

DOMANDE ANALISI I

- ① Scrivere la definizione di successione convergente e di limite per una successione.
- ② Scrivere la definizione di successione convergente, divergente ed irregolare.
- ③ Scrivere la definizione di successione limitata. Dimostrare che se una successione è convergente allora essa è anche limitata. Dire se è vero il contrario.
- ④ Enunciare e dimostrare il teorema dell'unicità di limite per successioni.
- ⑤ Scrivere la definizione di successioni monotone. Enunciare e dimostrare il teorema sul limite delle successioni monotone.
- ⑥ Enunciare il teorema del confronto per successioni.
- ⑦ Enunciare il teorema sull'algebra dei limiti per successioni in $\mathbb{R} \cup \{\pm \infty\}$ (algebra degli infiniti). Fare esempi di forme indeterminate.
- ⑧ Enunciare il criterio del rapporto per successioni positive.
- ⑨ Enunciare il principio di induzione.
- ⑩ Scrivere la definizione di maggioranti, minoranti, massimo, minimo, estremo superiore ed estremo inferiore per un sottoinsieme di numeri reali.
- ⑪ Scrivere la definizione di estremo superiore, estremo inferiore per un sottoinsieme di numeri reali.
- ⑫ Scrivere la definizione di immagine e controimmagine di una funzione.
- ⑬ Scrivere la definizione di funzione iniettiva, suriettiva e biiettiva. Scrivere la definizione di funzione inversa. Dato il grafico di una funzione invertibile, dire come si disegna il grafico della sua inversa.
- ⑭ Scrivere la definizione di funzione limitata, monotona, simmetrica e periodica. Disegnare il grafico per ogni tipo di funzione.
- ⑮ Enunciare il prodotto di composizione di funzioni.
- ⑯ Dimostrare che la stretta monotonia implica l'invertibilità di una funzione.
- ⑰ Enunciare il teorema sull'algebra dei limiti per successioni e dimostrarlo nel caso del limite della somma e del prodotto.
- ⑱ Enunciare e dimostrare il Teorema della permanenza del segno per successioni.
- ⑲ Scrivere la definizione di funzione continua su un intervallo ed enunciare il Teorema di Weierstrass. Far vedere, attraverso controesempi, che le tre ipotesi sono tutte essenziali.
- ⑳ Enunciare e dimostrare il Teorema dei Valori intermedi.
- ㉑ Scrivere la definizione di asintoti orizzontali, verticali e obliqui.
- ㉒ Enunciare il teorema sulla continuità della funzione inversa.
- ㉓ Scrivere la definizione di funzione derivabile in un punto. Spiegare il significato geometrico della derivata.
- ㉔ Scrivere la definizione di funzione continua e derivabile in un punto. Enunciare e dimostrare la relazione fra continuità e derivabilità.
- ㉕ Scrivere la definizione di derivata destra e sinistra.

- (26) Enunciare il teorema sull'algebra delle derivate e dimostrare la regola di Leibniz.
- (27) Enunciare e dimostrare il teorema di derivazione della funzione composta.
- (28) Scrivere la definizione di punto di massimo e minimo relativo e la definizione di punto critico.
Enunciare e dimostrare il teorema di Fermat.
- (29) Enunciare e dimostrare il Teorema di Lagrange o del valor medio.
- (30) Caratterizzare le funzioni costanti su un intervallo I .
- (31) Enunciare e dimostrare il test di monotonia.
- (32) Definire una funzione concava o convessa in un punto. Definire un punto di flesso. Enunciare il test di convettività.
- (33) Enunciare il Teorema di De l'Hôpital.
- (34) Enunciare la formula di Taylor di ordine n con resto nella forma di Peano o di Lagrange.
- (35) Scrivere la definizione di primitiva. Dimostrare che due primitive definite su un intervallo differiscono al più per una costante.
- (36) Enunciare e dimostrare la regola di integrazione per parti.
- (37) Enunciare e dimostrare la regola di integrazione per sostituzione.
- (38) Enunciare e dimostrare il teorema della media integrale.
- (39) Scrivere la definizione di funzione integrale. Sia f integrabile su (a, b) , dimostrare che $F(x) = \int_a^x f(u) du$ è continua in (a, b) .
- (40) Scrivere la definizione di funzione integrale. Enunciare e dimostrare il teorema fondamentale del calcolo integrale.
- (41) Enunciare e dimostrare il corollario del Teorema fondamentale del calcolo integrale.
- (42) Scrivere la definizione di serie convergente, divergente, irregolare.
- (43) Definire le serie telescopiche e discuterne le proprietà di convergenza.
- (44) Scrivere la definizione di serie geometrica. Enunciare e dimostrare quando converge/diverge/è irregolare.
- (45) Enunciare e dimostrare la proprietà fondamentale della serie a termini non negativi.
- (46) Scrivere la definizione di serie armonica e di serie armonica generalizzata.
- (47) Enunciare la condizione necessaria per la convergenza delle serie. Tale condizione è sufficiente?
- (48) Enunciare e dimostrare il criterio della radice.
- (49) Enunciare e dimostrare il criterio del confronto o del confronto asintotico per le serie a termini positivi.
- (50) Serie a termini di segno variabile: definizione di convergenza assoluta.
- (51) Definire la serie a termini a segno alterno. Enunciare il criterio di Leibniz.

SUCCESSIONI

1 SUCCESSIONE CONVERGENTE E LIMITE PER UNA SUCCESSIONE

- Una successione $\{a_n\}$ si dice convergente se esiste un numero $l \in \mathbb{R}$ con la proprietà che qualunque sia $\varepsilon > 0$ ^{esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ e $\forall n > n_0$} risulta definitivamente: $|a_n - l| < \varepsilon$ o $l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$
- l è il limite della successione $\{a_n\}$ e quindi:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \quad \text{o} \quad a_n \rightarrow l \quad \text{per } n \rightarrow +\infty$$

2 SUCCESSIONE CONVERGENTE, DIVERGENTE, IRREGOLARE

- Una successione $\{a_n\}$ si dice che diverge a $+\infty$ se per ogni $M > 0$ si ha $a_n > M$ definitivamente e quindi: $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$
- Una successione $\{a_n\}$ si dice che diverge a $-\infty$ se per ogni $M > 0$ si ha $a_n < -M$ definitivamente e quindi: $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$
- Una successione $\{a_n\}$ si dice irregolare se essa non è né convergente né divergente e il limite non esiste, quindi $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \text{non esiste}$

3 SUCCESSIONE LIMITATA, SUCCESSIONE CONVERGENTE-LIMITATA

- Una successione $\{a_n\}$ si dice limitata se esistono due numeri m, M tale che per ogni n, m risulta che $m \leq a_n \leq M$ $\forall n$.
- Ogni successione convergente è limitata.
- $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergente: cioè $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$ quando $n \rightarrow +\infty$ e quindi:
 $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n > n_0$ si ha $|a_n - l| < \varepsilon$

- Per la disuguaglianza triangolare inversa:

disuguaglianza triangolare:

$$\begin{aligned} |x + y| &\leq |x| + |y| \\ |x - y| &\geq |x| - |y| \end{aligned}$$

$$|a_n| - |l| \leq |a_n - l| < \varepsilon$$

$$|a_n| \leq \underbrace{\varepsilon + |l|}_C \quad \text{per l'arbitrarietà di } \varepsilon$$

$$|a_n| \leq C \quad \text{quindi } a_n \text{ è una successione limitata}$$

- Non è vero che una successione limitata è convergente:

Esempio: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n$ è una successione limitata ma non converge mai ad un numero, infatti prende sempre due valori: $(-1)^n$

4 TEOREMA UNICITÀ LIMITE SUCCESSIONI

• Se esiste $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell$ esso è unico, cioè non possono esistere due limiti distinti.

Dimostrazione per assurdo

• Supponiamo che $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ tende a due limiti distinti quando $n \rightarrow +\infty$, cioè:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = m \quad \text{con } \ell < m$$

• Per definizione, per avere sap, per ogni $\varepsilon > 0$ devono esistere due intervalli I_1 e I_2 di $\mathbb{C}$ tali che si abbia:

$$\ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon \quad \forall x \in I_1 \setminus \mathbb{C}$$

$$m - \varepsilon < a_n < m + \varepsilon \quad \forall x \in I_2 \setminus \mathbb{C}$$

• Le due uguaglianze devono valere contemporaneamente e possiamo scegliere $\varepsilon = \frac{m - \ell}{2}$.

• Esse diventano quindi:

$$\frac{3\ell - m}{2} < a_n < \frac{\ell + m}{2} \quad \forall x \in I_1 \setminus \mathbb{C}$$

$$\frac{\ell + m}{2} < a_n < \frac{3m - \ell}{2} \quad \forall x \in I_2 \setminus \mathbb{C}$$

• Consideriamo tutti gli $x \in I_1 \cap I_2 \setminus \mathbb{C}$, le due disuguaglianze devono valere contemporaneamente:

$$\frac{\ell + m}{2} < a_n < \frac{\ell + m}{2} \quad \text{assurdo!}$$

5 SUCCESSIONI MONOTONE, TEOREMA LIMITE SUCCESSIONI MONOTONE

• Una successione ~~monotona~~ si dice monotona se vale una delle seguenti ipotesi $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$:

- $\{a_n\}$ è crescente se $a_n \leq a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$

- $\{a_n\}$ è decrescente se $a_n \geq a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$

- $\{a_n\}$ è costante se $a_n = a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$

• $\{a_n\}$ è una successione monotona crescente e superiormente limitata $\rightarrow \{a_n\}$ è convergente e $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$

• $\{a_n\}$ è una successione monotona decrescente e inferiormente limitata $\rightarrow \{a_n\}$ è convergente e $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$

Dimostrazione: $\{a_n\}$ è decrescente

$\ell \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \rightarrow$ definizione di inf (estremo inferiore) $\ell =$ estremo inferiore

• Fissato $\varepsilon > 0$ esiste n_ε tale che: $\ell \leq a_{n_\varepsilon} \leq \ell + \varepsilon$

• Sappiamo che la successione è decrescente, quindi:

$$\ell \leq a_n \leq a_{n_\varepsilon} < \ell + \varepsilon \quad \forall n \geq n_\varepsilon$$

Dalla definizione di limite si ha che: $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell = \inf_{n \in \mathbb{N}} a_n$

Supponiamo che $\inf_{n \in \mathbb{N}} a_n = -\infty$, cioè $\forall M > 0 \exists n_M \in \mathbb{N} \quad a_{n_M} < -M$

per la decrescenza della successione: $a_n \leq a_{n_M} < -M \quad \forall n \geq n_M$

e quindi: $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty = \inf_{n \in \mathbb{N}} a_n$

6 TEOREMA CONFRONTO SUCCESSIONI

siano $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, tre successioni reali tali che $a_n \leq b_n \leq c_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Supponiamo che $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$ allora possiamo dire che $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \ell$

7 ALGEBRA DEGLI INFINITI, FORME INDETERMINATE

siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni con $n \in \mathbb{N}$

$$Q_n \rightarrow x$$
$$b_n \rightarrow y$$

sì può dire

x	y
a	$+\infty$
a	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$

x	y
a	$\bullet \infty = \infty$
a	$: 0 = \infty$
a	$: \infty = 0$

 $Q \neq 0$

Forme indeterminate

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \infty \\ \infty \end{bmatrix}; [0, \infty]; [1^\infty]; [\infty - \infty]; [0^0]; [\infty^0]$$

8 CRITERIO DEL RAPPORTO PER SUCCESSIONI POSITIVE

Sia $\{a_n\}$ una successione positiva (cioè $a_n \geq 0 \quad \forall n$). Se esiste:

$\epsilon < 1$, allora $a_n \rightarrow 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$$

$\ell > 1$ (anche $\ell = +\infty$) allora $a_n \rightarrow +\infty$

- PROPRIETÀ CARATTERISTICA ESTREMO SUPERIORE E INFERIORE

→ Se l'estremo superiore (inferiore) appartiene al sottoinsieme, allora esso è il massimo (minimo) del sottoinsieme

TEOREMA DI COMPLETEZZA

→ Se il sottosistema è limitato superiormente (inferiormente) e ammette estremo superiore (inferiore) allora tale estremo è unico.

9 PRINCIPIO DI INDUZIONE

Il principio di induzione può essere applicato per teoremi con la struttura: "per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, vale la proprietà $P(n)$ ". n_0 è il più piccolo intero per cui si vuole che la proprietà sia vera: se $n_0 = 0$ il teorema è valido per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Per dimostrare per induzione:

- $P(n)$ è vera per $n = n_0$
- se P è vera per $n = n_0$, si dimostra che è vera anche per $P(n+1)$
- allora $P(n)$ è vera per tutti gli $n \in \mathbb{N}$.

10 MAGGIORANTI, MINORANTI, MASSIMO E MINIMO, ESTREMO SUPERIORE E INFERIORE

$X \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme dei numeri reali

- $y \in \mathbb{R}$ si dice maggiorante di X se $\forall x \in X$ risulta $y \geq x$.
- $y \in \mathbb{R}$ si dice minorante di X se $\forall x \in X$ risulta $y \leq x$.
- A è un massimo di X , se $A \in X$ e $A \geq x \forall x \in X$.
- B è un minimo di X , se $B \in X$ e $B \leq x \forall x \in X$.
- $\inf X$ (estremo inferiore di X) è il massimo dei minoranti di X .
- $\sup X$ (estremo superiore di X) è il minimo dei maggioranti di X .

11 ESTREMO SUPERIORE E INFERIORE, PROPRIETÀ CARATTERISTICA

$Y \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme dei numeri reali

- $\inf Y$ (estremo inferiore di Y) è il massimo dei minoranti di Y .
- $\sup Y$ (estremo superiore di Y) è il minimo dei maggioranti di Y .

12 IMMAGINE E CONTROIMMAGINE DI UNA FUNZIONE

L'immagine di una funzione è l'insieme dei valori assunti dalla funzione sul proprio dominio, ed è quindi contenuta nel codominio.

• $f: A \rightarrow B$ $f(a) = b$ b è l'immagine di a attraverso f

La controimmagine di una funzione f dell'insieme C , è l'insieme degli elementi a del dominio A la cui immagine appartiene a C .

$f: A \rightarrow B$ $\text{dom } f = A$ $C \subseteq B$
 $\text{codom } f = B$

• $f^{-1}(C) = \{a \in A \text{ t.c. } f(a) \in C\}$

13 FUNZIONE INIETTIVA, SURIETTIVA, BIETTIVA,

DEFINIZIONE DI FUNZIONE INVERSA

DISEGNARE GRAFICO DELLA SUA INVERSA, TRAMITE UNA FUNZIONE INVERTIBILE

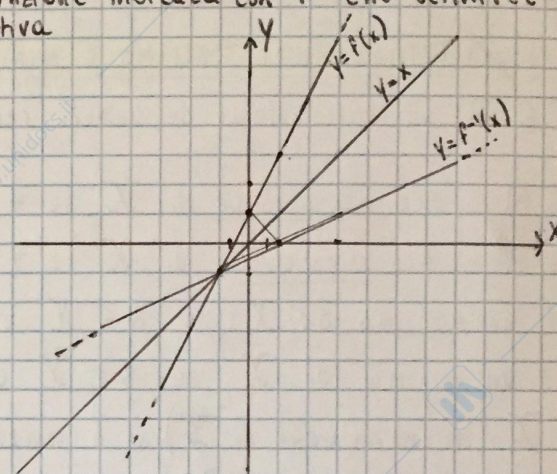
- Funzione suriettiva: se l'immagine di f coincide con il codominio
- Funzione iniettiva: elementi distinti del dominio hanno immagini distinte
- $f: A \rightarrow B$ è iniettiva se $a \neq a', a, a' \in A$ si ha che $f(a) \neq f(a')$
- Funzione biiettiva: funzione sia suriettiva che iniettiva
- La funzione inversa di una data funzione f è quella funzione indicata con f^{-1} che definisce l'associazione inversa di f . $f: A \rightarrow B$ deve essere bigettiva

$$y = f(x) = 2x + 1$$

$$x = \frac{y-1}{2}$$

$$f^{-1}(x) =$$

- Il grafico della funzione inversa è il simmetrico del grafico di partenza rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante.



14 FUNZIONE LIMITATA, MONOTONA, SIMMETRICA E PERIODICA

DISEGNARE GRAFICO PER OGNI FUNZIONE

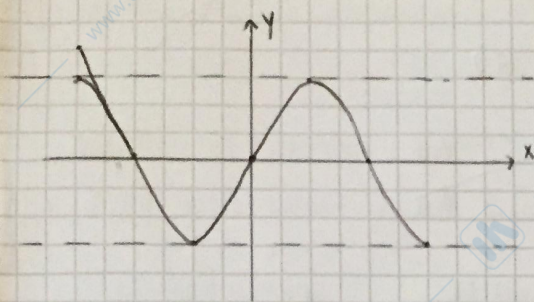
- Una funzione si dice limitata se è limitata sia superiormente che inferiormente
- $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}$ si dice limitata se l'insieme delle immagini di f , $f(A) \subseteq B$ è limitato inferiormente e superiormente (cioè si ha $\sup$ e $\inf$ finiti)
- ~~Def.~~ Una funzione periodica è una funzione che ripete il comportamento che presenta su un certo intervallo periodicamente su tutto il proprio dominio.
- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice periodica se esiste un numero reale T (periodo) tale che per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha:

$$f(x+T) = f(x)$$
 f è periodica di T , $T > 0$ se è il più piccolo numero reale positivo
- Una funzione è simmetrica se il suo grafico è simmetrico rispetto a una particolare simmetria. Es. funzione pari $\rightarrow$ valori simmetrici delle ordinate.
- La monotonia di una funzione è una proprietà che esprime la crescita o la decrescita di una funzione.
 - Una funzione si dice crescente se $\forall x_1, x_2 \in \text{dom } f$ si ha che: $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$?
 - Una funzione si dice decrescente se $\forall x_1, x_2 \in \text{dom } f$ si ha che: $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$?

funzione limitata

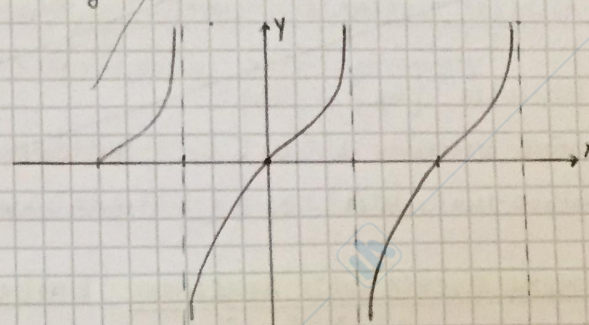
$$f(x) = \sin x$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$



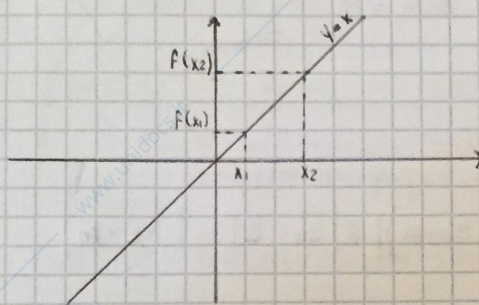
funzione periodica periodo = 2π

$$f(x) = \tan x$$



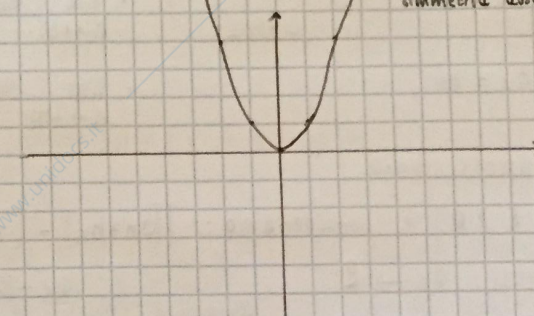
$$f(x) = x$$

funzione monotona monotona crescente



$$f(x) = x^2$$

funzione simmetrica simmetria asse $x=0$



15 PRODOTTO DI COMPOSIZIONE DI FUNZIONI

Il prodotto di composizione di funzioni o funzione composta si definisce applicando la seconda funzione alle immagini della prima.

$$f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$$

$$a \in A \quad f(a) \in B, g[f(a)] \in C$$

$$g(f(a)) = g \circ f$$

16 STRETTA MONOTONIA IMPLICA INVERTIBILITÀ

Una funzione $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ strettamente monotona in D è invertibile in D .

Supponiamo che f sia strettamente crescente in D , quindi $x_1, x_2 \in D$ e dimostriamo che:

$$x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Se $x_1 \neq x_2$, allora $x_1 > x_2$ o $x_1 < x_2$. Per la monotonia stretta di f si ha che nel primo caso $f(x_1) > f(x_2)$, mentre nel secondo $f(x_1) < f(x_2)$; quindi in entrambi i casi $f(x_1) \neq f(x_2)$ perciò f è invertibile.

17 TEOREMA ALGEBRA LIMITI SUCCESSIONI, DIMOSTRAZIONE SOMMA E PRODOTTO

Due successioni $\{a_n\}, \{b_n\}$ tali che:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell$$

allora:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n + b_n = \ell + m \quad \ell, m \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = m$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \cdot b_n = \ell \cdot m$$

• Dimostrazione somma

→ per la disuguaglianza triangolare

$$\text{Fissato } \varepsilon > 0 \text{ e consideriamo: } |(a_n + b_n) - (\ell + m)| = |(a_n - \ell) + (b_n - m)| \leq |a_n - \ell| + |b_n - m|$$

$$\text{Per ipotesi: } a_n \rightarrow \ell$$

$$|a_n - \ell| < \varepsilon$$

$$b_n \rightarrow m$$

quindi

$$|b_n - m| < \varepsilon$$

Concludiamo che: $|(a_n + b_n) - (\ell + m)| < 2\varepsilon$ definitivamente, quindi $a_n + b_n \rightarrow \ell + m$

• Dimostrazione prodotto

$$\text{Fissato } \varepsilon > 0 \text{ per la disuguaglianza triangolare: } |a_n \cdot b_n - (\ell \cdot m)| = |a_n(b_n - m) + m(a_n - \ell)| \leq$$

$$|a_n(b_n - m)| + |m(a_n - \ell)| = |a_n| |b_n - m| + |m| |a_n - \ell|$$

$$\text{Poich  } a_n \rightarrow \ell, |a_n - \ell| < \varepsilon \text{ e inoltre } |a_n| < |\ell| + \varepsilon$$

$$b_n \rightarrow m, |a_n - m| < \varepsilon \text{ e inoltre } |b_n| < |m| + \varepsilon$$

$$\text{quindi: } |a_n \cdot b_n - \ell \cdot m| < (|\ell| + \varepsilon) \cdot \varepsilon + |m| \cdot \varepsilon < \varepsilon \cdot \text{cost}$$

Per l'arbitrariet  di ε segue la tesi.

18 TEOREMA PERMANENZA SEGNO SUCCESSIONI

$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione e supponiamo: $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell \geq 0$

allora $a_n \geq 0$

vale il contrario

$$\ell \leq 0 \rightarrow a_n \leq 0$$

Dimostrazione

Da definizione: $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell$, scelto $\varepsilon > 0$ risulta $|a_n - \ell| < \varepsilon$

$$\ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon$$

Posto $\varepsilon = |\ell|$ si ha:

$$\ell - |\ell| < a_n < \ell + |\ell|$$

$$\text{se } \ell > 0 \Rightarrow 0 < a_n < 2\ell \rightarrow a_n > 0$$

$$\text{se } \ell < 0 \Rightarrow 2\ell < a_n < 0 \rightarrow a_n < 0$$

19 FUNZIONE CONTINUA SU UN INTERVALLO, TEOREMA DI WEIERSTRASS, CONTROESEMPI

- Una funzione si dice continua su un intervallo se è continua in ogni punto dell'intervallo.
- Sia $I: [a, b]$, $f(x)$ è continua in I se la funzione è continua per ogni punto appartenente all'intervallo.
- teorema di Weierstrass: Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f assume massimo e minimo in $[a, b]$, ossia esistono $x_m, x_M \in [a, b]$ tali che $f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) \forall x \in [a, b]$
- $f(x) \rightarrow$ continua
 - $\rightarrow$ intervallo chiuso
 - $\rightarrow$ intervallo limitato
- controesempi:
 - $1/x$ nell'intervallo $[0; 2]$
 - $y = x$ in $[0; 1)$
 - $y = x$ in $(-\infty; +\infty)$

20 TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI

- Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua, con I intervallo; allora $Im(f)$ è un intervallo
- Dimostrazione:
Siano α e β rispettivamente l'estremo inferiore e superiore di I , e sia $y \in (a, \beta)$. Esistono allora a, b tali per cui $y \in (f(a), f(b))$. Supponendo $a < b$ si consideri la funzione $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ data da $g(x) = f(x) - y$; allora $g(x)$ è continua e si ha $g(a) \cdot g(b) < 0$. Per il teorema degli zeri esiste $x \in (a, b)$ tale per cui $g(x) = 0$, ovvero $f(x) = y$. Dunque $y \in (a, b)$ e quindi $y \in I$ che conclude la dimostrazione

21 ASINTOTI VERTICALI, ORIZZONTALI, OBLIQUI

- Si dice che f ha un asintoto orizzontale di equazione $y = \ell$ ($\ell \in \mathbb{R}$) per $x \rightarrow +\infty$ oppure per $x \rightarrow -\infty$ se $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ oppure $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$
- Si dice che f ha un asintoto verticale di equazione $x = c$ ($c \in \mathbb{R}$) per $x \rightarrow c$ (oppure $x \rightarrow c^+$, $x \rightarrow c^-$) se $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = +\infty$ o $-\infty$ (oppure per $x \rightarrow c^+$ o $x \rightarrow c^-$)
- Se ~~esiste~~ una funzione presenta limite infinito all'infinito può esserci un asintoto obliquo.
Si dice che $f(x)$ ha un asintoto obliquo $y = mx + q$ ($m \neq 0$, $q \in \mathbb{R}$) per $x \rightarrow +\infty$ o per $x \rightarrow -\infty$ se $\lim_{x \rightarrow +\infty(-\infty)} [f(x) - (mx + q)] = 0$

22 TEOREMA CONTINUITÀ FUNZIONE INVERSA

- Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, con I intervallo, una funzione continua in I . Allora f è invertibile in I se e solo se è strettamente monotona. In tale caso la sua inversa è ancora strettamente monotona e continua

23 FUNZIONE DERIVABILE IN UN PUNTO, SIGNIFICATO GEOMETRICO

- Sia $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$; f si dice derivabile in $x_0 \in (a, b)$ se esiste finito:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

- Il significato geometrico della derivata in un punto mette in relazione il grafico della ~~retta~~ funzione e la retta tangente ad esso nel punto considerato: la derivata ha il significato geometrico di coefficiente angolare, o pendenza della retta tangente.

24 DEFINIZIONE FUNZIONE CONTINUA E DERIVABILE IN UN PUNTO, RELAZIONE TRA CONTINUITÀ E DERIVABILITÀ

- Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ (I intervallo) e $c \in I$, si dice che f è continua in c se esiste:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$$

- Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ (I intervallo) e $x_0 \in I$, f si dice derivabile in x_0 se esiste finito:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

- Se f è derivabile in x_0 un punto x_0 , allora f è continua in x_0 .

Dimostrazione:

Vogliamo dimostrare che una funzione $f(x)$ derivabile in x_0 è continua in x_0 cioè $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ o $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0+h) = f(x_0)$

Consideriamo l'uguaglianza per $0 \neq h \in \mathbb{R}$: $f(x_0+h) = f(x_0) + f(x_0+h) - f(x_0)$, che può essere riscritta nella seguente forma:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \cdot h$$

Passiamo al limite per $h \rightarrow 0$ di entrambi i membri: $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0+h) = \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0) + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} h$

Essendo la funzione derivabile in x_0 esistono finiti i limiti destro e sinistro del rapporto incrementale e coincidono. Quindi:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) \quad \text{e si conclude che} \quad \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0+h) = f(x_0)$$

25 DERIVATA DESTRA E SINISTRA, PUNTO ANGOLOSO, CUSPIDE, FLESSO A TANGENTE VERTICALE

- Derivata destra: nel punto x_0 il limite del rapporto incrementale calcolato da destra:

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

- Derivata sinistra: nel punto x_0 il limite del rapporto incrementale calcolato da sinistra:

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

- Punto angoloso: (*)²

Cuspide

Flesso a tangente verticale

26 ALGEBRA DELLE DERIVATE, REGOLA DI LEIBNIZ (DERIVAZIONE DEL PRODOTTO)

- Siano $f, g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivabili in (a, b) allora $f \pm g$, $f \cdot g$, f/g ($g \neq 0$) sono derivabili in (a, b) e valgono le seguenti

$$(f \pm g)' = f' \pm g' \quad | \quad (f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' \quad | \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - f \cdot g'}{g^2}$$

• $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ Regola di Leibniz

Dimostrazione:

$f(x_0+h) \cdot g(x_0+h) - f(x_0) \cdot g(x_0)$ e aggiungo $f(x_0+h) \cdot g(x_0)$

Applicando la definizione di derivata e ipotizzando che $f(x)$ e $g(x)$ derivabili in x_0 :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) \cdot g(x_0+h) - f(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0+h) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{h}$$

Raccoglio $f(x_0+h)$ e $g(x_0)$ si ottiene:

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0+h) \left[\frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \right] + \lim_{h \rightarrow 0} g(x_0) \left[\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \right]$$

essendo $f(x)$ derivabile in x e quindi anche

continua: $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0+h) = f(x_0)$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} = g'(x_0) \quad \text{e quindi} \quad f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

27 TEOREMA DI DERIVAZIONE COMPOSITA (REGOLA DELLA CATENA)

• Sia $g \circ f$ la composta di due funzioni f e g . Se f è derivabile in un punto x e g è derivabile in $y = f(x)$ allora $g \circ f$ è derivabile in x e vale la formula:

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Dimostrazione:

$z = g(y)$
 $y = f(x)$
 $z = g(f(x))$

definizione di derivata del rapporto incrementale: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h}$

moltiplichiamo e dividiamo per $f(x+h) - f(x)$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{f(x+h) - f(x)} \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

pensiamo a $f(x+h)$ e $f(x)$ come due numeri, $y+k = f(x+h)$.

Quando $h \rightarrow 0$ anche $k \rightarrow 0$

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{g(y+k) - g(y)}{y+k - y} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{g(y+k) - g(y)}{k} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = g'(y) \cdot f'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

28 DEFINIZIONE DI MASSIMO E MINIMO E PUNTO CRITICO. TEOREMA DI FERNAT

• $x_0 \in \text{dom } f$ è un punto di massimo relativo se esiste $\delta > 0$ t.c. $\forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \cap \text{dom } f$ si ha che $f(x) \leq f(x_0)$

• $x_0 \in \text{dom } f$ è un punto di minimo relativo se esiste $\delta > 0$ t.c. $\forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \cap \text{dom } f$ si ha che $f(x) \geq f(x_0)$

• $x_0 \in \text{dom } f$ è un punto critico di f se:

- la funzione è derivabile in x_0 e si ha che $f'(x_0) = 0 \rightarrow x_0 = \text{punto stazionario}$

- la funzione non è derivabile in $x_0 \rightarrow x_0$ è un punto di discontinuità non derivabilità

• Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile in $x \in (a, b)$. Se x è un punto di estremo locale allora:

$$f'(x) = 0$$

Dimostrazione: Per ipotesi $f(x)$ è derivabile in x quindi vale: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x)$

Dimostriamo il caso in cui x_0 è un punto di max relativo; il contrario è uguale.

x_0 è un punto di massimo relativo, dato un incremento h vale: $f(x_0+h) - f(x_0) \leq 0$

Dividiamo la disuguaglianza per h : - se h è positivo $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq 0$

- se h è negativo $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geq 0$

Facciamo il limite per $h \rightarrow 0$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq 0 \rightarrow f'_+(x_0) \leq 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geq 0 \rightarrow f'_-(x_0) \geq 0$$

I due limiti devono coincidere quindi: $f'_+(x_0) = 0 = f'_-(x_0) \text{ cioè } f'(x_0) = 0$

29 TEOREMA DI LAGRANGE (O DEL VALORE MEDIO)

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b) . Allora esiste $c \in (a, b)$ tale che:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Dimostrazione:

Consideriamo una funzione ausiliaria $F(x)$ definita come $F(x) = f(x) - g(x)$ $g(x)$ = retta e tale che $f(a) = g(a)$ $f(b) = g(b)$

Quindi le due funzioni coincidono agli estremi e la funzione ausiliaria $F(x)$ sarà nulla agli estremi.

La scelta della funzione g è obbligata: essa dovrà passare per i punti $A = (a, f(a))$, $B = (b, f(b))$.

Per l'equazione della retta passante per due punti: $\frac{x - a}{b - a} = \frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)}$ $g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a)$

$F(x) = f(x) - g(x) = f(x) - f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a)$ $\rightarrow F(x)$ verifica il teorema di Rolle e quindi esiste un punto $c \in (a, b)$ in cui $F'(c) = 0$

allora: $F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ per il teorema di Rolle: $F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$
 $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

30 CARATTERIZZARE FUNZIONI COSTANTI SU UN INTERVALLO I

Sia f una funzione derivabile in un intervallo $[a, b]$ tale che $f'(x) = 0, \forall x \in (a, b)$

Allora f è costante nell'intervallo $[a, b]$

31 TEST DI MONOTONIA

Sia $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile. Allora $\begin{cases} f \text{ crescente} \iff f'(x) \geq 0 \\ f \text{ decrescente} \iff f'(x) \leq 0 \end{cases} \forall x \in (a, b)$

Dimostrazione:

Considerata $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ e due punti qualunque $x, z \in (a, b)$.

f è crescente $\iff \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \geq 0$
 decrescente $\iff \leq 0$

Passando al limite per $z \rightarrow x$ per il teorema della permanenza del segno dalle due relazioni si ottiene:

f crescente $\rightarrow f'(x) \geq 0$
 f decrescente $\rightarrow f'(x) \leq 0$
 $\forall x \in (a, b)$

Sia $f'(x) \geq 0 \forall x \in (a, b)$ proviamo che allora f è crescente in (a, b) . Prendiamo due punti qualsiasi $x_1, x_2 \in (a, b)$ $x_1 < x_2$ e mostriamo che $f(x_1) \leq f(x_2)$. Applicando il teorema di Lagrange ad f su un intervallo $[x_1, x_2]$ abbiamo che esiste $c \in (x_1, x_2)$ tale che $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$

Poiché $f'(c) \geq 0$ e $x_2 - x_1 > 0$, ne segue che $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$, cioè la tesi.

32 DEFINIRE FUNZIONE CONCAVA, CONVESSA IN UN PUNTO, DEFINIRE PUNTO DI FLESSO, TEST DI CONVESSITÀ

- Sia $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione e $x_0 \in (a, b)$ un punto di derivabilità per f , oppure sia $f'(x_0) = \pm\infty$. Il punto x_0 si dice di flesso per f se esiste un intorno destro (x_0, x_0+h) , $h>0$ in cui f è strettamente convessa (concava) e un intorno sinistro (x_0-h, x_0) in cui è strettamente concava (convessa).
- Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ dove I è un intervallo. Si dice che f è convessa (concava) in I se per ogni coppia di punti $x_1, x_2 \in I$ si ha che il segmento (corda) di estremi $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$ non ha punti sotto (sopra) il grafico di f .
- Sia $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$
 - Se f è derivabile in (a, b) , allora f è convessa (concava) in (a, b) se e solo se f' è crescente (decrescente) in (a, b) .
 - Se f è derivabile due volte in (a, b) , allora f è convessa (concava) in (a, b) se e solo se $f''(x) \geq 0 (< 0) \forall x \in (a, b)$.

33 TEOREMA DI DE L'HÔPITAL

Siano f, g funzioni derivabili in un intervallo (a, b) con $g, g' \neq 0$ in (a, b) . Se:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0 \text{ oppure } \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)/g'(x) = L \in \mathbb{R}^*$$

$$\text{Allora: } \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

34 FORMULA DI TAYLOR DI ORDINE n CON RESTO SECONDO PEANO

Sia $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile n volte in $x_0 \in (a, b)$. Allora:

$$f(x) = T_{n, x_0}(x) + o((x-x_0)^n) \text{ per } x \rightarrow x_0$$

$$T_{n, x_0} = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$$

35 DEFINIZIONE DI PRIMITIVA, DUE PRIMITIVE DIFFERISCONO PER UNA COSTANTE

- Si dice che una funzione G , derivabile in un intervallo I è una primitiva di f in I se:

$$\forall x \in I \quad G'(x) = f(x)$$

- Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, integrabile in I e siano $F(x)$ e $g(x)$ due primitive di $f(x)$ tali che:

$$\int f(x) dx = F(x) = g(x) \quad \forall x \in I \quad \text{Allora } F(x) \text{ e } g(x) \text{ differiscono per una costante}$$

Dato che $F'(x) = g'(x)$ allora $F'(x) - g'(x) = 0$.

$$\text{Integrando entrambi i membri otteniamo: } \int F'(x) - g'(x) = \int 0 dx = \int F'(x) dx - \int g'(x) dx = \int 0 dx = \\ = F(x) - g(x) = K \quad \forall K \in \mathbb{R}$$

36 INTEGRAZIONE PER PARTI

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx$$

- Dimostrazione: Se f e g sono derivabili in $[a, b]$ si ha:

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' \quad \text{cioè} \quad f \cdot g' = (f \cdot g)' - f' \cdot g$$

$$\text{Facendo l'integrale in entrambi i membri: } \int f \cdot g' = \int (f \cdot g)' - \int f' \cdot g \quad \int f \cdot g' = f \cdot g - \int f' \cdot g$$

37 INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE

Siano $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e $g: J \rightarrow I$ una funzione derivabile con derivata continua. Si ha che:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \left[\int f(t) dt \right]_{t=g(x)}$$

Dimostrazione:

Sia $F(x)$ una primitiva della funzione $f(x)$ su I , allora per la regola di derivazione della funzione composta si ha:

$$\frac{d}{dx} F(g(x)) = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

Integrando membro a membro si ottiene:

$$\int \frac{d}{dx} F(g(x)) dx = \int f(g(x)) \cdot g'(x) dx \quad \text{che è la tesi}$$

$F(g(x)) + C$

38 TEOREMA DELLA MEDIA INTEGRALE

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Allora esiste un $c \in [a, b]$ tale che:

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(c)$$

Dimostrazione:

Essendo f continua in $[a, b]$, per il teorema di Weierstrass, essa presenta un massimo (M) e un minimo (m). Dalle proprietà di monotonia:

$$m = \frac{1}{b-a} \int_a^b m dx \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b M dx = M$$

Quindi il valore $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ è compreso tra il minimo e il massimo di f . Per la proprietà dei valori intermedi delle funzioni continue tale valore è uguale a $f(c)$ per qualche $c \in [a, b]$.

39 FUNZIONE INTEGRALE, se f è INTEGRABILE SU (a, b) , $F(x)$ è CONTINUA IN (a, b)

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad \begin{array}{l} \text{funzione } f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ limitata e integrabile secondo Riemann in } [a, b] \\ \text{F funzione integrale di } f \text{ su } [a, b] \end{array} \quad \forall x \in [a, b]$$

f integrabile su $(a, b) \rightarrow F(x)$ è continua in (a, b)

Dimostrazione:

Siano $x, y \in [a, b]$ e consideriamo $|F(x) - F(y)|$.

$$\text{Per la proprietà degli integrali: } |F(x) - F(y)| = \left| \int_a^x f(t) dt - \int_a^y f(t) dt \right| = \left| \int_a^x f(t) dt + \int_y^a f(t) dt \right| = \left| \int_y^x f(t) dt \right|$$

Consideriamo l'estremo superiore delle immagini della funzione f su $[a, b]$ $L = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$

$$\text{Sempre per la proprietà degli integrali: } \left| \int_y^x f(t) dt \right| \leq \int_y^x |f(t)| dt \leq \int_y^x L dx = L |x - y|$$

$$|F(x) - F(y)| \leq L |x - y|$$

Abbiamo ricavato: $|F(x) - F(y)| \leq L |x - y| \quad \forall x, y \in [a, b]$

Se fissiamo $\epsilon > 0$ basta prendere come δ che soddisfa la definizione di funzione continua: $\delta = \frac{\epsilon}{L}$ per cui se $|x - y| < \delta$ ne segue che $|F(x) - F(y)| < \epsilon$, siamo giunti alla tesi.

40 FUNZIONE INTEGRALE, TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

• Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitata e integrabile in $[a, b] \forall x \in [a, b]$

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad F(x) \text{ è la funzione integrale di } f \text{ su } [a, b]$$

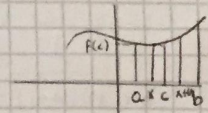
• Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua su (a, b) . Allora la funzione integrale $F(x)$ è derivabile in ogni punto in cui $f(x)$ è continua e risulta:

$$F'(x) = f(x)$$

~~Intervallo~~ $[a, b]$ Dimostrazione:

Facciamo la derivata della funzione integrale tramite il rapporto incrementale:

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t) dt}{h} \stackrel{\text{per il teorema della media integrale}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c) \cdot h}{h} = f(c) \text{ con } c \in [x, x+h] \text{ quindi } c \rightarrow x \text{ e } f(c) \rightarrow f(x)$$



41 COROLLARIO TEOREMA FONDAMENTALE CALCOLO INTEGRALE

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione che ammette una primitiva $G(x)$ su $[a, b]$. Allora vale la seguente formula:

$$\int_a^b f(t) dt = G(b) - G(a)$$

Dimostrazione:

La funzione integrale $F(x)$ è una primitiva della funzione f , e ricordando che tutte le primitive differiscono per una costante c , allora:

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt = G(x) + c$$

Sappiamo che se $x = a$, dalle proprietà degli integrali risulta: $F(a) = \int_a^a f(t) dt = G(a) + c \rightarrow c = -G(a)$

Possiamo esprimere la funzione integrale come: $\int_a^x f(t) dt = G(x) - G(a)$

Ponendo $x = b$ si arriva a scrivere $\int_a^b f(t) dt = G(b) - G(a)$ che è la tesi.

42 SERIE CONVERGENTE, DIVERGENTE, IRREGOLARE. ESEMPIO PER TIPO

Data una successione di numeri reali $\{a_n\}_n$ e costruita la successione delle somme parziali $\{s_n\}_n$ abbiamo definito la

serie di termini generale a_n come: $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$

Si può avere: $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = L$ (numero finito) $\rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è una serie convergente e la sua somma vale L .

$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \pm \infty \rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è una serie che divergerà positivamente/negativamente

$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \text{non esiste} \rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è una serie irregolare o indeterminata

43 SERIE TELESCOPICHE, PROPRIETÀ DI CONVERGENZA

Serie telescopica:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - a_{n+k}) = \sum_{n=1}^{+\infty} (a_{n+k} - a_n)$$

- proprietà di convergenza: se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ esiste ed è finito, allora la serie converge e $\text{somma} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k$

- esempio serie telescopica: Serie di Mengoli

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n(n+1)} \right) \rightarrow \text{la serie converge e ha per somma } 1$$

44 SERIE GEOMETRICA, ENUNCIARE | DIMOSTRARE QUANDO CONVERGE - DIVERGE, È IRREGOLARE

q = numero reale

Serie geometrica di ragione q:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$$

- guardare la ragione q:
- se il modulo della ragione q è minore di 1 $\rightarrow$ serie converge $\rightarrow \text{somma} = \frac{1}{1-q}$
 $-1 < q < 1$
 - se la ragione q è minore o uguale a 1 $\rightarrow$ serie irregolare
 $q \leq 1$
 - se la ragione q è maggiore o uguale a 1 $\rightarrow$ serie diverge positivamente
 $q \geq 1$

45 PROPRIETÀ FONDAMENTALE DELLE SERIE A TERMINI NON NEGATIVI

Una serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ a termini non negativi è convergente o divergente a $+\infty$.

Esso converge se e solo se la successione delle somme parziali n-esime è limitata.

Dimostrazione: Una serie a termini non negativi avrà la successione delle somme parziali crescente, poiché:

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n$$

Per il teorema sull'esistenza del limite di una successione monotona, esiste $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$: esso può essere finito o $+\infty$ a seconda che la successione sia limitata o no. Quindi $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \{S_n\}$

46 SERIE ARMONICA, SERIE ARMONICA GENERALIZZATA, PROPRIETÀ DI CONVERGENZA

Serie armonica:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

diverge positivamente

Serie armonica generalizzata:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^q}$$

- converge se $q > 1$
- diverge positivamente se $q \leq 1$

47 CONDIZIONE NECESSARIA CONVERGENZA SERIE

Condizione necessaria affinché una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converga $\rightarrow$ termine generale a_n tende a 0
 $a_n \rightarrow 0$

$\rightarrow$ Condizione non sufficiente: esempio: - serie armonica

- se il termine generale non tende a 0, $-\sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{1}{n}$ non converge
 certamente la serie non converge

48 CRITERIO DELLA RADICE

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie a termini non negativi. Se esiste il limite: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$

e: $\ell > 1 \rightarrow$ serie diverge
 $\ell < 1 \rightarrow$ serie converge
 $\ell = 1 \rightarrow$ non si può dire nulla

Dimostrazione: ① caso: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell < 1$

Poiché $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow \ell$, allora fissato un $\varepsilon > 0$, si ha che: $\sqrt[n]{a_n} < \ell + \varepsilon$

$\ell < 1$, perciò $\ell < 1 - \varepsilon$ per un ε opportuno. Per questo ε si ha: $\sqrt[n]{a_n} < \ell + \varepsilon < (1 - \varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2} = 1 - \frac{\varepsilon}{2}$;

quindi $a_n < \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^n$. Per confronto con la serie geometrica convergente $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^n$, la serie d' partenza converge.

② caso: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell > 1$; si ha che $a_n > \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^n$ definitivamente per un certo $\varepsilon > 0$
 Dunque $a_n \rightarrow +\infty$ e la serie diverge.

49 CRITERIO DEL CONFRONTO O DEL CONFRONTO ASINTOTICO

Se le due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ (a termini positivi) sono asintotiche: $a_n \sim b_n$

Allora: $\sum a_n$ e $\sum b_n$, le due serie hanno lo stesso carattere: sono entrambe convergenti o divergenti.

Dimostrazione: $a_n \sim b_n$ per $n \rightarrow \infty$ significa che $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 1$ per $n \rightarrow \infty$. Questo significa che $\forall \varepsilon > 0$ si ha definitivamente

$$1 - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < 1 + \varepsilon. \text{ Scegliendo } \varepsilon = \frac{1}{2} \text{ ottengo } \frac{1}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3}{2};$$

per ipotesi $b_n > 0$ quindi posso: $\frac{1}{2} b_n < a_n < \frac{3}{2} b_n$ definitivamente.

Per il teorema del confronto la prima delle due disuguaglianze dice che se $\sum a_n$ converge $\rightarrow \sum b_n$ converge
 Mentre la seconda se $\sum a_n$ diverge $\rightarrow \sum b_n$ diverge, hanno perciò lo stesso carattere.

50 DEFINIZIONE CONVERGENZA ASSOLUTA ESISTONO SERIE CONVERGENTI NON ASSOLUTAMENTE CONVERGENTI

Una serie $\sum a_n$ si dirà assolutamente convergente se converge la serie a termini non negativi: $\sum |a_n|$

Se la serie $\sum a_n$ converge assolutamente, allora converge

Controesempio: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ converge per il criterio di Leibniz, mentre $\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge perché è la serie armonica

47 CONDIZIONE NECESSARIA CONVERGENZA SERIE

Condizione necessaria affinché una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converga $\rightarrow$ termine generale a_n tende a 0
 $a_n \rightarrow 0$

$\rightarrow$ Condizione non sufficiente: esempio: - serie armonica

- se il termine generale non tende a 0, $-\sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{1}{n}$ non converge
 certamente la serie non converge

48 CRITERIO DELLA RADICE

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie a termini non negativi. Se esiste il limite: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$

e: $\ell > 1 \rightarrow$ serie diverge
 $\ell < 1 \rightarrow$ serie converge
 $\ell = 1 \rightarrow$ non si può dire nulla

Dimostrazione: ① caso: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell < 1$

Poiché $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow \ell$, allora fissato un $\varepsilon > 0$, si ha che: $\sqrt[n]{a_n} < \ell + \varepsilon$

$\ell < 1$, perciò $\ell < 1 - \varepsilon$ per un ε opportuno. Per questo ε si ha: $\sqrt[n]{a_n} < \ell + \varepsilon < (1 - \varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2} = 1 - \frac{\varepsilon}{2}$;

quindi $a_n < \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^n$. Per confronto con la serie geometrica convergente $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^n$, la serie d'ipotesi converge.

② caso: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell > 1$; si ha che $a_n > \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^n$ definitivamente per un certo $\varepsilon > 0$
 Dunque $a_n \rightarrow +\infty$ e la serie diverge.

49 CRITERIO DEL CONFRONTO O DEL CONFRONTO ASINTOTICO

Se le due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ (a termini positivi) sono asintotiche: $a_n \sim b_n$

Allora: $\sum a_n$ e $\sum b_n$, le due serie hanno lo stesso carattere: sono entrambe convergenti o divergenti.

Dimostrazione: $a_n \sim b_n$ per $n \rightarrow \infty$ significa che $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 1$ per $n \rightarrow \infty$. Questo significa che $\forall \varepsilon > 0$ si ha definitivamente

$$1 - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < 1 + \varepsilon. \text{ Scegliendo } \varepsilon = \frac{1}{2} \text{ ottengo } \frac{1}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3}{2};$$

per ipotesi $b_n > 0$ quindi posso: $\frac{1}{2} b_n < a_n < \frac{3}{2} b_n$ definitivamente.

Per il teorema del confronto la prima delle due disuguaglianze dice che se $\sum a_n$ converge $\rightarrow \sum b_n$ converge
 Mentre la seconda se $\sum a_n$ diverge $\rightarrow \sum b_n$ diverge, hanno perciò lo stesso carattere.

50 DEFINIZIONE CONVERGENZA ASSOLUTA ESISTONO SERIE CONVERGENTI NON ASSOLUTAMENTE CONVERGENTI

Una serie $\sum a_n$ si dirà assolutamente convergente se converge la serie a termini non negativi: $\sum |a_n|$

Se la serie $\sum a_n$ converge assolutamente, allora converge

Controesempio: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ converge per il criterio di Leibniz, mentre $\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge perché è la serie armonica

51 SERIE A TERMINI A SEGNO ALTERNO. CRITERIO DI LEIBNIZ

- Serie a termini a segno alterno: serie numeriche costituite da un numero infinito di termini positivi e da un numero infinito di termini negativi. Nella maggior parte si presentano nella forma:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n \quad a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

CRITERIO DI LEIBNIZ: Sia data la serie: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ con $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Se: $\left. \begin{array}{l} - \text{la successione } \{a_n\} \text{ è decrescente} \\ - a_n \rightarrow 0 \text{ per } n \rightarrow \infty \end{array} \right\} \text{ allora la serie converge}$