www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Esami scritti di Analisi Matematica I 2014 - 2015

© 2017 Politecnico di Torino

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

1 Esame del 30 gennaio 2015

Esercizio 1. Sia data la funzione

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + \log|x+3|.$$

1. Determinarne il dominio, i limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti..
2. Calcolarne la derivata di f, determinarne gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di massimo e di minimo.
3. Determinarne gli eventuali punti di flesso e gli intervalli di concavità e convessità.
4. Disegnarne un grafico qualitativo.
5. Dire se la funzione $g(x) = \arctan f(x)$ è prolungabile per continuità in $x = -3$, motivando la risposta.

Esercizio 2.

$a)$ Enunciare il Teorema di Rolle.

$b)$ Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2, tale che l'equazione $f(x) = 5x + 13$ abbia almeno tre soluzioni reali distinte. Dimostrare che esiste almeno un punto $c \in \mathbb{R}$ tale che $f''(c) = 0$.

$c)$ Illustrare questo risultato con un grafico qualitativo.

© 2017 Politecnico di Torino

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

SVOLGIMENTO

Esercizio 1.

1. Imponendo che l'argomento del logaritmo sia positivo, si ottiene dom$f = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$. Agli estremi del dominio si ha che:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}x^2 + x + \log|x+3|\right) = +\infty\,;$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}x^2 + x + \log|x+3|\right) = +\infty\,;$$

$$\lim_{x\to-3^+} f(x) = \lim_{x\to-3^-} f(x) = -\infty.$$

Quindi, la retta $x = -3$ è un asintoto verticale (completo) della funzione.

Poiché $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ per $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$, la funzione non ammette asintoti obliqui.

2. Per ogni $x \neq -3$ si ha che

$$f'(x) = x + 1 + \frac{1}{x+3} = \frac{(x+2)^2}{x+3}.$$

Ne segue che $f'(x) > 0 \iff x > -3$ e $f'(x) = 0 \iff x = -2$, da cui si conclude che f decresce strettamente in $(-\infty, -3)$ e cresce strettamente in $(-3, +\infty)$.

I punti di estremo di una funzione continua vanno cercati tra i punti stazionari, gli eventuali punti di non derivabilità della funzione e gli estremi del dominio. L'unico punto stazionario di f è $x = -2$ e non esistono punti di non derivabilità. Dal segno della derivata prima si deduce che $x = -2$ non è un punto di estremo. Inoltre, dal punto 1., la funzione è inferiormente e superiormente illimitata, ne concludiamo che f non ammette punti di massimo/minimo relativi o assoluti.

3. Per ogni $x \neq -3$ si ha che

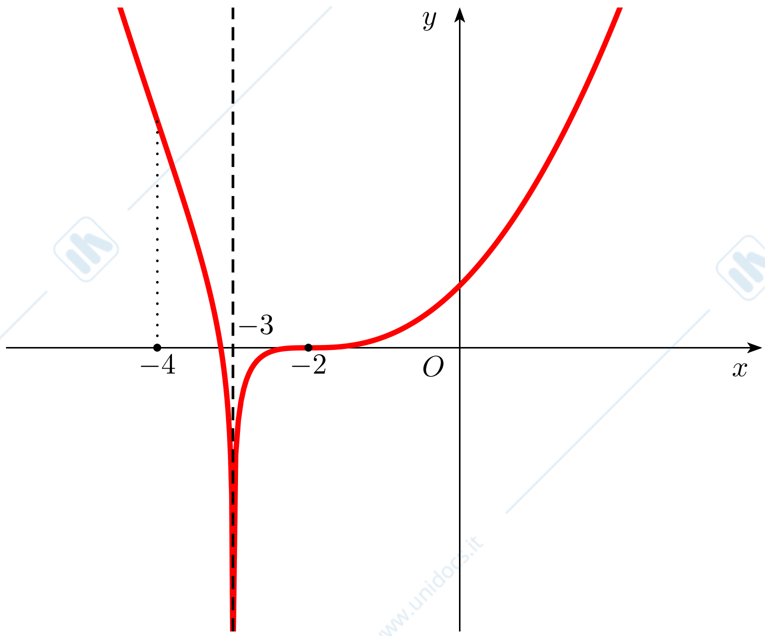
$$f''(x) = \frac{(x+2)(x+4)}{(x+3)^2}.$$

Ne segue che $f''(x) \geq 0 \iff x \leq -4$ o $x \geq -2$, e quindi f è convessa in $(-\infty, -4]$ e $[-2, +\infty)$, concava in $[-4, -3)$ e $(-3, -2]$. In particolare, $x = -4$ è un punto di flesso discendente e $x = -2$ è un punto di flesso a tangente orizzontale ascendente.

© 2017 Politecnico di Torino

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari



4. Essendo f continua in $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$, g è continua in $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$. Poiché $\lim_{x \to -3} g(x) = -\dfrac{\pi}{2}$, si ha che $x = -3$ è un punto di discontinuità eliminabile per g. Quindi, g risulta essere prolungabile per continuità in $x = -3$ e il prolungamento per continuità di g è definito come segue

$$\widetilde{g}(x) := \begin{cases} g(x) & \text{se } x \neq -3 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se } x = -3\,. \end{cases}$$

Esercizio 2.

a) **Teorema di Rolle.** Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione. Supponiamo che:

a) f sia continua in $[a, b]$;

b) f sia derivabile in (a, b);

c) $f(a) = f(b)$.

Allora esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che $f'(x_0) = 0$.

b) Consideriamo la funzione ausiliaria $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $h(x) := f(x) - 5x - 13$. Per ipotesi, h è di classe C^2 ed esistono $x_1 < x_2 < x_3$ tali che $h(x_1) = h(x_2) = h(x_3) = 0$. Applicando il Teorema di Rolle ad h negli intervalli $[x_1, x_2]$ e $[x_2, x_3]$, si deduce che esistono $a \in (x_1, x_2)$ e $b \in (x_2, x_3)$ tali che $h'(a) = h'(b) = 0$.

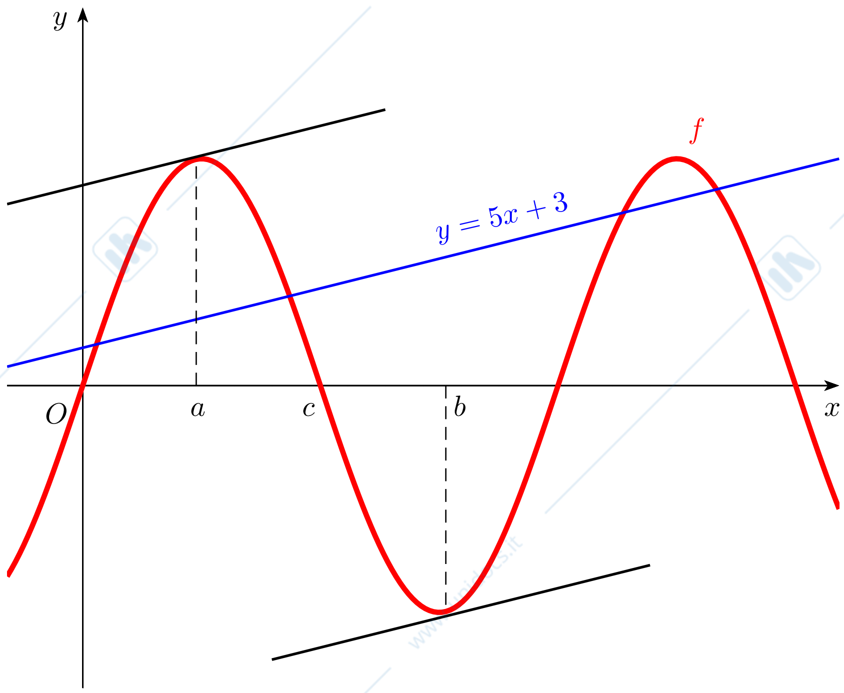
Possiamo allora applicare il Teorema di Rolle alla funzione h' che è di classe C^1 sull'intervallo $[a, b]$, da cui segue che esiste $c \in (a, b)$ tale che $h''(c) = 0$. Essendo $h''(x) = f''(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, segue che $f''(c) = 0$.

c) Con le stesse notazioni del punto *b*), si ha $h'(x) = f'(x) - 5$. Quindi, $f'(a) = f'(b) = 5$, dove 5 è anche il coefficiente angolare della retta $y = 5x + 13$. Per l'interpretazione geometrica, si veda il grafico sotto.

© 2017 Politecnico di Torino

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari



© 2017 Politecnico di Torino

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

2 Esame del 13 febbraio 2015 - I^o turno

Esercizio 1. Sia

$$f(x) = e^{-|(x-4)(x+1)|}.$$

1. Determinare il dominio di f e i limiti agli estremi del dominio.
2. Calcolare la derivata di f, specificando gli eventuali punti di non derivabilità.
3. Determinarne gli intervalli di monotonia di f e i suoi punti di massimo e di minimo.
4. Disegnare un grafico qualitativo di f.
5. Dire quante soluzioni ha l'equazione

$$e^{-|(x-4)(x+1)|} = e^{-25/4}.$$

Esercizio 2. Sia

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{10} - \dfrac{3}{1+x^2} & \text{se } x \le 3 \\ 2(x\log 3 - x\log x) & \text{se } x > 3. \end{cases}$$

1. Calcolare $\displaystyle\int_0^6 g(x)\,dx$.
2. Dire se esiste $c \in [0,6]$ tale che $g(c)$ è uguale alla media integrale di g su $[0,6]$. Giustificarne la risposta.

© 2017 Politecnico di Torino

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari
www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari
www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

SVOLGIMENTO

Esercizio 1. Consideriamo la funzione

$$f(x) = e^{-|(x-4)(x+1)|}.$$

1. Risulta che $f = h \circ g$, dove

$$g(x) = |(x-4)(x+1)|, \qquad h(y) = e^{-y}.$$

Poiché g e h sono definite su $\mathbb{R}$, anche f è definita su $\mathbb{R}$. Quindi $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$. Inoltre, essendo g e h continue su $\mathbb{R}$, anche f lo è. Ne segue che f non ha asintoti verticali.

Osserviamo che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0.$$

Quindi la retta $y = 0$ è un asintoto orizzontale completo per f.

2. La funzione h è derivabile ovunque mentre la funzione g è certamente derivabile in ogni $x \in \mathbb{R}$, $x \neq -1, 4$. Ne segue che f è derivabile in ogni $x \in \mathbb{R}$, $x \neq -1, 4$. Essendo

$$f(x) = e^{-|(x-4)(x+1)|} = \begin{cases} e^{-(x-4)(x+1)} & \text{se } x \leq -1 \ \vee \ x \geq 4 \\ e^{(x-4)(x+1)} & \text{se } -1 < x < 4, \end{cases}$$

si ha che

$$f'(x) = \begin{cases} (3-2x)\, e^{-(x-4)(x+1)} & \text{se } x < -1 \ \vee \ x > 4 \\ (2x-3)\, e^{(x-4)(x+1)} & \text{se } -1 < x < 4. \end{cases}$$

Esaminiamo la derivabilità di f in $x = -1$ e $x = 4$. Si ha che

$$\lim_{x\to-1^-} f'(x) = 5 \neq \lim_{x\to-1^+} f'(x) = -5,$$

$$\lim_{x\to4^-} f'(x) = 5 \neq \lim_{x\to4^+} f'(x) = -5.$$

Ne segue che i punti $x = -1$ e $x = 4$ sono punti di non derivabilità per f e in particolare sono punti angolosi.

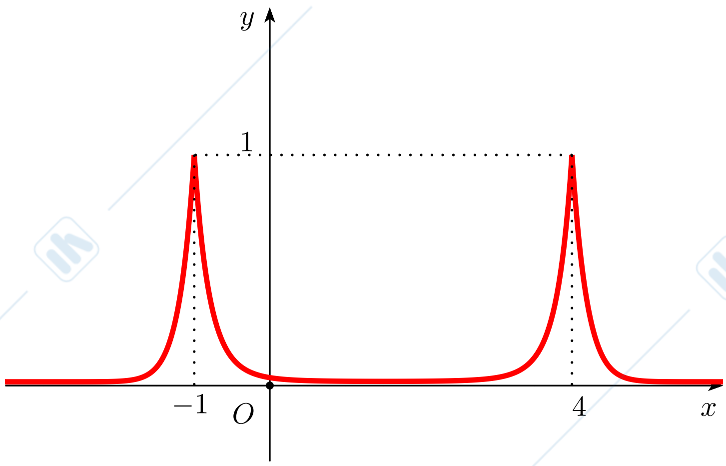
3. Risulta che $f'(x) = 0$ se e solo se $x = \frac{3}{2}$; $f'(x) > 0$ per $x < -1$ e $\frac{3}{2} < x < 4$, e $f'(x) < 0$ per $-1 < x < \frac{3}{2}$ e $x > 4$. Quindi f è strettamente crescente negli intervalli $(-\infty, -1]$ e $\left[\frac{3}{2}, 4\right]$, ed è strettamente decrescente negli intervalli $\left[-1, \frac{3}{2}\right]$ e $[4, +\infty)$. Il punto $x = \frac{3}{2}$ è di minimo locale per f. Inoltre i punti $x = -1$ e $x = -4$ sono entrambi di massimo assoluto per f e il massimo assoluto di f è $f(-1) = f(4) = 1$.

4. Il grafico qualitativo di f è:

© 2017 Politecnico di Torino

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari



5. Osserviamo che $\mathrm{im}(f) = (0, 1]$. Poiché $0 < e^{-25/4} < 1$, l'equazione $e^{-|(x-4)(x+1)|} = e^{-25/4}$ ha 4 soluzioni.

Esercizio 2. Consideriamo la funzione

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{10} - \dfrac{3}{1+x^2} & \text{se } x \le 3 \\ 2(x \log 3 - x \log x) & \text{se } x > 3. \end{cases}$$

1. Si ha che

$$\int_0^6 g(x)\,dx = \int_0^3 \left(\frac{3}{10} - \frac{3}{1+x^2}\right) dx + \int_3^6 2(x \log 3 - x \log x)\,dx =$$

$$= \left[\frac{3}{10}x - 3\arctan x\right]_0^3 + \int_3^6 2x \log 3\,dx - \int_3^6 2x \log x\,dx =$$

integrando per parti l'ultimo integrale si ottiene

$$= \frac{9}{10} - 3\arctan 3 + \log 3\left[x^2\right]_3^6 - \left[x^2 \log x\right]_3^6 + \int_3^6 x\,dx =$$

$$= \frac{9}{10} - 3\arctan 3 + 27\log 3 - 36\log 6 + 9\log 3 + \frac{27}{2} =$$

$$= \frac{72}{5} - 3\arctan 3 - 36\log 2.$$

2. La funzione g è continua in ogni $x \neq 3$. Controlliamo in $x = 3$. Si ha che

$$g(3) = \lim_{x\to 3^-} g(x) = 0 = \lim_{x\to 3^+} g(x).$$

Quindi g è continua anche in $x = 3$. In particolare g è continua in $[0, 6]$. Per il Teorema della media integrale esiste $c \in [0, 6]$ tale che $g(c)$ è uguale alla media integrale di g su $[0, 6]$.

---

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

3 Esame del 13 febbraio 2015 - II^o turno

Esercizio 1. Sia

$$f(x) = |\log(x-2) - \log^2(x-2)|.$$

1. Determinare il dominio di f e i limiti agli estremi del dominio.
2. Calcolare la derivata di f, specificando gli eventuali punti di non derivabilità.
3. Determinare gli intervalli di monotonia di f e i suoi punti di massimo e di minimo.
4. Disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 (Variante 1).

a) Sia $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Scrivere la definizione di convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} f(x)\ dx.$$

b) Dimostrare che se $f(x) \geq 0$ su $[0, +\infty)$, l'integrale $\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$ non può essere indeterminato.

c) Studiare il comportamento dell'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2 + \sin x}{x^2 + 1}\, dx.$$

Esercizio 2 (Variante 2). Sia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$.

1. Scrivere la definizione di convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^1 f(x)\, dx.$$

2. Dimostrare che se $f(x) \geq 0$ su $(0, 1)$, allora l'integrale $\int_0^1 f(x)\, dx$ non può essere indeterminato.
3. Studiare il comportamento dell'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{\sin(x-1)}{(x-1)^2}\, dx.$$

© 2017 Politecnico di Torino

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

SVOLGIMENTO

Esercizio 1.

1. Posto $g(x) = \log(x-2)$ per $x \in (2, +\infty)$ e $h(y) = |y - y^2|$ per $y \in \mathbb{R}$, risulta $f(x) = h(g(x))$. In particolare, il dominio di f coincide con quello di g; ne segue che dom $f = (2, +\infty)$. Inoltre
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{y\to -\infty} h(y) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{y\to +\infty} h(y) = +\infty.$$
Dunque $x = 2$ è un asintoto verticale destro mentre essendo f, per $x \to +\infty$, un infinito di ordine minore di 1 rispetto a x, non esiste asintoto obliquo per $x \to +\infty$.

2. Osserviamo che f è continua perché composizione di funzioni continue. Si ha che
$$f(x) = \begin{cases} \log(x-2) - \log^2(x-2) & 3 \le x \le 2+e \\ \log^2(x-2) - \log(x-2) & 2 < x < 3 \text{ o } x > 2+e. \end{cases}$$
Per ogni $x \in \mathrm{dom} f \setminus \{3, 2+e\}$ si ha che
$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - 2\log(x-2)}{x-2} & 3 < x < 2+e \\ \dfrac{2\log(x-2) - 1}{x-2} & 2 < x < 3 \vee x > 2+e. \end{cases}$$
Poiché $\lim_{x\to 3^-} f'(x) = -1 \neq \lim_{x\to 3^+} f'(x) = 1$ e $\lim_{x\to (2+e)^-} f'(x) = \dfrac{-1}{e} \neq \lim_{x\to (2+e)^+} f'(x) = \dfrac{1}{e}$, si conclude che $x = 3$ e $x = 2+e$ sono punti angolosi per f.

3. Si ha che $f'(x) = 0 \iff x = 2 + \sqrt{e}$, mentre $f'(x) > 0 \iff 3 < x < 2 + \sqrt{e} \vee x > 2+e$. Quindi $x = 2 + \sqrt{e}$ è l'unico punto stazionario per f; inoltre f è strettamente crescente in $[3, 2+\sqrt{e}]$ e $[2+e, +\infty)$, f è strettamente decrescente in $(2, 3]$ e $[2+\sqrt{e}, 2+e]$.

   I punti di estremo di una funzione continua vanno cercati tra i punti stazionari, gli eventuali punti di non derivabilità della funzione e gli estremi del dominio.

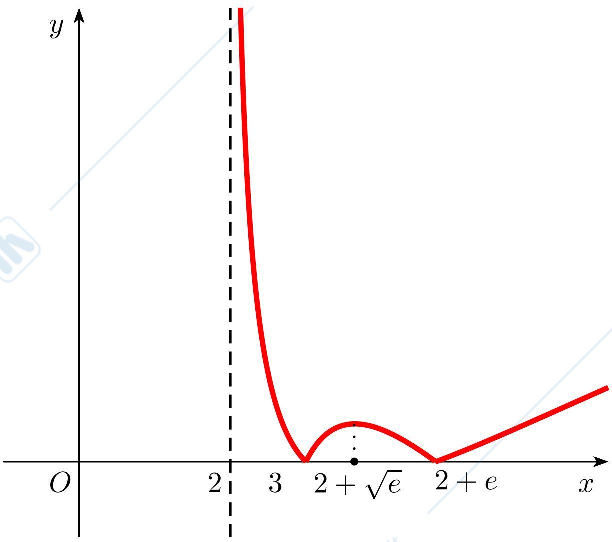
   Per quanto sopra osservato, si conclude che $x = 3$ e $x = 2+e$ sono punti di minimo relativo mentre $x = 2 + \sqrt{e}$ è un punto di massimo relativo. Dal momento che f è superiormente illimitata non esiste massimo assoluto, essendo $f(x) \ge 0$ per ogni $x \in \mathrm{dom} f$ e $f(3) = f(2+e) = 0$, se ne conclude che $x = 3$ e $x = 2+e$ sono punti di minimo assoluto.

4. Di seguito viene riportato un grafico qualitativo di f.

© 2017 Politecnico di Torino

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari



Esercizio 2 (Variante 1).

a) Per definizione l'integrale improprio $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge se esiste finito il limite

$$\lim_{c\to+\infty}\int_0^c f(x)\,dx.$$

b) Consideriamo la funzione $F:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definita da

$$F(c)=\int_0^c f(x)\,dx.$$

Essendo $f(x)\geq 0$ per ogni $x\geq 0$, risulta che F è crescente. Infatti, se $0\leq c_1<c_2$, allora

$$F(c_2)=\int_0^{c_2} f(x)\,dx=\underbrace{\int_0^{c_1} f(x)\,dx}_{=F(c_1)}+\underbrace{\int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx}_{\geq 0}\geq F(c_1)\geq 0.$$

Per il Teorema sui limiti delle funzioni monotone esiste $\lim_{c\to+\infty} F(c)$ che quindi è un numero reale ≥ 0 oppure è $+\infty$. Ne segue che l'integrale improprio di f tra a e $+\infty$ converge o diverge positivamente.

c) La funzione $f(x)=\dfrac{x^2+\sin x}{x^2+1}$ è continua su $[0,+\infty)$ e quindi è localmente integrabile su $[0,+\infty)$.

Osserviamo che

$$\forall x\geq 0:\qquad \frac{x^2-1}{x^2+1}\leq\frac{x^2+\sin x}{x^2+1}$$

e

$$\forall x\geq 1:\qquad \frac{x^2-1}{x^2+1}\geq 0.$$

Inoltre $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-1}{x^2+1}=1$. Ne segue che $\int_0^{\infty}\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\,dx$ diverge, e per il criterio del confronto anche $\int_0^{\infty}\dfrac{x^2+\sin x}{x^2+1}\,dx$ diverge.

© 2017 Politecnico di Torino

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Esercizio 2 (Variante 2). Consideriamo la funzione

1. Per definizione l'integrale improprio $\int_0^1 f(x)\,dx$ converge se esiste finito il limite
$$\lim_{c\to 1^-} \int_0^c f(x)\,dx.$$

2. La funzione $F : [0,1) \to \mathbb{R}$ definita da
$$F(c) = \int_0^c f(x)\,dx$$
è la funzione integrale di f sull'intervallo $[0,1)$. Poiché $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in [0,1)$, F è monotona crescente su $[0,1)$. Per il Teorema sui limiti delle funzioni monotone, esiste $\lim_{c\to 1^-} F(c)$. Perciò l'integrale improprio $\int_0^1 f(x)\,dx$ non può essere indeterminato.

3. Se $x \in [0,1)$, allora $x-1 \in [-1,0)$. Dunque $\dfrac{\sin(x-1)}{(x-1)^2} \leq 0$ per ogni $x \in [0,1)$. Quindi l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(x-1)}{(x-1)^2}\,dx$ converge o diverge negativamente.
Poiché la funzione seno è dispari, osserviamo che
$$\frac{\sin(x-1)}{(x-1)^2} = -\frac{\sin(1-x)}{(x-1)^2} \sim -\frac{1}{1-x}, \quad x \to 1^-.$$
Poiché l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1-x}\,dx$ diverge, per il criterio del confronto asintotico anche l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(1-x)}{(1-x)^2}\,dx$ diverge positivamente. Quindi l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(x-1)}{(x-1)^2}\,dx$ diverge negativamente.

© 2017 Politecnico di Torino

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

4 Esame del 17 giugno 2015

Esercizio 1. Sia data la funzione

$$f(x) = x\, e^{\frac{1}{\log 2x}}.$$

a) Determinarne il dominio e i limiti agli estremi del dominio.

b) Determinarne gli intervalli di monotonia e i punti di massimo o minimo.

c) Disegnare un grafico qualitativo di f.

d) Trovare un prolungamento continuo di f su $(-\infty, \frac{1}{2}]$. Dire inoltre se esiste un prolungamento continuo di f a $\mathbb{R}$, motivando la risposta.

Esercizio 2.

a) Date due funzioni a, b definite su $\mathbb{R}$, formulare la definizione di soluzione di un problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = a(t)b(y) \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

b) Calcolare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{t}(3e^{y})\log t \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

© 2017 Politecnico di Torino

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

SVOLGIMENTO

Esercizio 1.

a) $\text{dom} f = (0, 1/2) \cup (1/2, +\infty)$,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0\,, \quad \lim_{x\to(1/2)^-} f(x) = 0\,, \quad \lim_{x\to(1/2)^+} f(x) = +\infty\,, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Non esiste asintoto obliquo a $+\infty$. Infatti, per $x \to +\infty$ si ha che

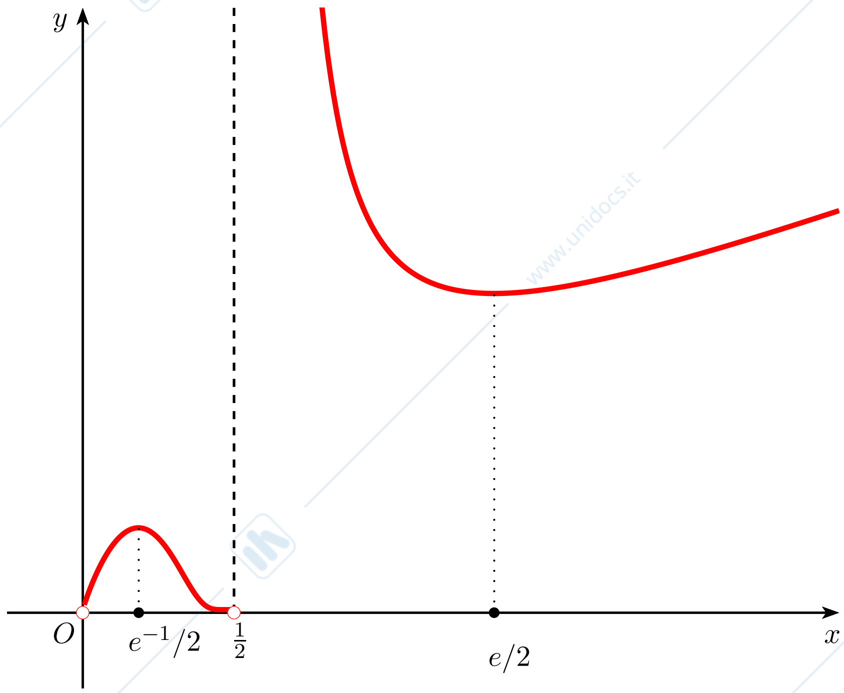
$$f(x) = x\; e^{\frac{1}{\log 2x}} = x\left[1 + \frac{1}{\log 2x} + o\left(\frac{1}{\log 2x}\right)\right] = x + \frac{x}{\log 2x} + o\left(\frac{x}{\log 2x}\right) \neq x + o(1).$$

b) Si ha che

$$f'(x) = e^{\frac{1}{\log 2x}}\left(1 - \frac{1}{(\log 2x)^2}\right).$$

Quindi $f'(x) \geq 0 \iff (\log 2x)^2 - 1 \geq 0 \iff 0 < x \leq e^{-1}/2 \vee x \geq e/2$. Ne segue che f è crescente in $(0, e^{-1}/2]$ e in $[e/2, +\infty)$, è decrescente in $[e^{-1}/2, 1/2)$ e in $(1/2, e/2]$; $x = e^{-1}/2$ è un punto di massimo relativo e $x = e/2$ è un punto di minimo relativo. Non esistono massimi e minimi assoluti perché f è superiormente illimitata e $\inf f = 0$ non è assunto in nessun punto del dominio.

c) Sotto viene riportato un grafico qualitativo di f.



d) Un prolungamento continuo di f su $(-\infty, \frac{1}{2}]$ è

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in (0, 1/2) \\ 0 & x \in (-\infty, 0] \cup \{1/2\}\,. \end{cases}$$

Essendo $\lim_{x\to(1/2)^+} f(x) = +\infty$, non esiste un prolungamento continuo di f a $\mathbb{R}$.

© 2017 Politecnico di Torino

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Esercizio 2.

a) Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo aperto tale che $t_0 \in I$. Diciamo che $y : I \to \mathbb{R}$ è una soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = a(t)b(y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

se y è derivabile in I, per ogni $t \in I$ risulta $y'(t) = a(t)b(y)$ e inoltre $y(t_0) = y_0$.

b) L'equazione è a variabili separabili, cioè della forma $y' = a(t)b(y)$, con $a(t) = \frac{1}{t}\log t$ e $b(y) = 3e^y$.

Poiché $b(y) = 3e^y \neq 0$ per ogni $y \in \mathbb{R}$, l'equazione non ha soluzioni costanti.

Usando il metodo risolutivo per le equazioni a variabili separabili, posto $y = y(t)$ si ha

$$\int e^{-y}\,dy = 3\int \frac{\log t}{t}\,dt \quad \Longleftrightarrow \quad e^{-y} = -\frac{3}{2}\log^2 t + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

da cui segue che

$$y(t) = -\log\left(-\frac{3}{2}\log^2 t + c\right).$$

Imponendo la condizione iniziale $y(1) = 0$ nell'espressione ottenuta sopra si ottiene $c = 1$, e quindi la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(t) = -\log\left(-\frac{3}{2}\log^2 t + 1\right).$$

© 2017 Politecnico di Torino

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

5 Esame del 9 settembre 2015

Esercizio 1. Si consideri la funzione

$$f(x) = e^{2(x-3)^3 \log|x-3|}.$$

1. Determinare il dominio e gli eventuali asintoti di f. Dimostrare che f si può prolungare per continuità in $x = 3$.
2. Indicando d'ora in poi con f la funzione prolungata, calcolarne la derivata prima e studiarne la derivabilità in $x = 3$.
3. Determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di massimo e di minimo di f.
4. Disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2.

a) Scrivere la definizione di derivata di una funzione f in un punto x_0 del suo dominio.

b) La funzione

$$f(x) = \begin{cases} 3(\sin x)^2 \sin \frac{2}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è derivabile in $x = 0$? Motivare la risposta.

c) Una funzione f continua su $\mathbb{R}$, derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e tale che

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) \in \mathbb{R}$$

è derivabile in $x = 0$? Motivare la risposta.

© 2017 Politecnico di Torino

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

SVOLGIMENTO

Esercizio 1.

1. Si ha: $\mathrm{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0\,, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty\,.$$

Dunque $y = 0$ è un asintoto orizzontale sinistro mentre non esistono asintoti obliqui. D'altra parte,

$$\lim_{x\to3^-} f(x) = 1 = \lim_{x\to3^+} f(x)\,,$$

dunque non esistono asintoti verticali e f è prolungabile per continuità in $x = 3$. La funzione prolungata (indicata ancora con f come suggerito dal punto successivo) è

$$f(x) = \begin{cases} e^{2(x-3)^3 \log|x-3|} & \text{se } x \neq 3 \\ 1 & \text{se } x = 3. \end{cases}$$

2. Si ha che, per ogni $x \neq 3$

$$f'(x) = 2(x-3)^2(3\log|x-3| + 1)e^{2(x-3)^3 \log|x-3|}.$$

Dato che f è continua in $x = 3$ e che $\lim_{x\to3} f'(x) = 0$, dal *Teorema del tappabuchi* (corollario del Teorema di de l'Hôpital) segue che f è derivabile in $x = 3$ con $f'(3) = 0$. Quindi

$$f'(x) = \begin{cases} 2(x-3)^2(3\log|x-3| + 1)e^{2(x-3)^3 \log|x-3|} & \text{se } x \neq 3 \\ 0 & \text{se } x = 3. \end{cases}$$

3. Studiamo il segno di f':

$$f'(x) > 0 \iff 3\log|x-3| + 1 > 0 \iff x \in (-\infty, 3 - e^{-1/3}) \cup (3 + e^{-1/3}, +\infty).$$

Perciò f è crescente in $(-\infty, 3-e^{-1/3}]$ e in $[3+e^{-1/3}, +\infty)$, decrescente in $[3-e^{-1/3}, 3+e^{-1/3}]$ (qui si utilizza la continuità di f in $x/3$).

Infine, $x = 3-e^{-1/3}$ è un punto di massimo relativo ma non assoluto perché f è superiormente illimitata, mentre $x = 3 + e^{-1/3}$ è un punto di minimo relativo ma non assoluto perché $\inf f = 0 < f(3 + e^{-1/3})$. In particolare, non esistono punti di massimo o minimo assoluti.

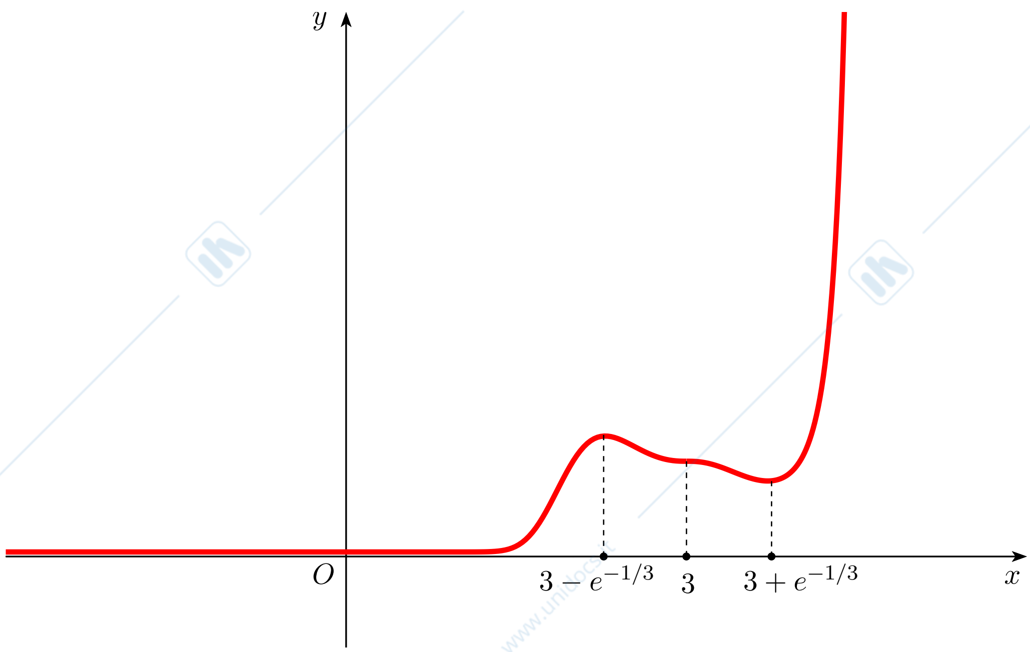
Il punto $x = 3$ è un punto di flesso discendente a tangente orizzontale.

4. Di seguito viene riportato un grafico qualitativo di f.

© 2017 Politecnico di Torino

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari



Esercizio 2.

a) Siano f una funzione reale e x_0 un punto interno a dom$f$.

Diciamo che f è derivabile in x_0 se esiste finito il limite

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

e in tal caso denotiamo questo limite con $f'(x_0)$ e lo chiamiamo derivata (prima) di f in x_0.

In modo equivalente, diciamo che f è derivabile in x_0 se esistono $l \in \mathbb{R}$ e un intorno $B(x_0)$ di x_0 contenuto in dom f tale che

$$\forall x \in B(x_0): \quad f(x) = f(x_0) + l(x-x_0) + o(x-x_0), \qquad x \to x_0.$$

b) Per definizione

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{3\sin^2 x \sin\frac{2}{x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^2 \sin\frac{2}{x}}{x} = \lim_{x\to 0} 3x \sin\frac{2}{x} = 0.$$

Quindi f è derivabile in $x=0$ con $f'(0)=0$.

c) L'enunciato proposto è esattamente quanto asserisce il *Teorema del tappabuchi* (corollario del Teorema di De L'Hôpital); si veda il libro di teoria per la dimostrazione.

© 2017 Politecnico di Torino

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari