} 0$

$\Rightarrow f(x_1) - f(x_0) \overset{>}{\geq} 0$ cioè $f(x_1) \overset{>}{\geq} f(x_0)$

Dimostro il viceversa

- Suppongo f (strettamente) crescente e dimostrare che $f' \overset{>}{\geq} 0$

Prendo $x \in X$ e $h > 0$.

Allora $x + h > x$ e per ipotesi $f(x+h) \overset{>}{\geq} f(x)$

Quindi

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \overset{>}{\geq} 0$$

e passando al limite per $h \to 0$

$f'(x) \geq 0$ può essere sia strett. cresc. che crescente (non posso dimostrarlo)

Le dimostrazioni 3, 4 sono per caso

Usate che f è decrescente se e solo se $-f$ è crescente

Una funzione costante è sia cresc. che decresc. e la sua derivata è nulla, ovvero sia negativa che positiva