

**Limiti****Derivate****Integrali**

**Teorema unicità del limite:** Se il limite di una funzione in un punto **esiste, esso è unico.** **DIM:** Supponiamo per assurdo che  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1$  e  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_2$ . Sia  $l_1 < l_2$  e scegliamo  $\varepsilon < (l_2 - l_1)/2$ . Dalla definizione di limite abbiamo che  $|f(x) - l_1| < \varepsilon \forall x \in I(x_0, r_1)$  e  $|f(x) - l_2| < \varepsilon \forall x \in I(x_0, r_2)$ .  $\{ l_1 - \varepsilon < f(x) < l_1 + \varepsilon; l_2 - \varepsilon < f(x) < l_2 + \varepsilon; l_2 - \varepsilon < f(x) < l_1 + \varepsilon; l_2 - \varepsilon < l_1 + \varepsilon \Rightarrow l_2 - l_1 < 2\varepsilon \Rightarrow \varepsilon > (l_2 - l_1)/2$ . Se  $\varepsilon$  è prima  $<$  poi  $>$  non è possibile. Poiché l'assurdo è nato dall'aver supposto l'esistenza di più limiti, **il limite è unico.**

**Teorema della permanenza del segno:** Se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \neq 0$ , allora la funzione è localmente concorde con il limite. **DIM:** Se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ , allora  $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon \forall x \in I(x_0, r)$ . Scegliamo  $\varepsilon = |l|$  ottenendo  $l - |l| < f(x) < l + |l|$ . Se  $l > 0$  allora  $0 < f(x) < 2l$  e la funzione è positiva. Se invece  $l < 0$ ,  $2l < f(x) < 0$  e

**Teorema del confronto (carabinieri):** Se  $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$ , allora anche  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ . **DIM:** Dalla definizione di limite si ha che  $|h(x) - l| < \varepsilon$  e  $|g(x) - l| < \varepsilon$ . Se consideriamo l'intorno intersezione possiamo scrivere  $l - \varepsilon < h(x) \leq f(x) \leq g(x) < l + \varepsilon$  e quindi si ha che  $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$ . Pertanto  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ .

**Teorema degli zeri (Bolzano):** Sia  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Se  $f(a) \cdot f(b) < 0$ , allora esiste almeno un  $x_0 \in (a, b)$  tale che  $f(x_0) = 0$ . **DIM:** Supponiamo  $f(a) < 0$  e  $f(b) > 0$  e per assurdo che  $f(x) \neq 0 \forall x \in [a, b]$  e consideriamo l'insieme  $A = \{x \in [a, b]: f(x) < 0\}$ . Sicuramente  $A \neq \emptyset$  poiché contiene almeno  $a$ . Inoltre, è limitato superiormente e ci sarà un  $\sup A = x_0 < b$ . Certamente  $f(x_0) \neq 0$  poiché  $f(x) \neq 0 \forall x \in [a, b]$ . Se  $f(x_0) < 0$ , per la permanenza del segno  $\exists r > 0$  t. c.  $\forall x \in I(x_0, r)$  si ha  $f(x) < 0$ . Quindi in  $(x_0, x_0 + r)$  si ha  $f(x) < 0$  e vuol dire che  $x_0$  non è un maggiorante. Se  $f(x_0) > 0$ , sempre per la permanenza del segno, in  $(x_0 - r, x_0)$  si ha  $f(x) > 0$  e vuol dire che  $x_0$  non è il minimo dei maggioranti. È assurdo che  $f(x)$  sia prima  $<$  poi  $>$ .

**Teorema dei valori intermedi (Bolzano):** Sia  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua con  $f(a) < f(b)$ . Allora la funzione assume tutti i valori compresi tra  $f(a)$  e  $f(b)$  cioè è una funzione suriettiva  $[f(a), f(b)]$ . **DIM:** Consideriamo un  $y \in (f(a), f(b))$ . Consideriamo la funzione continua  $g(x) = f(x) - y$  osservando che  $g(a) = f(a) - y < 0$  e  $g(b) = f(b) - y > 0$ . Per il teorema degli zeri esiste  $x_0 \in (a, b)$  tale che  $g(x_0) = f(x_0) - y = 0$  e quindi  $y = f(x_0)$ . Graficamente significa che la funzione non si interrompe mai.

**Funzione Continua:** Una funzione  $f(x)$  è continua in un punto  $x_0$  se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  se  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0$  t. c.  $\forall x \in A$ , con  $|x - x_0| < \delta$ , risulti  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ .

**Teorema di Weierstrass:** Una funzione continua in un insieme chiuso e limitato ha **massimo e minimo.**

**Dim:** Se  $f$  è continua in  $X$  chiuso e limitato, allora  $f(X)$  è un insieme chiuso e limitato e come tale è dotato di minimo e massimo.

**Teorema Bolzano-Weierstrass:** Un sottoinsieme dei numeri reali limitato ed infinito ha almeno in **punto di accumulazione** (x un punto in un sottoinsieme A in cui gli interni di x cadono in almeno in un punto di A).