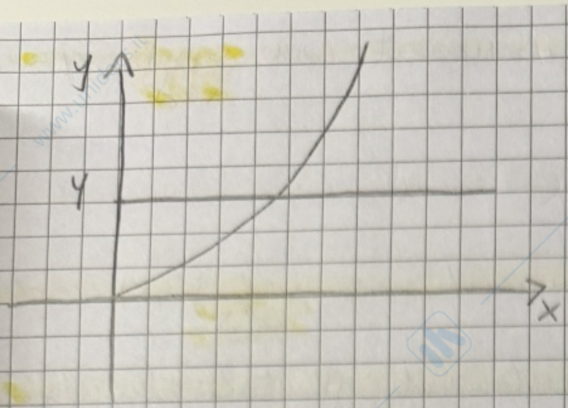


$y = f(x)$

UN SOLO VALORE
↓
E' INVERTIBILE

Si dice che f e' invertibile se l'equazione $y = f(x)$ ammette sempre una sola soluzione $\forall x \in X$

DEFINIZIONE

Chiamiamo inversa di f^{-1}: $f(x) \to x$ e che e' per definizione l'unica soluzione dell'equazione $f(x) = y$

Quando una funzione non e' totalmente invertibile ma, che con una restrizione puo diventare invertibile, si chiama LOCALMENTE INVERTIBILE.

FUNZIONE INVERTIBILE

Sia $f : X \to Y$

Si dice che f e' invertibile in X se $\forall x_1 \text{ e } x_2 \in X$ con $x_1 \neq x_2$ risulta $f(x_1) \neq f(x_2)$

Se una funzione e' invertibile si può considerare la funzione inversa $f^{-1} : Y \to X$

FUNZIONI REALI

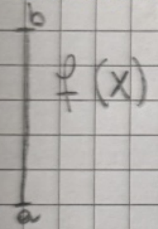
E' una funz. definita in X ha valori in $\mathbb{R}$ $(f : X \to \mathbb{R})$

I valori stanno in $\mathbb{R}$

$f(X) \subseteq \mathbb{R}$

SOTTOINSIEME

Il codominio e' una parte di $\mathbb{R}$ (si legge sull' asse delle ordinate)

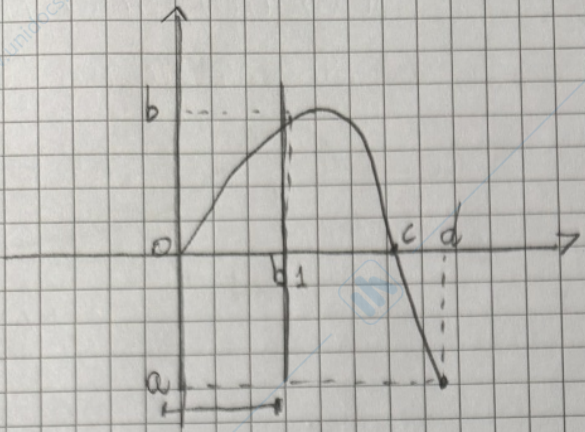


Si dice che f e' limitato superiormente se il suo codominio e' limitato superiormente, in tal caso l'estremo sup. del codominio si chiama l'estremo superiore di f e si indica con il simbolo $\sup_{x \in X} f(x)$

Si dice che f e' limitato inferiormete se il suo codominio e' limitato inferiormente, in tal caso l'estremo inf. del codominio si chiama l'estremo inferiore di f e si indica con il simbolo $\inf_{x \in X} f(x)$

Se l'estremo sup. appartiene a $f(X)$ allora coincide con il $\max_{x \in X} f(x)$

Se $\inf_{x \in X} f x$ appartiene a $f X$ (codominio) allora e' il min $f(x)$



DOMINIO: $x = [0, d]$

CODOMINIO $f(X) = [a, b]$

f è limitata

b è l'estremo sup., appartiene al codominio, è l'est. sup.

a min, inf

non è invertibile, prendo il tratto $[0, b_1]$

$f : [0, b_1] \rightarrow [0, b]$

strett. cresc.

CODOMINIO: $[0, b]$

INVERSA: $f^{-1} : [0, b] \rightarrow [0, b_1]$

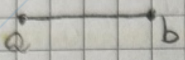
INTERVALLI

Siano: $a, b \in \mathbb{R}$

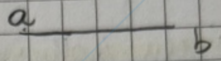
$x \in [a, b] \; (=) \; a \leq x \leq b$
$x \in [a, b[\; (=) \; a \leq x < b$
$x \in]a, b] \; (=) \; a < x \leq b$
$x \in]a, b[\quad a < x < b$

INTERVALLI LIMITATI perché agli estremi ci sono due numeri

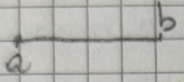
$[a, b]$



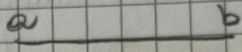
$]a, b]$



$[a, b[$



$]a, b[$



Sia $c \in \mathbb{R}$

$x \geq c \; (=) \; [c, +\infty[$
$x > c \; (=) \;]c, +\infty[$
$x \leq c \; (=) \;]-\infty, c]$ non limitato inferiormente, lim sup.
$x < c \; (=) \;]-\infty, c[$

TIPI DI INTERVALLI

Intervallo chiuso: Include entrambi gli estremi

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

Intervallo aperto: Esclude entrambi gli estremi

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

Intervallo semi-aperto o semi-chiuso: Include solo uno degli estremi

$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

Intervallo illimitato: Si estende all'infinito in una o entramb
le direzioni

$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$
$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$

GENERALITA' SULLE FUNZIONI

La funzione e' una relazione che associa ad ogni elemento di A uno e un solo elemento di B.

$$f : \underset{\substack{\uparrow \\ \text{DOMINIO} \\ \text{INSIEME DI DEFINIZIONI}}}{X} \rightarrow \overset{\substack{\text{INSIEME DI ARRIVO} \\ \downarrow}}{Y}$$

F definita in X ha valori in Y

$\forall x \in X$ $f(x)$ immagine di x tramite f

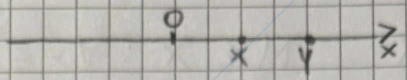
Il CODOMINIO e' un sottoinsieme dell'insieme di arrivo.

L'insieme di tutte le immagini : $F(X)$ = codominio di f

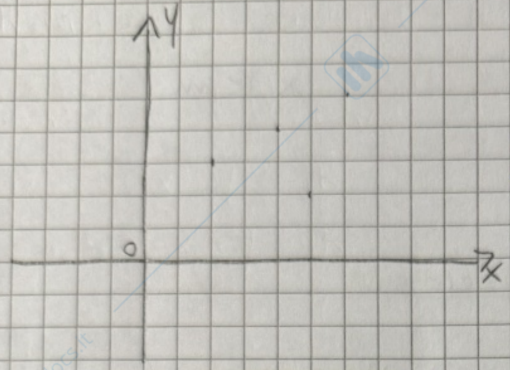
Codominio : insieme di tutte le immagini

Se il codominio coincide con l'insieme di arrivo,
~~Se~~ la funzione si dice suriettiva o biunivoca

$x < y$



$|x-y|$ dist. da x da y

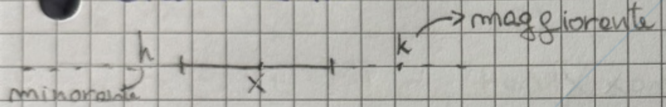


$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$

L'origine è data dal fatto che tutti i punti di $\mathbb{R}$ sono $\mathbb{R}$

ESTREMI DI UN SOTTOINSIEME DI $\mathbb{R}$

Sia $X \subseteq \mathbb{R}$



k maggiorante di X $\Leftrightarrow$ $k \in \mathbb{R} : \forall x \in X \ x \leq k$

h minorante di X $\Leftrightarrow$ $h \in \mathbb{R}, \forall x \in X \rightarrow x \geq h$

Quando un insieme è ~~maggiorato~~ dotato di maggioranti si dice limitato superiormente

Quando un insieme è dotato di minorante si dice limitato inferiormente

Si dice che X è limitato superiormente ~~quando~~ se esiste $k \in \mathbb{R} : \forall x \in X \ x \leq k$

" $h \in \mathbb{R} : \forall x \in X \rightarrow x \geq h$

Si dice che $X \subseteq \mathbb{R}$ è LIMITATO se esistono $\exists h ; k \in \mathbb{R}$: $\forall x \in X \ h \leq x \leq k$

X limitato $\Leftrightarrow \exists \alpha > 0 : \forall x \in X \ |x| \leq \alpha$

NUMERO DI NEPERO e

$\mathbb{R}$ è l'insieme degli allineamenti decimali illimitati periodici o no, negativi e positivi compreso lo zero

$\mathbb{R}$ insieme dei numeri reali

Somma e differenza di numeri reali

Siano : $x, y \in \mathbb{R}$

Somma $x + y \in \mathbb{R}$

"0" è l'elemento neutro, $\forall x \in \mathbb{R}$ ↗ $-x$ l'opposto di x

$x + (-x) = 0$

$0 + x = x$

$x + (-y)$ è la DIFFERENZA tra due numeri reali

PRODOTTO $x \cdot y \in \mathbb{R}$

1 (elemento neutro)

Sia $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

"$\frac{1}{x}$" reciproco di x ; $x \cdot \frac{1}{x} = 1$

DIVISIONE $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\frac{x}{y} = x \cdot \frac{1}{y}$$

L'insieme dei numeri reali, nel quale sono definite le addizioni e la moltiplicazioni tra i suoi elementi che godono delle proprietà usuali, si chiama CAMPO

FUNZIONI PARI DISPARI E PERIODICHE

Sia f definita $X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Supponiamo che $\forall x \in X \quad -x \in X$

Si dice che f è pari se $f(x) = f(-x) \quad \forall x \in X$

Si dice che f è dispari se $f(x) = -f(-x)$

Le funzioni con potenza pari sono tutte pari, le funzioni con potenza dispari, sono tutte dispari.

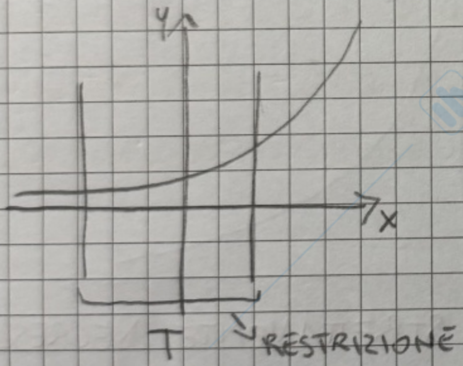
FUNZIONI PERIODICA

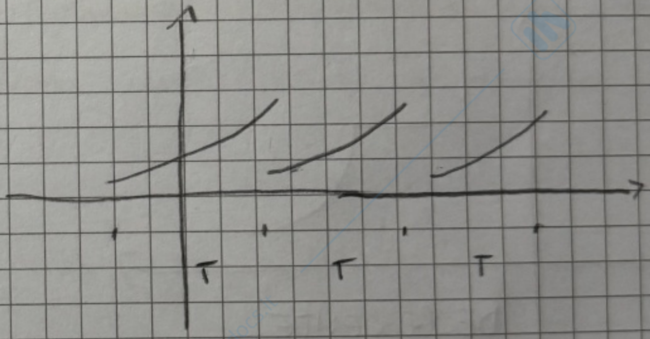
Sia $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Sia $\omega \in Z$ Supponiamo $\forall x \in X \quad X + \omega \in X$

OMEGA

Si dice che f è periodica nel periodo ω se $f(x+\omega) = f(x)$





Ho reso, prolungando T, periodica questa funzione

Si dice che f è non limitata superiormente se $\sup_{x \in X} f(x) = +\infty$

a

Si dice che f è non limitata inferiormente se $\inf_{x \in X} f(x) = -\infty$

f è limitata se esistono h, k appartenenti $\mathbb{R}$ tali che $\forall x \in X$ $h \leq f(x) \leq k$

f è limitata $\iff \exists\, \alpha > 0 : \forall x \in X \; |f(x)| \leq \alpha$

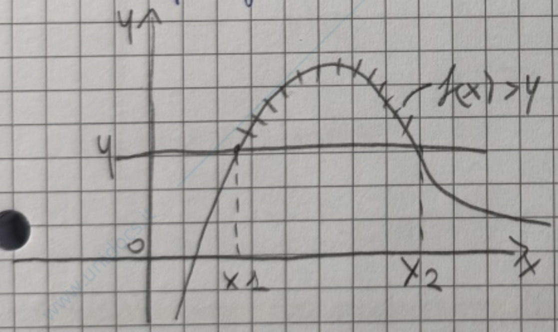
FUNZIONI REALI DI UNA VARIABILE REALE

$$f : X \underset{\text{SOTTOINSIEME}}{\subseteq} \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$\underset{\text{GRAFICO}}{G} = \{(x, y) \in \underset{\text{PIANO}}{\mathbb{R}^2} : x \in X \text{ e } y = f(x)\}$$

La rappresentazione grafica si chiama diagramma

Risolvere $y = f(x)$



NON INVERTIBILE
perché ha due intersezioni

Si mette sulle asse delle ordinate

Risolvere il grafico significa trovare le intersezioni

$f(x) > y$ (trovare i valori al di sopra della retta)
$f(x) < y$ (-- -- al di sotto --)

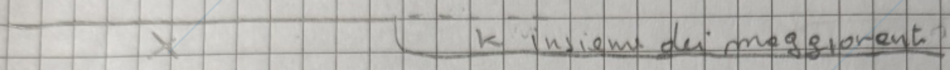
Sia $X \subseteq \mathbb{R}$

Chiamiamo M il massimo di X $\quad M \in X : \forall x \in X \quad x \leq M$

$M = \max X$

[minimo] — $x \geq m$

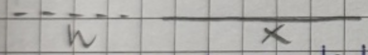
$m = \min X$



I maggioranti costituiscono un insieme, il più piccolo dei maggioranti si chiama l'estremo superiore di X

$\sup X$

Se $\sup X \in X$ allora $\sup X = \max X$



I minoranti costituiscono un insieme, il più grande dei minoranti si chiama l'estremo inferiore di X

$\inf X$

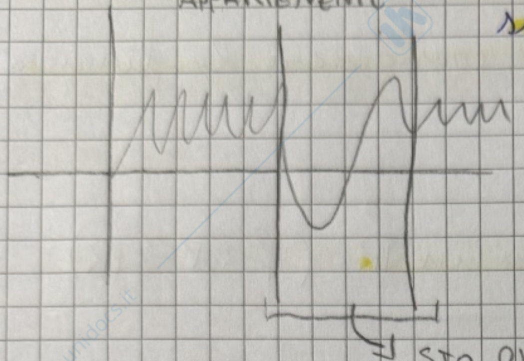
Se $\inf X \in X$ allora $\inf = \min X$

RESTRIZIONE e PROLUNGAMENTO di una funzione

Sia $f : X \to Y$
TALE CHÉ

Sia $A \in X$
APPARTENENTE

La restrizione di una funzione consiste nel considerare la funzione solo su un sottoinsieme del suo dominio originale.

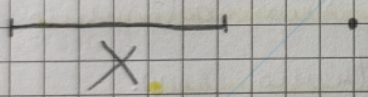


↳ sto prendendo una restrizione di una funzione

Restrizione di f ad A

$f : A \to Y$

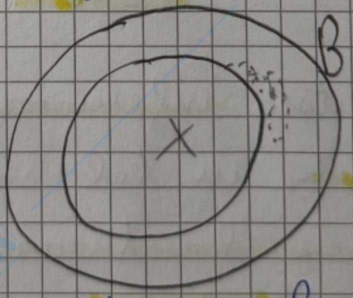
PROLUNGAMENTO



Se in un punto non conosciamo il valore della funzione, gli do un valore affinché faccia parte della stessa funzione

Sia $f : X \to Y$

Sia $B \supseteq X$
↳ contenente



Chiamiamo il prolungamento di f su B

$$f = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in X \\ a & \text{se } x \in B \setminus X \end{cases}$$
↳ privato

Il PROLUNGAMENTO di una funzione consiste nell'estendere il dominio della funzione originale.

POTENZA DI UN NUMERO REALE

$$\underset{m \in \mathbb{N}}{x^m} = \begin{cases} x & \text{se } m = 1 \\ \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots x}_{m \text{ volte}} & \text{se } m = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

$$\underset{\text{base}}{x}^{\overset{\text{esponente}}{n}}$$

VALORE ASSOLUTO o MODULO di un numero reale

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases} \implies |x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

PROPRIETA' DEV V. ASSOLUTO

$|x| < \alpha \iff -\alpha < x < \alpha$

$|x| \leq \alpha \iff -\alpha \leq x \leq \alpha$

$|x| > \alpha \iff x < -\alpha \cup x > \alpha$

$|x| \geq \alpha \iff x \leq -\alpha \cup x \geq \alpha$

Siano: $x, y \in \mathbb{R}$

$|x+y| \leq |x| + |y|$ Proprietà triangolare

$|x-y| = 0 \iff x = y$ Proprietà di coincidenza

$|x-y| = |y-x|$ Proprietà di simmetria es. $|a| = |-a|$

es

- $|x| < 4 \iff -4 < x < 4$
- $|x| < -2 \quad \emptyset$
- $|x| > -2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $|\underbrace{x-2}_{t}| < 3 \implies |t| < 3; -3 < t < 3$

$-3 < x - 2 < 3 \implies \overset{(-3+2)}{-1} < x < \overset{(3+2)}{5}$

- $|\underbrace{2x-1}_{t}| < 2 \iff |t| < 2$

$-2 < t < 2$

$-2 < 2x - 1 < 2$

$-\frac{1}{2} < \frac{2}{2} x < \frac{3}{2} \qquad -\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$

PRODOTTO CARTESIANO

$\{a, a_1, a_2 \dots\}$ -> rappresentazione di un insieme

$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$

$B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$

$A \underset{\downarrow}{\times} B = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2) \dots, (a_2, b_1), (a_2, b_2) \dots\}$

cartesiano

E' l'insieme delle coppie ordinate che si ottengono combinando ciascuno degli elementi del primo insieme, con il secondo insieme
ciascuno degli elementi

INSIEMI NOTEVOLI

Insiemi numerici

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ numeri interi positivi

$Z = \{0, 1, 2, -1, -2 \dots\}$ numeri interi positivi e negativi

$\mathbb{N} \subset Z$ (contenuto in Z)

Siano: $p, q \in Z$ con $q \neq 0$

$\frac{p}{q}$ è un numero razionale $Q \to$ (insieme dei numeri razionali)

L'insieme dei numeri razionali è l'insieme degli allineamenti decimali positivi o negativi con un numero limitato di cifre decimali

$\mathbb{N} \subset Z \subset \mathbb{Q}$

1^e prove intercorso a novembre, seconda fine dicembre

scritto gennaio, marzo, febbraio

se si superano le prove intercorso non si fa lo scritto

ORALI 2 v SETT. fino a marzo o a giugno

SCRITTO anche a giugno

$\exists$ esiste almeno

$\exists !$

$:$ o $|$ tale che

$\in$ appartiene

$\notin$ non appartiene

$\Longleftrightarrow$ equivalente

$\subset$ contenuto in senso stretto

$\subseteq$ contenuto in senso largo

$\Rightarrow$ implica

$\alpha) \Rightarrow \beta)$ comporta il verificarsi di B

$\alpha) \Longleftrightarrow \beta)$ se e solo se

$\emptyset$ insieme vuoto, non si verifica mai

$\cup$ unito

$\cap$ intersezione

CAMPO ORDINATO DEI NUMERI REALI

insieme è una collezione di elementi legati da qualche proprietà, si indicano con le lettere maiuscole.

$A \cup B$ è un operazione (A unione B)

$A \cup \emptyset$

$\left.\begin{array}{l} A \setminus B \text{ (A tranne B)} \\ A - B \text{ (A meno B)} \end{array}\right\}$ è valido se e solo se B è contenuto in A

$\Downarrow$

$B \subseteq A$

$\Downarrow$

(contenuto in senso largo)

$A \cap B$ (intersezione)

$A \cap \emptyset = \emptyset$

$A \times B$ (A cartesiano B)

$\mathbb{N}$ = insieme dei numeri naturali (1, 2, 3 ....)

Z = insieme dei numeri relativi, insieme costituito dai num. pos e neg

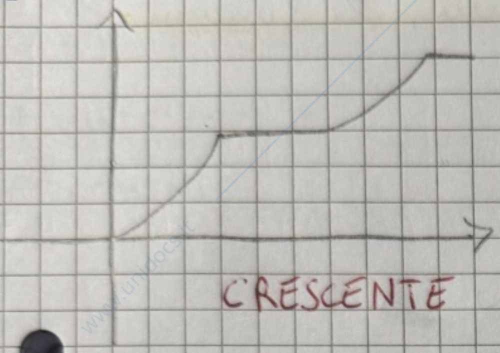
FUNZIONI MONOTÒNE

Sia $f : X \underset{\text{SOTTOINSIEME}}{\subseteq} \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

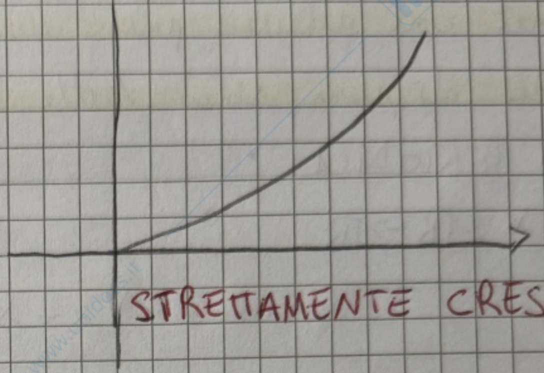
Si dice che f è crescente (strett. crescente) se $\forall x_1 < x_2 \in X$

$f(x_1) \leq f(x_2)$

$[f(x_1) < f(x_2)]$

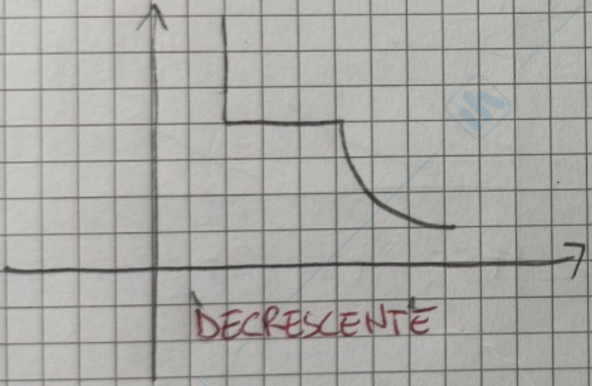


CRESCENTE

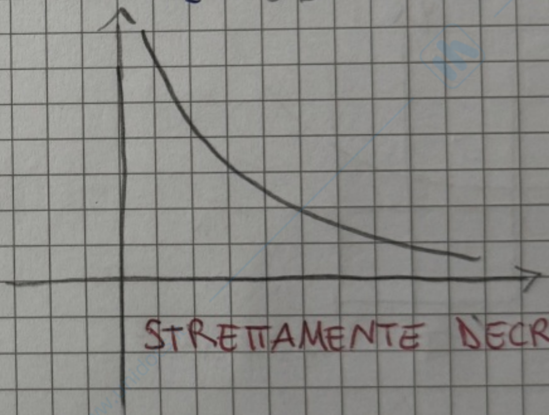


STRETTAMENTE CRESCENTE

Decrescente se $\forall x_1 < x_2$ $f(x_1) \geq f(x_2)$ $[\underset{\text{STRETT. DEC.}}{f(x_1) > f(x_2)}]$



DECRESCENTE



STRETTAMENTE DECRESCENTE

UNA FUNZIONE STRETTAMENTE MONOTÒNA È INVERTIBILE