www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Le successioni

Indice:

alessiadonati00@gmail.com

Università di Siena – DIISM 2019-2020
Ingegneria informatica 1° anno

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

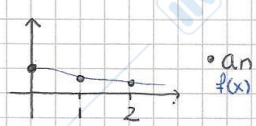
Le Successioni

Una funzione $f: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ è una successione complessa
$f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ è una successione reale $\quad n \in \mathbb{N}, \; f(n) \in \begin{matrix}\mathbb{C} \\ \mathbb{R}\end{matrix}$

Le successioni sono indicate $(a_n)(b_n)\ldots$

Chi è f? $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ $\quad f(n) = a_n$ elemento n-esimo della successione

ES $a_n = \dfrac{1}{n^2+2}$ $\quad f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ $\quad a_1 = 1/3 \quad a_2 = 1/6 \ldots$
$a_0 = 1/2$



Definizione sottosuccessione Sia a_n una successione reale o complessa
Sia $\delta: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ crescente strettamente
$(a_{\delta(n)})$ è una sottosuccessione $\quad$ es (a_{2n}) $\quad \delta: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (numeri pari)
$1 \to 2$
$2 \to 4$
$3 \to 8$

Definizione Sia (a_n) una successione reale:
Si dice crescente $a_n \leq a_{n+1}$
strett. crescente $a_n < a_{n+1}$ $\to$ MONOTONE
decrescente $a_n \geq a_{n+1}$
strett. decrescente $a_n > a_{n+1}$

Convergenza Sia (a_n) una successione di numeri complessi
Sia $L \in \mathbb{C}$. Si dice (a_n) converge a L
$\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = L (< +\infty)$ $\quad \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n \in \mathbb{N}. \;\; \forall m \in \mathbb{N} \;\; m \geq n$
$|a_m - L| < \varepsilon$ $\quad$ oppure $\quad L - \varepsilon < a_m < L + \varepsilon$

Divergenza Sia (a_n) una successione di numeri complessi
Si dice che (a_n) diverge o va a $\begin{matrix}-\infty \\ +\infty\end{matrix}$
$\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \begin{matrix}+\infty \\ -\infty\end{matrix}$ $\quad \forall T \in \mathbb{R} \;\; \exists n \in \mathbb{N}. \;\; \forall m \in \mathbb{N} \;\; m > n$
$a_m > T \qquad a_m < -T$

alessiadonati00@gmail.com

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

TEOREMA (9.9.1) fondamentale delle successioni monotone

Sia (a_n) una successione reale crescente (strett) . decrescente (strett)

Allora (a_n) ammette limite uguale al suo estremo superiore / inferiore

$\lim_{n \to +\infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$

$= \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$

"Le successioni monotone crescenti sono costrette, (non potendo OSCILLARE) o a convergere a ∞ o ad un numero finito"

DIM: Supponiamo $a_n < a_{n+1}$ $n \in \mathbb{N}$

1) $\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n < +\infty$ 2) $\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n = +\infty$

1) Poniamo $S := \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n \in \mathbb{R}$ Allora (i) $\forall n \in \mathbb{N}$ $S \geq a_{n+1}$

(ii) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n \in \mathbb{N}$: $a_n > S - \varepsilon$

Poiché (a_n) è crescente, da (ii) segue

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists n \in \mathbb{N}$: $\forall m \in \mathbb{N}$ $m > n$ $a_m > S - \varepsilon$

Cioè $\forall \varepsilon > 0$ $a_n > S - \varepsilon$ def. in n

Inoltre (i) implica $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall \varepsilon > 0$ $\varepsilon + S \geq a_n$, cioè $a_n < S + \varepsilon$

Deduco $|a_n - S| < \varepsilon$ def. in n $\to$ $S = \lim_{n \to +\infty} a_n$

TEOREMA Unicità del limite

Il limite di una successione (a_n), se esiste, è UNICO

DIM x assurdo

Esistono due limiti $\ell_1 = \lim_{n \to +\infty} a_n$ $\ell_2 = \lim_{n \to +\infty} a_n$ $\ell_1 < \ell_2$

Prendo $\varepsilon \in \left(0, \frac{\ell_2 - \ell_1}{2}\right)$. Allora $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ $\forall m \in \mathbb{N}$ $m > n_1$ $|a_m - \ell_1| < \varepsilon$

$\varepsilon < \frac{\ell_2 - \ell_1}{2}$ $\exists n_2 \in \mathbb{N}$ $\forall m \in \mathbb{N}$ $m > n_2$ $|a_m - \ell_2| < \varepsilon$

$\Rightarrow$ $\bar{n} := \max(n_1, n_2)$ si ha

$\forall m \in \mathbb{N}$ $m > \bar{n}$ $|a_m - \ell_1| < \varepsilon$

$|a_m - \ell_2| < \varepsilon$ $\to$ $\ell_1 - \varepsilon < \ell_2 + \varepsilon$

$\ell_1 + \varepsilon < \ell_2 - \varepsilon$ ASSURDO

$\frac{\ell_1 - \ell_2}{2} < \varepsilon$

TEOREMA permanenza del segno (10.1.1)

Sia (a_n) una successione reale, $a_n \in \mathbb{R}$

$\ell = \lim_{n \to +\infty} a_n \in (0, +\infty]$. Allora def. n $a_n > 0$ $\exists \bar{n} \in \mathbb{N}$: $a_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $n > \bar{n}$

a_n è definitivamente positiva

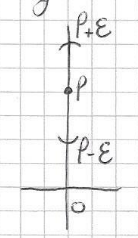
Esempio $a_n = 1/n$ $a_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ inoltre $\exists \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ "Le disuguaglianze strette $\leq$ valide per a_n passando al limite in generale diventano larghe"

DIM Facciamo il caso $\ell < +\infty$

Prendo $\varepsilon \in (0, \ell)$, esempio $\varepsilon = \ell/2$ andrebbe bene

Per la definizione di limite $\exists \bar{n} \in \mathbb{N}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $n > \bar{n}$ $|a_n - \ell| < \varepsilon$

$0 < \ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon$ per scelta $\varepsilon < \ell$ ▣



alessiadonati00@gmail.com

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Limiti e ordinamento

TEOREMA del confronto Siano (a_n) e (b_n) due successioni di numeri reali.
Se $a_n \leq b_n$, allora $\underbrace{\lim_{n\to+\infty} a_n}_{L} \leq \underbrace{\lim_{n\to+\infty} b_n}_{M}$

DIM ASSURDO così non so se esistono i limiti, è più corretto $\limsup_{n\to+\infty} a_n \leq \liminf_{n\to+\infty} b_n$

$L, M \in \mathbb{R}$, $L > M$, $0 < \varepsilon < \frac{L-M}{2}$

Sia ν la soglia:

$a_n \leq b_n$, $|L - a_n| < \varepsilon$, $|M - b_n| < \varepsilon$ $\quad \forall n > \nu \Rightarrow L - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq M + \varepsilon$

$\frac{L-M}{2} < \varepsilon$

per cui $0 < L - M < 2\varepsilon$ $\quad \forall \varepsilon > 0$ ASSURDO ■

TEOREMA dei due carabinieri Siano $(a_n)(b_n)(c_n)$ successioni reali.
Se $a_n \leq b_n \leq c_n$ e $\exists \lim_{n\to+\infty} a_n \in \overline{\mathbb{R}} = \{\mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}\} = \exists \lim_{n\to+\infty} c_n \in [-\infty; +\infty]$

$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} c_n$

Allora $\exists \lim_{n\to+\infty} b_n$ e $\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} c_n$

Operazioni tra limiti Se $\exists \lim_{n\to+\infty} a_n := \ell_a$, $\exists \lim_{n\to+\infty} b_n := \ell_b$

allora $a_n - b_n = \ell_a - \ell_b$ No: $\ell_a = +\infty$ e $\ell_b = -\infty$

$a_n \cdot b_n = \ell_a \cdot \ell_b$ No $\ell_a = +\infty$ e $\ell_b = 0$

$a_n / b_n = \ell_a / b_n$

Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ (infinitesima) allora $\lim_{n\to+\infty} a_n(-1)^n = 0$

Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = 1$ allora $\lim_{n\to+\infty} a_n(-1)^n \to$ NON ESISTE

Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ allora $\lim_{n\to+\infty} a_n(-1)^n n \to$ NON POSSO DIRE NULLA

Se a_n è infinitesima e b_n illimitata (cioè $\exists c > 0$ $\exists \bar{n} \in \mathbb{N}$, $|b_n| \leq c$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $n > \bar{n}$)
allora $a_n \cdot b_n \to 0$ $\lim_{n\to+\infty} a_n \cdot b_n = 0$

alessiadonati00@gmail.com

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Criterio del rapporto per le successioni

Sia (a_n) una successioni di numeri POSITIVI

Supponiamo che $0 \leq q < 1$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ def. n $\quad \exists \lim_{n \to +\infty} a_n = 0$ (CONVERGE)

$q \geq 1$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq q$ def in n $\quad \exists \lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$ (DIVERGE)

Criterio delle radici per le successioni

Sia (a_n) una successione di numeri POSITIVI

Supponiamo che

$0 \leq q < 1 \quad \sqrt[n]{a_n} \leq q$ def in $\quad \exists \lim_{n \to +\infty} a_n = 0$

$q \geq 1 \quad \sqrt[n]{a_n} \geq q$ def n $\quad \exists \lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$

alessiadonati00@gmail.com

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

La teoria della serie a termini positivi, ci permette una descrizioni dei numeri reali positivi.

$\pi = 3{,}141592$

$\pi = 3\cdot 10^{0} + 1\cdot 10^{-1} + 4\cdot 10^{-2} + 1\cdot 10^{-3} + 5\cdot 10^{-4} + 9\cdot 10^{-5} + \dots$

π può essere definito come una serie

$\sum_{n=0}^{+\infty} C_n \cdot 10^{-n} \qquad 0 \leq C_n < 10 \quad \forall n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$

Se $C_0 = 1$, $C_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\sum_{n=0}^{+\infty} = 1 + \frac{0}{10} + \frac{0}{10^{-}} + \dots = 1$

Se $C_0 = 0$, $C_n = 9 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{9}{10^n} = 9 \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n < +\infty = 9\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^n - 1\right) = 9\left(\frac{1}{1-1/10} - 1\right) = 1$$

1 ha $\underbrace{\text{due rappresentazioni}}$ $\quad 1 = 1{,}0000$

SUCCEDE PER OGNI NUMERO REALE $\quad 1 = 0{,}9999$

TEOREMA di rappresentazione dei num. reali (11.10.1)

Sia $b \in \mathbb{N}$, $b > 1$ $\quad$ b è la base

Sia $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$. Allora $\underset{\text{è unica}}{\exists!}\,(C_n)$ successione:

1) $\forall n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ $\quad 0 \leq C_n < b$
$C_n \in \mathbb{N}$

2) $\forall m \in \mathbb{N} \;\; \exists n \in \mathbb{N}: \quad C_n < b-1$ (def. i C_n non sono tutti uguali a nove $9 = b-1$)

3) $x = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n b^{-n} = C_0, C_1C_2C_3C_4\dots$

Viceversa: data una successione C_n verificata 1) e 2), la serie nel membro destro della 3) converge ad un numero reale.

OSS. La DIM del Viceversa è facile

$C_0 = [x] =$ parte intera di $x = \min\{n \in \mathbb{N}\cup\{0\}\}$
$\qquad n \leq x$

$\forall n \in \mathbb{N}\cup\{0\} \quad C_{n+1} = [b^{n+1}x] - b[b^n x]$

es. $C_1 = [bx] - b[x] \quad$ se $b = 10 \quad C_1 = [10x] - 10[x]$

es. $x = \sqrt{2} \quad C_0 = 1$, $C_1 = [10\sqrt{2}] - 10[\sqrt{2}] = 14 - 10 = 4 \quad C_2 = [100\sqrt{2}] - 10[10\sqrt{2}] = 141 - 140 = 1$

$14^2 < 10^2 \cdot 2 < 15^2$
$196 < 200 < 225$

alessiadonati00@gmail.com

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

TEOREMA di compattezza di Bolzano - Weierstrass

Sia (a_n) una successione di n. reali LIMITATA (NON AMMETTE LIMITE)

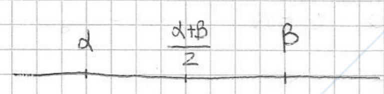
$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \alpha \leq a_n \leq \beta$

Allora (a_n) ammette una sottosuccessione convergente a un n. reale $\in [\alpha; \beta]$

es. $a_n = (-1)^n$ è limitata — NON è convergente ma ammette una sottosuccessione convergente

$a_{2n} = 1 \xrightarrow{<+\infty} 1$

DIM: Dividiamo $[\alpha; \beta]$ in due parti uguali



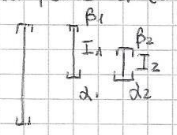
$\left[\alpha; \frac{\alpha+\beta}{2}\right], \left[\frac{\alpha+\beta}{2}; \beta\right]$

Dico che $\exists$ infiniti $n \in \mathbb{N}$: a_n appartiene ad (almeno) una delle due metà.

Infatti, se per assurdo finiti sono gli $n \in \mathbb{N}$ per cui $a_n \in \left[\alpha; \frac{(\alpha+\beta)}{2}\right]$ e finiti sono gli $m \in \mathbb{N}$ per cui $a_m \in \left[\frac{\alpha+\beta}{2}; \beta\right]$ allora ciò vorrebbe dire che $\mathbb{N}$ è finito $\to$ ASSURDO

Prendiamo una delle due metà per cui la proprietà è vera.
Sia I_1 tale metà.
Dunque $\exists$ infiniti indici (n_1) naturali per cui $a_{n_1} \in I_1$

Ripeto il ragionamento sostituendo al posto del "vecchio" intervallo $[\alpha; \beta]$ l'intervallo I_1 e al posto di (a_n) la sottosuccessione (a_{n_1})



$I_1 = [\alpha_1, \beta_1]$
$I_2 = [\alpha_2, \beta_2]$
$\alpha_1 = \beta_1 = \frac{\alpha+\beta}{2}$

Dunque esistono infiniti indici n_2 in $\mathbb{N}$, scelti tra gli infiniti indici n_1 di prima, per cui a_{n_2} cresce in una delle due metà di I_1:
Chiamiamo essa I_2.
Ho costruito una sottosuccessione (n_2)

« L'estrazione di sottosuccessione sta avvenendo in $\mathbb{N}$ »

Dico che $\forall k \in \mathbb{N}$, $\exists$ una sottosuccessione (n_k) di indici : $(n_k) < (n_{k-1})$

$(n_0) = \mathbb{N}$, ed esiste $I_k \subset [\alpha; \beta] = I_0$
$I_k \subset I_{k-1}$

(anzi, I_k è una delle due metà di I_{k-1}):
esistono infiniti indici n per cui $a_{n_k} \in I_k$

Questo si dimostra per induzione su K: $k=1$ lo abbiamo fatto:
e il passaggio $k-1 \to k$ si fa come visto prima

Chiamiamo $I_k = [a_k, b_k] \ \forall k \in \mathbb{N}$, lunghezza $(I_k) = b_k - a_k = \frac{\beta - \alpha}{2^k}$

La successione (a_n) è monotona crescente
La successione (b_k) è monotona decrescente

$\exists \lim_{n \to +\infty} a_n = l^-$ (teo 9.9.1) $\quad \alpha \leq a_n \leq \beta$
$\exists \lim_{k \to +\infty} b_k = l^+$ (teo 9.9.1) $\quad \alpha \leq b_k \leq \beta$
$\Rightarrow \quad \alpha \leq l^- \leq \beta, \quad \alpha \leq l^+ \leq \beta$

$a_n \leq b_k \ \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow l^- \leq l^+$

Ma $\lim_{k \to +\infty} (b_k - a_n) = (\beta - \alpha) \lim_{k \to +\infty} 1/2^k = 0 \Rightarrow l^- - l^+ = 0 \Rightarrow l^- = l^+$

Chiamiamo $l := l^- (= l^+)$
La speranza è che l sia il limite cercato di una sottosuccessione di (a_n)
Resta da costruire una sottosuccessione di (a_n) convergente a l
Sia $k \in \mathbb{N}$; definisco

$$n_k = \min \{ n \in \mathbb{N} : n > n_{k-1}, a_n \in I_k \}$$

alessiadonati00@gmail.com
Università di Siena – DIISM 2019-2020
Ingegneria informatica 1° anno

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Il minimo $\exists$? Sì, per la proprietà del buon ordinamento di $\mathbb{N}$ perché $\{ \dots \} \neq \emptyset$

Cioè $\exists n \in \mathbb{N} \quad n > n_{k-1}, \; a_n \in I_k$

che è vero perché $a_n \in I_k$ è verificato per infiniti indici per costruzione.

(n_k) è una successione di numeri naturali

Inoltre $n_k > n_{k-1} \quad \forall k \in \mathbb{N}$

$$a_{n_k} \in I_k = [\alpha_k; \beta_k] \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\alpha_k \leq a_{n_k} \leq \beta_k \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\underset{k\to+\infty}{\downarrow} \; p \qquad \underset{k\to+\infty}{\downarrow} \; p \qquad \underset{k\to+\infty}{\downarrow} \; p$$

$\blacksquare$

RIASSUNTO

$I_k = [a_k; b_k] \quad \ell(I_k) = \frac{b-a}{2^k}$

$a_k \to p_1, \; b_k \to p_2$

$\lim_{k\to+\infty} b_k - a_k = p_2 - p_1$
$\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{2^k} = 0$
$\Big\} \Rightarrow p_1 = p_2$

$a_k < a_{n_k} < b_k$

$\downarrow p_1 \quad \downarrow p_1 \quad \downarrow p_1$

Definizione 13.6.1 Si dice $X \subseteq \mathbb{R}$

Si dice X è <u>compatto</u> per successioni (o sequenzialmente compatto) se da ogni sottosuccessione di punti di X si può estrarre una sottosuccessione convergente a un punto di X

($\mathbb{R}$ non è seq. compatto) <u>limsup e liminf</u>

TEOREMA 13.6.2 (B. W) Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \leq \beta$ allora $[\alpha, \beta]$ è sequenzialmente compatto

Definizione 13.7.1 Sia $X \subseteq \mathbb{R}$

Si dice che X è <u>chiuso</u> (in $\mathbb{R}$) per successioni se presa una successione di punti di X convergente a ℓ, allora $\ell \in X$ $\quad \lim_{n\to\infty} a_n \in a_n$

ESERCIZIO • $[0;1)$ è seq. chiuso (in $\mathbb{R}$)? No

$a_n = 1 - \frac{1}{n} \in [0;1) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$a_n \to 1 \notin [0;1)$

$[0;1]$ è seq chiuso (in $\mathbb{R}$)? Sì

$0 \leq a_n \leq 1 \quad \to \quad 1 \leq \ell \leq 1$

N.B. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \leq \beta$

$[\alpha;\beta]$ seq. chiuso

$[\alpha,\beta)$ No

$(\alpha;\beta]$ No

$(\alpha;\beta)$ No

ESERCIZIO $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ è seq. chiuso? No, per densità (TEO 6.1.1)

$\forall x \in [0;1]$ è limite di una successione di numeri in $\mathbb{Q} \cap [0;1]$

Siccome $X \subseteq \mathbb{R}$ generico non è detto che sia seq. chiuso, è naturale considerare $\overline{X}$, che è per definizione il più piccolo insieme seq. chiuso $\supseteq X$.

se $X = [0;1) \to \overline{X} = [0;1]$

se $X = (\alpha, \beta) \to \overline{X} = [\alpha, \beta]$

se $X = \mathbb{Q} \cap [0;1] \to \overline{X} = [0;1]$

Definizione 13.8.1 Sia $X \subseteq \mathbb{R}$

Si definisce $\overline{X}$ la <u>chiusura sequenziale</u> di X (in $\mathbb{R}$) come:

$$\{x \in \mathbb{R} : \exists (a_n) \subset X, \; a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$$

«$\overline{X}$ sono tutti quei numeri reali ottenibile come limite di successione di punti di X»

sempre $\overline{X} \supseteq X$

alessiadonati00@gmail.com

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

ESERCIZIO 13.9.1. $X = \{ 1/n : n \in \mathbb{N} \}$

X è chiuso? <u>NO</u> $\quad \overline{X} = X \cup \{0\}$?

OSS. 13.9.1 $[0,1]$ é seq. chiuso in $\mathbb{R}$? Sì

é seq. compatto? Sì

Il teo di BW dice che gli intervalli chiusi e limitati di $\mathbb{R}$ sono seq. compatti

Relazione: seq. chiuso in $\mathbb{R}$ seq. compatto (s.cpt)

$X = \mathbb{R}$ é seq. chiuso in $\mathbb{R}$?

Proprietà 13.10.1 Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ e seq. compatto.
Allora X è seq. chiuso

DIM

$\boxed{\text{s. cpt} \Rightarrow \text{chiuso}}$

$\boxed{\text{s. cpt} \not\Leftarrow \text{chiuso}}$

$\boxed{\text{Int chiuso limitato} \Rightarrow \text{s cpt}}$

Sia (a_n) una succ. di punti di X $a_n \to P \in \mathbb{R}$
Devo dim $P \in X$

Siccome X é seq cpt, da (a_n) posso estrarre una sottosuccessione convergente a un punto di X.
Dato che il limite della sottosucc. di X deve essere uguale al limite della successione

(perché sono ena per ipotesi converge) ne segue che tale limite $\in X$

Dunque X é seq chiuso ∎

Ulteriori osservazioni su TEO B.W.

Oss. 16.1.1 Sia (a_n) una successione reale
Allora (a_n) ammette sempre una sottosuccessione convergente a un punto in $[-\infty; +\infty]$
Infatti, se $\lim\limits_{n \to +\infty} \sup a_n = +\infty$, allora a_n ha una sottosucc. convergente a $+\infty$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \inf a_n = -\infty$ a $-\infty$

Resta il caso $\begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} \sup > -\infty \\ \lim\limits_{n \to +\infty} \inf < +\infty \end{cases}$ In tal caso (a_n) è limitata e scatta il teorema 13.1.1

OSS. 16.2.1 (B.W.) seconda dimostrazione

Supponiamo (a_n) una succ. reale
Ridimostriamo che (a_n) ammette una sottosuccessione convergente

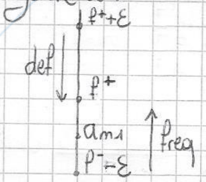
Se (a_n) è limitata

$P^- := \lim\limits_{n \to +\infty} \inf a_n \in \mathbb{R} \qquad P^+ := \lim\limits_{n \to +\infty} \sup a_n \in \mathbb{R}$

Costruiamo una sottosuccessione di (a_n) convergente a P^+

$\forall \varepsilon > 0 \qquad a_n < P^+ + \varepsilon \quad$ def n

$\qquad\qquad a_n > P^+ - \varepsilon \quad$ def n

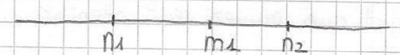


(16.2.1) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n}_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} \ n > \bar{n}_\varepsilon \ a_n < P^+ + \varepsilon$

(16.2.2) $\forall \varepsilon > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists m \in \mathbb{N} \ m > n \ a_m > P^+ - \varepsilon$

$\boxed{\varepsilon = 1}$ ho $a_n < P^+ + \varepsilon^1 \quad \forall n > \bar{n}_1$

$\exists m_1 > n_1 : \quad a_m > P^+ - 1$



Inoltre $a_{m_1} < P^+ + 1 \quad \to \quad |a_{m_1} - P^+| < 1$

$\boxed{\varepsilon = 1/2}$ ho $\exists n_2 \in \mathbb{N} \quad a_n < P^+ + \frac{1}{2} \quad \forall n > n_2$

$\exists n_2 > m_1 \quad a_{m_2} > P^+ - \frac{1}{2} \quad \to |a_{m_2} - P^+| < \frac{1}{2}$

alessiadonati00@gmail.com

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Ripetendo il ragionamento con $\varepsilon = 1/k$ con $k \in \mathbb{N}$, mi costruisco quanto segue: una successione (m_k) di numeri naturali crescente:

$$|a_{m_k} - \ell^+| < \frac{1}{k} \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

Ne segue $\lim_{k \to +\infty} a_{m_k} = \ell^+$

a_{m_k} è la sottosuccessione che cercavo ∎

DIM

B.W ① • Bisezione : induzione, succ. monotone convergono

② • LIN inf, LIN sup : inf, sup, elemento separatore

TEOREMA DI CESARO Sia (a_n) una succ. reale $a_n \to \ell \in [-\infty; +\infty]$

Allora detto $M_n = \frac{1}{n}(a_1 + \dots a_n)$ media si ha $M_n \to \ell$,

Il viceversa è falso: considero $a_n = (-1)^n$ $M_n = \begin{cases} -1/n & n \text{ è dispari} \\ 0 & n \text{ è pari} \end{cases}$

il $\lim_{n \to +\infty} M_n = 0$ Ma (a_n) NON converge

Se so che la mia successione ~~diverge~~ converge, allora anche la media ~~diverge~~ converge

DIM Vale in generale la catena di disuguaglianze:

$$\liminf_{n \to +\infty} a_n \leq \liminf_{n \to +\infty} M_n \leq \underbrace{\limsup_{n \to +\infty} M_n}_{\text{sempre vero}} \leq \limsup_{n \to +\infty} a_n$$

se vera la DIM è conclusa

se $\exists \lim_{n \to +\infty} a_n$ $\lim_{n \to +\infty} a_n = \liminf_{n \to +\infty} a_n = \limsup_{n \to +\infty} a_n$

La disuguaglianza è tutta uguale, per il TEO dei carabinieri

Si tratta di dimostrare gli altri $\leq$

- $\limsup M_n \leq \underset{\ell^+}{\underset{\parallel}{\limsup a_n}}$ Facciamo $\ell^+ \in \mathbb{R}$, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \bar{n}_\varepsilon \in \mathbb{N}$: $a_n < \ell^+ + \varepsilon$ def
  $a_n > \ell^+ - \varepsilon$ freq

$\forall m \in \mathbb{N}$, $m > \bar{n}_\varepsilon$ si ha $a_m < \ell^+ + \varepsilon$

$$M_m = \frac{1}{m}(1 + \dots + a_m)$$
$$= 1/m(a_1 + \dots + a_{\bar{n}_\varepsilon} + a_{\bar{n}_\varepsilon + 1} + \dots + a_m)$$
$$= 1/m(a_1 + \dots + a_{\bar{n}_\varepsilon}) + \frac{1}{m}(a_{\bar{n}_\varepsilon + 1} + \dots + a_m)$$
$$= 1/m(a_1 + \dots + a_{\bar{n}_\varepsilon}) + 1/m(m - (\bar{n}_\varepsilon + 1))(\ell^+ + \varepsilon)$$

$\limsup_{m \to +\infty} M_m \leq 0 + (\ell^+ + \varepsilon)(1) \to \forall \varepsilon > 0 \ \limsup_{m \to +\infty} M_m \leq \ell^+ + \varepsilon$

$\varepsilon = 1/k$ e facendo $\lim_{n \to +\infty}$

alessiadonati00@gmail.com

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Definizione 16.9.1 Successioni di Cauchy

Sia (a_n) una succ. di n. reali o complessi
Si dice che (a_n) è di Cauchy se

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n}_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall m, n \in \mathbb{N} \quad m > \bar{n}_\varepsilon, \ n > \bar{n}_\varepsilon$ si ha $|a_n - a_m| < \varepsilon$

In tale definizione NON appare un evidente limite.
Cioè è una def. che coinvolge solo gli a_n, non c'è ℓ^+, ℓ^-, ℓ "estremi"

equivale a $\lim_{(n,m) \to (+\infty, +\infty)} (a_n - a_m) = 0$

TEOREMA di completezza di $\mathbb{R}$ (16.10.1)

Sia (a_n) una succ di n. reali o complessi

(i) Se (a_n) è convergente a un numero reale (o complesso) allora (a_n) è di Cauchy

(ii) Se (a_n) è di Cauchy allora (a_n) converge ad un numero reale (o complesso)

DIM (i) Se $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$ $(o\ \mathbb{C})$ (uso la disuguaglianza triangolare)
allora $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n}_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} \ n > \bar{n}_\varepsilon$
si ha $|a_n - \ell| < \varepsilon$

Fisso $\varepsilon > 0$; trovo $\bar{n}_\varepsilon$; prendo $m, n \in \mathbb{N}$ $m > \bar{n}_\varepsilon$ $n > \bar{n}_\varepsilon$:

$$|a_n - a_m| = |a_n - \ell + \ell - a_m| \leq |a_n - \ell| + |\ell - a_m| < 2\varepsilon$$

cioè $|a_n - a_m| < 2\varepsilon$

(ii) Consideriamo (16.9.1) con $\varepsilon = 1$: $\exists \bar{n}_1 \in \mathbb{N} \ \forall n, m \in \mathbb{N}$

$n > \bar{n}_1, m > \bar{n}_1 \quad |a_n - a_m| < 1$

In particolare $m = \bar{n}_1 + 1$ ho $|a_n - a_{\bar{n}_1+1}| < 1$
Cioè:
$\exists \bar{n}_1 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} \quad n > \bar{n}_1$

$a_{\bar{n}_1+1}$ $\quad$ $\text{dist}(a_n, a_{\bar{n}_1+1}) < 1$

a_n, $n > \bar{n}_1$ $\quad$ $a_{\bar{n}_1}+1$ $\quad \Rightarrow (a_n)$ è def. limitata $\Rightarrow$ (a_n) è limitata

$a_{\bar{n}_1 - 1}$

Dunque da B.W. $\exists (n_k)$ sottosuccessione

$$a_{n_k} \xrightarrow{k \to +\infty} \ell$$

Ricapitolando $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n}_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n, m \in \mathbb{N}, \ n > \bar{n}_\varepsilon \ m > \bar{n}_\varepsilon \ |a_n - a_m| < \varepsilon$ Cauchy

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{k}_\varepsilon \in \mathbb{N} \ \forall k \in \mathbb{N}, \ k > \bar{k}_\varepsilon \ |a_{n_k} - \ell| < \varepsilon$ sottosucc.

Devo dim. che $a_n \to \ell$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \hat{n}_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} \ n > \hat{n}_\varepsilon \ |a_n - \ell| < \varepsilon$

$$|a_n - \ell| = |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - \ell| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - \ell|$$

Fisso $\varepsilon > 0$; prendo $\bar{n}_\varepsilon$; se $\forall n \in \mathbb{N} \ n > \bar{n}_\varepsilon$, e se $k \in \mathbb{N}$ $n_k > \bar{n}_\varepsilon$ ho $|a_n - a_{n_k}| < \varepsilon$

Ma inoltre $k > \bar{k}_\varepsilon$ $|a_{n_k} - \ell| < \varepsilon$

In definitiva $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n}_\varepsilon \in \mathbb{N} \ \forall n > \bar{n}_\varepsilon \ |a_n - \ell| < 2\varepsilon$ cioè $a_n \xrightarrow{n \to +\infty} \ell$

Anche $\hat{n}_\varepsilon = \bar{n}_\varepsilon$ ∎

alessiadonati00@gmail.com

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

(ii)② Ipotesi: (a_n) è di Cauchy

$\forall \varepsilon>0\ \exists \bar{n}_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad a_m-\varepsilon < a_n < a_m+\varepsilon \qquad \forall n,m\in\mathbb{N}\ n>\bar{n}_\varepsilon,\ m>\bar{n}_\varepsilon$

$$\Downarrow$$

$$a_m-\varepsilon \leq \underset{n>\bar{n}_\varepsilon}{\mathrm{Inf}}(a_n) \underset{\text{ovvio}}{\leq} \underset{n>\bar{n}_\varepsilon}{\mathrm{Sup}}(a_n) \leq a_m+\varepsilon$$

e
$$a_m-\varepsilon \leq \underset{k>\bar{n}_\varepsilon}{\mathrm{Inf}}(a_k) \leq \underset{k>\bar{n}_\varepsilon}{\mathrm{Sup}}(a_k) \leq a_m+\varepsilon$$

$\varepsilon = 1/h \quad h\in\mathbb{N} \quad a_m-\frac{1}{h} \leq \underset{k>\bar{n}_{\frac{1}{h}}}{\mathrm{Inf}}(a_k) \leq \underset{k>\bar{n}_{\frac{1}{h}}}{\mathrm{Sup}}(a_k) \leq a_m+\frac{1}{h}$

$$\downarrow$$

$$a_m-\frac{1}{h} \leq \underset{h}{\mathrm{Sup}}\ \underset{k>\bar{n}_{\frac{1}{h}}}{\mathrm{Inf}}(a_k) \leq \underset{h}{\mathrm{Inf}}\ \underset{k>\bar{n}_{\frac{1}{h}}}{\sup}(a_k) \leq a_m+\frac{1}{h}$$

$$\downarrow$$

$$0 \leq \lim_n \sup a_n - \lim_h \inf a_n \leq 2h^{-1}$$

$\lim_n \sup a_n = \lim_n \inf a_n \Rightarrow \exists \lim_n a_n\ (\in\mathbb{R},\ (a_n)$ è limitato$)$ ▨

TEOREMA (18.10.1) Legame generale tra compatto e chiuso

Sia $K\subseteq\mathbb{R}$, allora sono equivalenti:
(i) K seq. compatto
(ii) K limitato e seq. chiuso

DIM (i)⇒(ii) K è cpt ⇒ K è chiuso
Dobbiamo vedere che K è limitato.

Se per assurdo K non è limitato, allora K non è limitato inferiormente o superiormente.

- Dunque $\forall \lambda>0,\ \exists x\in E \quad x>\lambda$

Prendendo $\lambda = n\in\mathbb{N}\quad \exists X_n\in E \quad X_n>n \Rightarrow$ ho costruito una succesione (X_n) di punti di E convergente a $+\infty$

Dunque K non può essere seq. compatto, perché se lo fosse, (X_n) ammetterebbe una sottosuccessione convergente ad un pnt di K

Ma allora anche tale sottosuccessione dovrebbe convergere a $+\infty$, dunque $+\infty\in K$ ASSURDO

(ii)⇒(i) Sia K chiuso e limitato
Sia $(X_n)\subset K$

devo dim che $\exists (X_{n_p})$ convergente a un punto di K

Dal fatto che K è limitato, $\exists a,b\in\mathbb{R},\ a<b \quad K\subset[a,b]$

Dunque $(X_n)\subset K\subset[a,b]$

Dal Teo di B.W. $\exists (X_{n_p}),\ X_{n_p}\to p\in[a,b]$

Resta da dim. $p\in K$

Ma $(X_{n_p})\subset K$ e $X_{n_p}\to p$ e K è chiuso $\Rightarrow p\in K$ ▨

alessiadonati00@gmail.com

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari