TEORIA degli INSIEMI

• Definizione di insieme:

L'insieme è un <u>CONCETTO PRIMITIVO</u>.

G. Cantor nel 1800 aveva provato a dare la definizione di "aggregato caotico di oggetti determinati e distinti", ma ad oggi non è più valida.

Vi sono 3 modi per rappresentare un insieme:

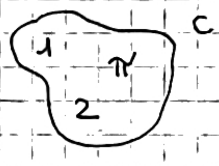
- Elencazione → Dopo aver denominato un insieme, indicandolo con la LETTERA MAIUSCOLA, elenco gli oggetti presenti al suo interno.

$$A = \{1, 3, \pi\}$$

Oggetti = Elementi che fanno parte dell'insieme

- Caratteristica → es. $B = \{\text{vocali}\}$ Vi appartengono tutti gli oggetti con quella determinata caratteristica.

- Grafica → Inventata da Eulero & Venn, descrive una curva chiusa con gli oggetti al suo interno.



Per quanto concerne le caratteristiche, in ambito matematico non si usa scrivere a lettere, ma sono soliti dei simboli:

es

$$A = \{\text{Numeri Pari}\} \longrightarrow A = \{n \,/\, \tfrac{n}{2} \in \mathbb{N}\}$$

OPERAZIONI TRA INSIEMI

- Unione: l'unione di due insiemi A e B consiste in tutti gli elementi presenti in A e in B presi una sola volta.

$$A \cup B = \{x / x \in A \vee x \in B\}$$

- Intersezione: l'intersezione $A \cap B$ consiste negli elementi che appartengono contemporaneamente ad A e a B

$$A \cap B = \{x / x \in A \wedge x \in B\}$$

Due insiemi sono detti DISGIUNTI se la loro intersezione è l'insieme vuoto $\emptyset$, ossia non hanno elementi in comune

- Differenza di Insiemi → È formata da tutti gli elementi di A tranne quelli di B

$A - B = \{...\}$

es. $A = \{1,2,3,4\}$ $B = \{1,5,7\}$

$A - B = \{2,3,4\}$

$A - B = \{x / x \in A \wedge x \notin B\}$

Qui non vale la proprietà commutativa → $A - B \neq B - A$

- Prodotto cartesiano tra due insiemi: È l'insieme formato da tutte le coppie ordinate di cui il primo elemento è il primo oggetto di A associato al primo oggetto di B.

Anche qui non vale la proprietà commutativa

$A \times B = \{(x,y) / x \in A \wedge y \in B\}$

es. $A = \{1,2,3\}$ $B = \{a,b\}$ → $A \times B = \{(1,a)(1,b)(2,a)(2,b)...\}$

- Insieme delle parti di un insieme: $P(A)$

È l'insieme di tutte le parti di un insieme, ossia l'insieme di tutti i suoi SOTTOINSIEMI

È una parte dell'insieme.

es. $C = \{2,3,4,5,6\}$ $D = \{3,4\}$ → $D \subseteq C$

In tal caso diremo che l'insieme D è incluso in C, in quanto suo sottoinsieme.

L'insieme delle parti di un insieme è quindi l'insieme di tutte le combinazioni di sottoinsiemi disponibili.

es. $A = \{1,2,3\}$

$= \{\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\},\{\emptyset\}\}$

L'insieme $P(A)$ include anche l'insieme A stesso, e l'insieme vuoto $\emptyset$.

Per sapere quanti sottoinsiemi possiamo ottenere da un insieme:

2^n → con n = CARDINALITÀ (il numero di elementi di un insieme)

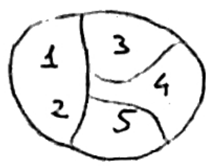
es. $A \rightarrow n = 3$ $P(A) = 2^3 = 8$ sottoinsiemi

- Partizione di un insieme: È un insieme formato da alcune sue parti.

Per ottenerlo però bisogna soddisfare 3 condizioni:
- Nessuna parte dell'insieme dev'essere $= \emptyset$
- L'intersezione di tutte le sue parti dev'essere $= \emptyset$
- L'unione di tutte le sue parti dev'essere $= A$

es. $A = \{1,2,3,4,5\}$ $P(A) = \{\{1,2\},\{3\},\{4\},\{5\}\}$ Partizione in 4 parti.

Graficamente:



- Prodotto cartesiano tra insiemi uguali: $A \times A$
Il sottoinsieme di tale prodotto è chiamato relazione binaria

Questo sottoinsieme di relazione binaria è definito di EQUIVALENZA se rispetta tali condizioni:

$A = \{a, b, c\}$ Relazione $= R$

- Riflessiva: Quando a è in relazione con a, $\forall a \in A$
- Simmetrica: Se l'elemento a è in relazione con b, $\forall a, b \in A$
- Transitiva: se aRb, $bRc \rightarrow aRc$

esempio: $A = \{$STUDENTI$\}$ R: Avere lo stesso peso

- Riflessiva → (io (a) e io (a) abbiamo lo stesso peso) $\forall a \in A$
- Simmetrica → (se aRb, io e Antonio (b) abbiamo lo stesso peso)
- Transitiva → (se io e Antonio abbiamo lo stesso peso, e antonio pesa come dello, allora io peso come dello)

Il simbolo [ ] indica la "classe di equivalenza", e sottointende tutti gli elementi che appartengono a quella classe

es.
[50] → in questa classe di equivalenza ci sono tutti gli studenti che pesano 50 Kg

L'insieme delle classi di equivalenza corrisponde a una partizione dell'insieme.

- Insieme Quoziente: È l'insieme delle classi di equivalenza

$A/R = \{[a] / a \in A\}$

Esiste oltre all'insieme di relazione binaria d'equivalenza, anche un altro chiamato D'ORDINE.
Anche qui bisogna rispettare determinati criteri e proprietà:

- Riflessiva → aRa, $\forall a \in A$
- Antisimmetrica: se aRb e $bRa \rightarrow a = b$
- Transitiva → aRb, $bRc \rightarrow aRc$

esempio: R = essere $\leq$ $a = x$ $b = 3$

- Riflessiva → $3 \leq 3$ oppure $x \leq x$
- Antisimmetrica → $3 \leq x$ e $x \leq 3 \rightarrow x = 3$
- Transitiva → $3 \leq 4$ e $4 \leq 5 \rightarrow 3 \leq 5$

INSIEMI NUMERICI

$\mathbb{N}$ → NUMERI NATURALI → $\{0, 1, 2\}$

$\mathbb{Z}$ → NUMERI INTERI → $\{-1, 0, 1\}$

$\mathbb{Q}$ → NUMERI RAZIONALI → $\{0{,}2 \,,\, 0{,}\bar{6}\}$

$\mathbb{I}$ → NUMERI IRRAZIONALI → $\{\pi, e\}$

$\mathbb{R}$ → NUMERI REALI → $\{1, -1, \pi, \sqrt{2}\}$

$\mathbb{J}$ → NUMERI IMMAGINARI → $\{\sqrt{-2}, \sqrt{-3}\}$

z → NUMERI COMPLESSI

Numeri Naturali $\mathbb{N}$

Sono tutti i numeri positivi e interi.

Numeri Interi $\mathbb{Z}$

Sono i numeri naturali con l'aggiunta dei rispettivi numeri negativi, e nascono per esigenze finanziarie.

$N \subseteq Z$

Numeri Razionali $\mathbb{Q}$

Per numero razionale si intende un qualsiasi numero ottenuto con una frazione, i cui dividendo e divisore appartengono ai numeri naturali. In essi sono compresi anche i numeri interi e i numeri naturali.

$$Q = \{ q = \frac{m}{n} \,/\, \forall m, n \in \mathbb{N} \wedge n \neq 0 \}$$

un qualsiasi numero

$N \subseteq Z \subseteq Q$

es. $2{,}3 \rightarrow \frac{23}{10}$

Anche i numeri periodici sono razionali: per verificarlo esistono varie regole

es.

$$2{,}\bar{3} = \frac{23-2}{9} = \frac{\text{il numero senza virgola} - \text{parte precedente al periodo}}{\text{tanti 9 quante le cifre del periodo}}$$

Esempio con numero periodico misto:

$$2{,}5\bar{3} = \frac{253-25}{90} = \frac{\text{il numero senza virgola} - \text{parte preced. al periodo}}{\text{tanti 9 quante le cifre del periodo e tanti 0 quante le cifre dell'antiperiodo.}}$$

Sono tutti i numeri che non sono esprimibili sotto forma di frazione.

$\mathbb{I} = \{ i \neq \frac{m}{n} \ \forall m,n \in \mathbb{N},\ n \neq 0 \}$

es. π, perché dopo 3,14... ha infinite cifre che cambiano sempre.

es. e, per lo stesso motivo $(2,718281\ldots)$

Pitagora negava l'esistenza dei numeri irrazionali, ma un suo apprendista lo negò, e dimostrò che $\sqrt{2}$ è un numero irrazionale.
2500 anni fa

Dimostrazione: $\sqrt{2}$ è un numero IRRAZIONALE

Per Assurdo:

Th: $\sqrt{2}$ è un numero irrazionale
(Una tesi o è vera o è falsa, per il principio del terzo escluso)

Hp: $\sqrt{2}$ è un numero razionale

$\sqrt{2} \in \mathbb{Q} \implies \sqrt{2} = \frac{m}{n} \ \forall m,n \in \mathbb{N},\ n \neq 0$

- Posso elevare al quadrato ambo i membri $\rightarrow 2 = \frac{m^2}{n^2}$
- Posso moltiplicare ambo i membri per $n^2 \rightarrow 2n^2 = m^2$

L'uguaglianza $2n^2 = m^2$ non può essere vera in quanto un qualsiasi numero elevato al quadrato, contiene un numero pari di [illegible] sia scomposizione.

es. $3^2 \rightarrow 9 \rightarrow$ Contiene zero 2 (PARI)

es. $8^2 \rightarrow 64 \rightarrow$ contiene sei 2 (PARI)

Quindi $2n^2 \neq m^2$ perché:

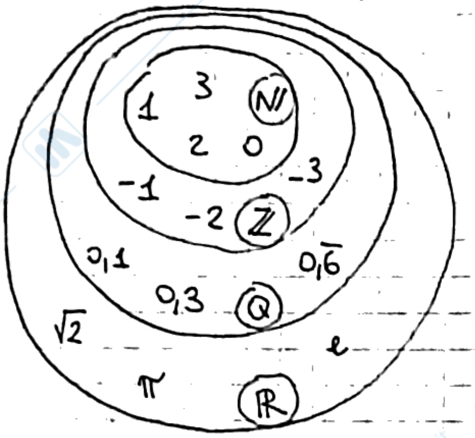
$\underbrace{2n^2}_{1+\text{PARI}} = \underbrace{m^2}_{\text{PARI}} \longrightarrow \underbrace{2n^2}_{\text{DISPARI}} = \underbrace{m^2}_{\text{PARI}}$

Dunque:

$\sqrt{2}$ è un numero irrazionale c.v.d.

Scanned with MOBILE SCANNER

Li consideriamo come l'insieme $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$, in quanto consiste nell'unione dell'insieme dei numeri razionali e quello dei numeri irrazionali



Assiomi dei numeri reali

$\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$

1) Proprietà Associativa — ADDIZIONE / MOLTIPLICAZIONE

$$(a+b)+c = a+(b+c)$$

2) Proprietà Commutativa — ADDIZIONE / MOLTIPLICAZIONE

$$a+b = b+a$$

3) Proprietà Distributiva

$$a\,(b+c) = ab + ac$$

4) Esistenza degli elementi neutri — ADDIZIONE / MOLTIPLICAZIONE

- $0 \rightarrow$ Addizione $(3+0=3)$
- $1 \rightarrow$ Moltiplicazione $(3 \cdot 1 = 3)$

5) Esistenza degli opposti

Ogni numero $\mathbb{R}$ ha il suo opposto che lo annulla

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \exists\, -a \,/\, a+(-a)=0$$

6) Esistenza degli inversi

Per ogni numero $\in \mathbb{R}$ esiste un altro numero che moltiplicandolo è $= 1$

$$\forall a \in \mathbb{R} \,/\, a \neq 0 \quad \exists!\ \underbrace{(a^{-1})}_{\frac{1}{a}} \cdot a = 1$$

I Numeri Reali possono essere suddivisi in Algebrici e trascendenti.

Algebrici:

Un numero $\mathbb{R}$ si dice Algebrico se è soluzione di un'equazione polinomiale a coefficienti razionali.

es. 3 $\rightarrow \underset{\text{RAZ.}}{x} - \underset{\text{RAZ.}}{3} = 0 \rightarrow x = 3$

es. $\sqrt{2} \rightarrow \underset{\text{RAZ}}{x^2} - \underset{\text{RAZ}}{2} = 0 \rightarrow x = \sqrt{2}$

Trascendenti:

Un numero $\mathbb{R}$ si dice trascendente se NON è soluzione di un'equazione polinomiale a coefficienti razionali.

es. $\pi \rightarrow \underset{\text{RAZ.}}{x} - \underset{\text{IRR.}}{\pi} = 0 \rightarrow x = \pi$

es. $e \rightarrow x - e = 0 \rightarrow x = e$

Possiamo dedurre che:
I numeri Razionali sono tutti Algebrici
I numeri irrazionali possono essere entrambi

RAZ. $\longrightarrow$ ALGEBRICI
IRRAZ. $\longrightarrow$ ALGEBRICI, TRASCENDENTI

Le Operazioni

Con quali operazioni ottengo sempre un numero appartenente a questi insiemi?

$\mathbb{N}$ $+ \times$

$\mathbb{Z}$ $+ - \times$

$\mathbb{Q}$ $+ - \times :$: con denominatore $\neq 0$

$\mathbb{R}$ $+ - \times :$

La radice quadrata non è inclusa perché la radice di un numero negativo è fattibile solo nei numeri immaginari.

Operazioni con lo 0

$\frac{0}{n} = 0$

$\frac{0}{0}$ = PERDE DI SIGNIFICATO

$\frac{n}{0}$ = PERDE DI SIGNIFICATO

Numeri Immaginari $\mathcal{J}$

- Si ottengono dall'estrazione di una radice quadrata negativa

es: $\sqrt{3} = \sqrt{3\cdot(-1)} = \sqrt{3}\cdot\sqrt{-1} \rightarrow i$ (UNITÀ IMMAGINARIA) $= \sqrt{3}i$

$i^2 = \sqrt{-1}^{\,2} = -1$

$i^3 = (\sqrt{-1})(\sqrt{-1})^2 = -i$

$i^4 = (\sqrt{-1})^2(\sqrt{-1})^2 = -1\cdot(-1) = 1$

Questi risultati si ripetono di 4 in 4

$i \rightarrow -1 \rightarrow -i \rightarrow 1$

$(\sqrt{-1})^7 \rightarrow -i$

$(\sqrt{-1})^{53} \rightarrow i$

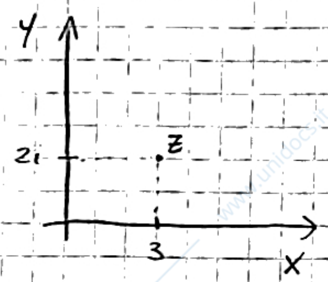
Numeri Complessi z

Formati da una parte reale e una immaginaria

es. $z = 3i + 5$ $\qquad z = xi + y$

Essi sono rappresentati sul Piano di Gauss, dove i reali stanno su x e l'immaginario su y

$z = 3 + 2i$



Operazioni con numeri complessi

$+$ $\quad z_1 = 6 - 4i$, $z_2 = 2 + 5i$ $\quad > z_1 + z_2 = 8i$

$-$ $\quad z_1 = 6 - 4i$, $z_2 = 2 + 5i$ $\quad > z_1 - z_2 = 4 - 9i$

$\times$ $\quad z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = 2 + 5i$ $\quad > z_1 \times z_2 = (2-3i)(2+5i) = 4 + 10i - 6i - 15\underbrace{i^2}_{-1} = 4i + 19$

$\div$ $\quad z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = 4 + 2i$ $\quad > z_1 / z_2 = \frac{2-3i}{4+2i}\cdot\frac{4-2i}{4-2i} = \frac{2-16i}{20} = \frac{1}{10} - \frac{4}{5}i$

Moltiplico ambo denominatore e numeratore per il complesso coniugato