www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

$$A = -B = \frac{a}{\sqrt{\Delta}}$$

$$\frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{a}{\sqrt{\Delta}\,(x-x_1)} - \frac{a}{\sqrt{\Delta}\,(x-x_2)}$$

$$\frac{1}{a}\int \frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)}\,dx =$$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{a}{\sqrt{\Delta}\,(x-x_1)} - \frac{a}{\sqrt{\Delta}\,(x-x_2)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\int \frac{1}{(x-x_1)}\,dx - \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\int \frac{1}{(x-x_2)}\,dx$$

$$\int \frac{1}{(x-x_1)}\,dx = \int \frac{1}{t}\,dt = \log(t) + c =$$

$$= \log(x-x_1) + c$$

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\log|x-x_1| - \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\log|x-x_2| + c =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\log\left(\frac{|x-x_1|}{|x-x_2|}\right) + c$$

quadrato perfetto

☆☆ $\Delta = 0$ $\quad b^2 - 4ac = 0 \quad b^2 = 4ac \quad b = 2\sqrt{a}\sqrt{c}$

$$ax^2 + bx + c = ax^2 + 2\sqrt{a}\sqrt{c}\,x + c =$$

$$= (\sqrt{a}\,x + \sqrt{c})^2$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{f(t)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{6}\left[(1+2t^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0 =$$

$$= \frac{1}{6}\left[3^{\frac{3}{2}} - 1\right]$$

3 Calcolare la primitiva $\int x^a \log x \, dx$

con $a \neq -1$

$$\int \underbrace{x^a}_{f} \underbrace{\log x}_{g} \, dx =$$ integrare per parti

$$= \frac{x^{a+1}}{a+1} \cdot \log x - \int \frac{x^{a+1}}{a+1} \cdot \frac{1}{x} \, dx =$$

$$= \frac{x^{a+1}}{a+1} \log x - \int \frac{1}{a+1} \cdot x^a \, dx =$$

$$= \frac{x^{a+1}}{a+1} \log x - \frac{1}{a+1} \int x^a \, dx =$$

$$= \frac{x^{a+1}}{a+1} \log x - \frac{1}{a+1}\left(\frac{x^{a+1}}{a+1}\right) + c$$

$$= \frac{x^{a+1}}{a+1}\left(\log x - \frac{1}{a+1}\right) + c$$

4 Trovare la primitiva $\int \frac{1}{} \, dx$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

4 Trovare la primitiva $\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx$

$a \neq 0$

☆ $\Delta > 0$ $\quad \Delta = b^2 - 4ac$

☆☆ $\Delta = 0$

☆☆☆ $\Delta < 0$

☆ $\Delta > 0$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$a(x - x_1)(x - x_2) =$$

$$= a\left(x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right) =$$

$$= a\left(x^2 + \frac{b}{2a}x + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}x + \frac{b}{2a}x - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}x + \left(\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right) =$$

$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{1}{4a^2}\left[b^2 - b^2 + 4ac\right]\right) =$$

$$= ax^2 + bx + \frac{a}{4a^2} \cdot 4ac = ax^2 + bx^2 + c$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

$$\int ax^2 + bx + c \qquad \int \left(\sqrt{a}\,x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b}{4a}$$

$$= \int \frac{1}{c - \frac{b^2}{4a}} \left[\frac{1}{\frac{\left(\sqrt{a}\,x + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2}{c - \frac{b}{4a}} + 1} \right] dx =$$

$$= \frac{1}{c - \frac{b^2}{4a}} \int \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{a}\,x + \frac{b}{2\sqrt{a}}}{\sqrt{c - \frac{b^2}{4a}}}\right)^2 + 1}\, dx$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{c - \frac{b^2}{4a}}} \cdot \left(\sqrt{a}\,x + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)$$

$$dy = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c - \frac{b^2}{4a}}}\, dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dx = \frac{\sqrt{c - \frac{b^2}{4a}}}{\sqrt{a}}\, dy$$

$$= \frac{1}{c - \frac{b^2}{4a}} \int \frac{1}{y^2 + 1} \frac{\sqrt{c - \frac{b^2}{4a}}}{\sqrt{a}}\, dy =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}\,\sqrt{c - \frac{b^2}{\ldots}}} \int \frac{1}{y^2 + 1}\, dy$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

$x = r \operatorname{sen} t$

$dx = r \cos t \, dt$

$$= \int_{-r}^{r} 2 \sqrt{r^2 - r^2 \operatorname{sen}^2 t} \; r \cos t \, dt =$$

$$= 2r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\underbrace{1 - \operatorname{sen}^2 t}_{\cos^2 t}} \; \cos \; dt$$

$\sqrt{\cos^2 t} = \cos t$ perchè $\cos \geq 0$

$$= 2r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \, dt$$

identità notevole

$\cos^2 t = \frac{\cos(2t) - 1}{2}$

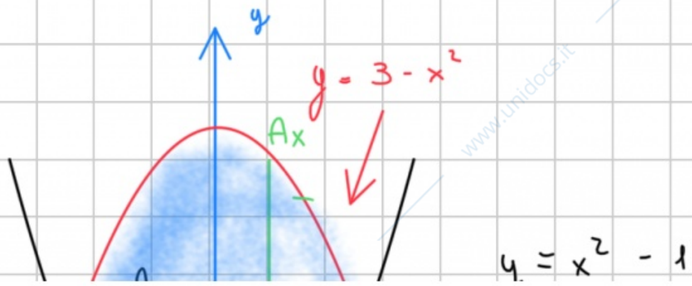
$$= 2r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(2t) - 1 \, dt$$

$$= r^2 \left| \frac{\operatorname{sen}(2t)}{2} + t \right|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \pi r^2$$

2 Calcolare l'area dell'insieme A dei punti (x, y) tale che

$$x^2 - 1 \leq y \leq 3 - x^2$$



www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

$$= a\,x^2 + bx + \frac{a}{4a^2} \cdot 4ac = ax^2 + bx^2 + c$$

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx = \int \frac{1}{a(x-x_1)(x-x_2)}\,dx =$$

$$= \frac{1}{a} \int \frac{1}{a(x-x_1)(x-x_2)}\,dx$$

Possiamo trovare $A, B \in \mathbb{R}$ tali per cui

$$\frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{A}{(x-x_1)} + \frac{B}{(x-x_2)} =$$

$$= \frac{Ax - Ax_2 + Bx - Bx_1}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{(A+B)x - Ax_2 - Bx_1}{(x-x_1)(x-x_2)} =$$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -Ax_2 - Bx_1 = 1 \end{cases} \qquad \begin{aligned} &A = -B \\ &Bx_2 - Bx_1 = 1 \\ &B(x_2 - x_1) = 1 \end{aligned}$$

$$B = \frac{1}{x_2 - x_1} = \frac{1}{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} - \left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\frac{-2\sqrt{\Delta}}{2a}} = -\frac{2a}{2\sqrt{\Delta}} = \frac{-a}{\sqrt{\Delta}}$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

1° MODO

$$\int_0^1 \sqrt{1+2t^2}\; t\, dt =$$

$x = 1 + 2t^2$

$dx = 4t\,dt \Rightarrow$

$dt = \frac{1}{4} dx$

$$= \int_1^3 \sqrt{x}\; \frac{1}{4} dx =$$

estremi $\begin{cases} t = 0 \rightarrow x = 1 + 2\cdot 0^2 = 1 \\ t = 1 \rightarrow x = 1 + 2\cdot 1^2 = 3 \end{cases}$

$$= \int_1^3 \sqrt{x}\; \frac{1}{4} dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int_1^3 x^{1/2}\, dx = \frac{1}{4}\left[\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right] = \frac{1}{4}\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\left[x^{3/2}\right]_1^3 = \boxed{\frac{1}{6}\left[3^{3/2} - 1\right]}$$

2° MODO

$$\int_0^1 \sqrt{1+2t^2}\; t\, dt = \frac{1}{4}\int_0^1 \sqrt{1+2t^2}\cdot 4t\, dt$$

modifico e divido per 4

$f(t) = 1 + 2t^2$

$$= \frac{1}{4}\int_0^1 (f(t))^{\frac{1}{2}}\cdot f'(t)\, dt =$$

$f'(t) = 4t$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{f(t)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{6}\left[(1+2t^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 =$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

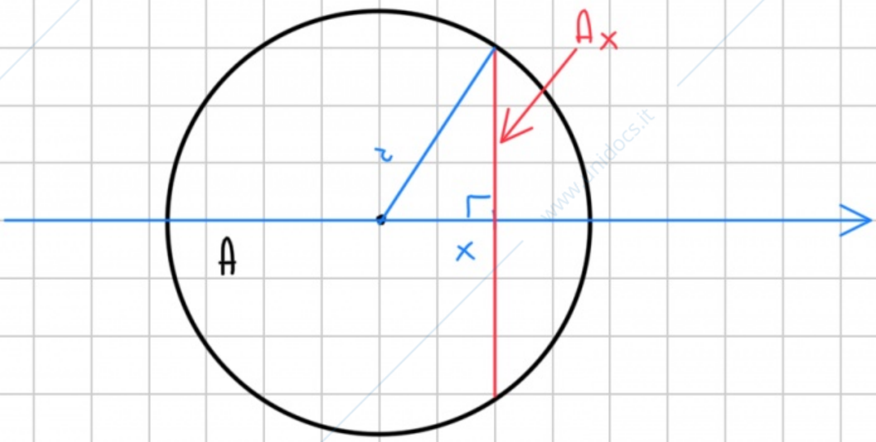
$$\text{area}(A) = \lim_{\delta \to 0} \sum_{m=1} \text{area}(R_m) =$$

$$= \lim_{\delta \to 0} \sum_{m=1}^{n} \ell(x_m) \cdot \delta =$$

$$= \int_a^b \ell(x)\,dx$$

ESEMPI

1 A cerchio di raggio r (so già qual è l'area, è solo una verifica)



$$\ell(x) = \text{lungh}(A_x) = 2\sqrt{r^2 - x^2}$$

Quindi $\text{area } A = \int \ell(x)\,dx = \int_{-r}^{r} 2\sqrt{r^2 - x^2}\,dx =$

$x = r \,\text{sen}\, t$
$dx = r \cos t \, dt$

$$= \int_{-r}^{r} 2\sqrt{r^2 - r^2 \,\text{sen}^2 t}\; r \cos t \, dt =$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

$$ax^2 + bx + c = ax^2 + 2\sqrt{a}\sqrt{c}\,x + c =$$

$$= (\sqrt{a}\,x + \sqrt{c})^2$$

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c}\,dx = \int \frac{1}{(\sqrt{a}\,x + \sqrt{c})^2}\,dx =$$

$t = \sqrt{a}\,x + \sqrt{c}$

$dt = \sqrt{a}\,dt \Rightarrow$

$\Rightarrow dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\,dt$

$$= \int \frac{1}{t^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}}\,dt = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{1}{t^2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} \left(\frac{t^{-1}}{-1} \right) + c = -\frac{1}{\sqrt{a}} \frac{1}{t} + c_1 =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{a}} \left(\frac{1}{\sqrt{a}\,x + c} \right) + c_1 =$$

$$= \frac{-1}{ax + \sqrt{a}\sqrt{c}} + c_1$$

☆☆☆ $\Delta < 0$ completamento del quadrato

$$ax^2 + bx + c = ax^2 + bx \pm \frac{b^2}{4a} + c =$$

$$= \left(\sqrt{ax} + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c =$$

$$\int \frac{1}{\dots}\,dy$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

$$= \frac{1}{\sqrt{a}\sqrt{c - \frac{b^2}{4a}}} \int \frac{1}{y^2+1} \, dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}\sqrt{c - \frac{b^2}{4a}}} \arctan(y) + c$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}\sqrt{c - \frac{b^2}{4a}}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{c - \frac{b^2}{4a}}}\left(\sqrt{a}\,x + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)\right) + c$$

LEZIONE 39

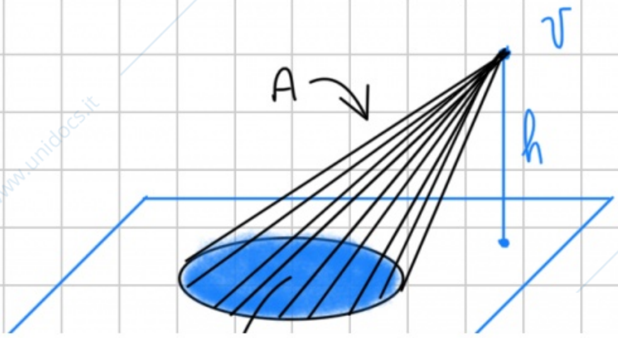
20 - 11

analisi

Calcolo del volume

ESEMPIO 3

Volume di un cono qualunque, con base b e alt. h.



$$\text{Vol}(A) = \frac{1}{3}\,\text{area}(B)\cdot h$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

LEZIONE 38

19 - 11

ANALISI

ESERCIZIO

1. Trovare la primitiva $\int (1-4x)^a \, dx$

con $a \neq -1$

$$\int (1-4x)^a \, dx =$$

$t = 1 - 4x$

$dt = -4\,dx \Rightarrow dx = -\frac{1}{4}\,dt$

$$= \int (t)^a \left(-\frac{1}{4}\right) dt = -\frac{1}{4} \int t^a \, dt =$$

$$= -\frac{1}{4} \left[\frac{t^{a+1}}{a+1} \right] + c$$

Sostituiamo $t = 1-4x$

$$= -\frac{1}{4(a+1)} (1-4x)^{a+1} + c$$

2. Calcolare $\int_0^1 \sqrt{1+2t^2} \; t \, dt$

1° MODO

$$\int_0^1 \sqrt{1+2t^2} \; t \, dt =$$

$x = 1 + 2t^2$

$dx = 4t\,dt \Rightarrow$

$dt = \frac{1}{4}\,dx$

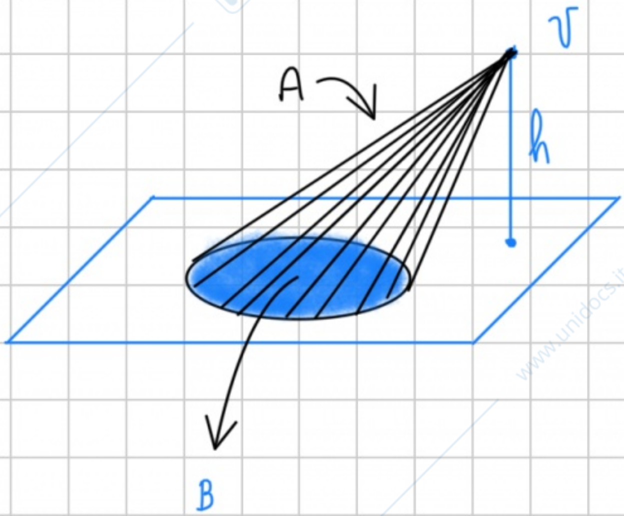
$$= \int_1^3 \sqrt{x} \; \frac{1}{4} \, dx =$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

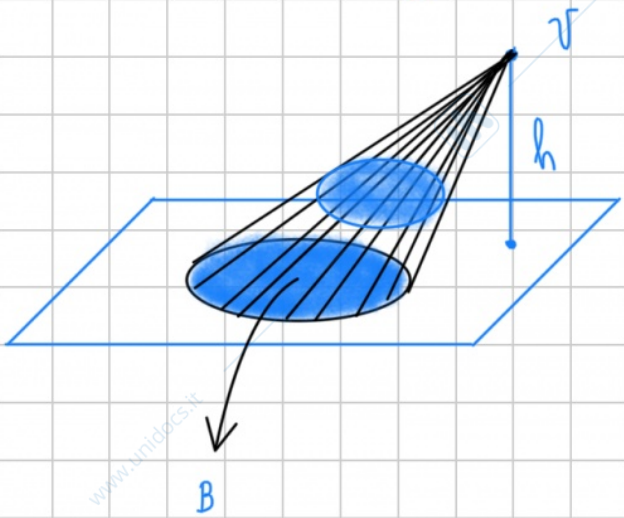
www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

ESEMPIO 3

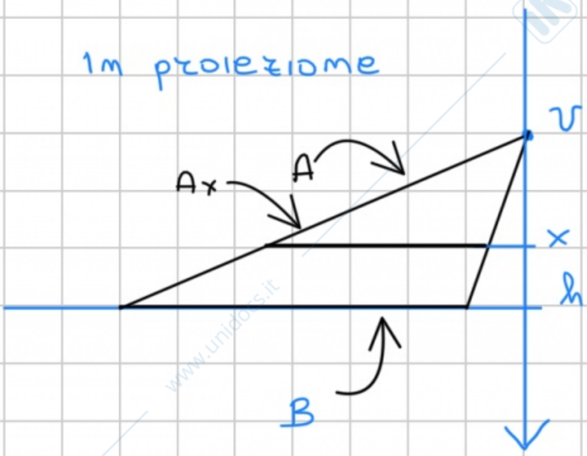
Volume di un cono qualunque, con base b e alt. h.



$$Vol(A) = \frac{1}{3} area(B) \cdot h$$



In proiezione



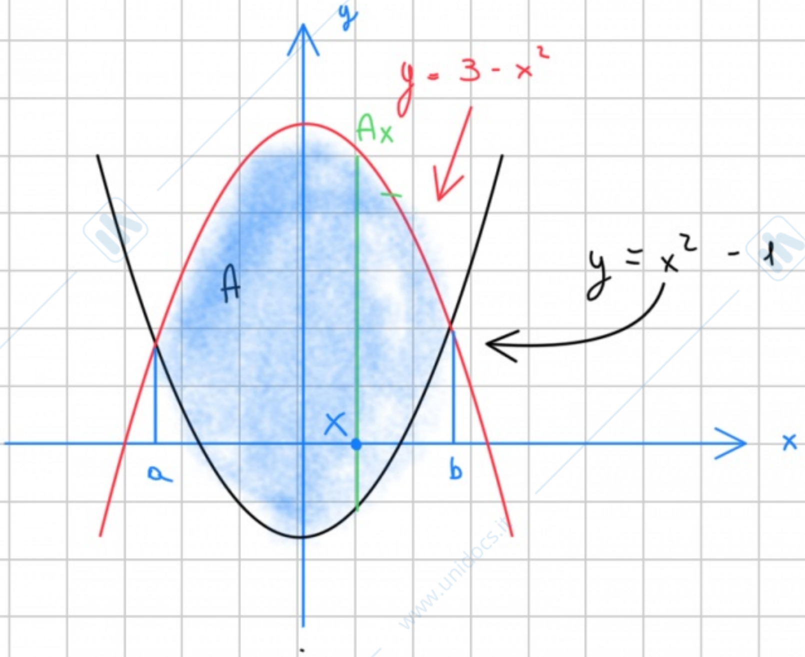
A_x è una copia di B rimpicciolita di un fattore $\frac{x}{h}$

$$Vol(A) = \int_0^h area(A_x)\, dx = \int_0^h area(B) \cdot \frac{x^2}{h^2}\, dx$$

$$= area(B) \frac{1}{h^2} \left| \frac{x^3}{3} \right|_0^h = \frac{1}{3} area(B) \cdot h$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari



A_x = segmento di estremi (x, x^2-1) e $(x, 3-x^2)$

$$\ell(x) = (3 - x^2) - (x^2 - 1) = 4 - 2x^2$$

a e b sono le soluzioni dell'equazione $x^2 - 1 = 3 - x^2$

$2x^2 = 4$; $x^2 = 2$; $x = \pm\sqrt{2}$

Quindi

$$\text{area}(A) = \int \ell(x)\,dx = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} 4 - 2x^2\,dx$$

$$= 2\int_0^{\sqrt{2}} 4 - 2x^2\,dx$$

$$= 2\left|\, 4x - \frac{2x^3}{3} \,\right|_0^{\sqrt{2}}$$

$$= 2\left(4\sqrt{2} - \frac{2}{3}\, 2\sqrt{2}\right)$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

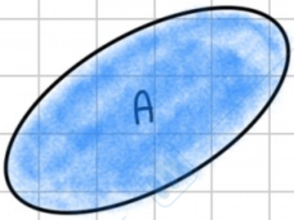
LEZIONE 37

18-11

Analisi

Calcolo delle aree

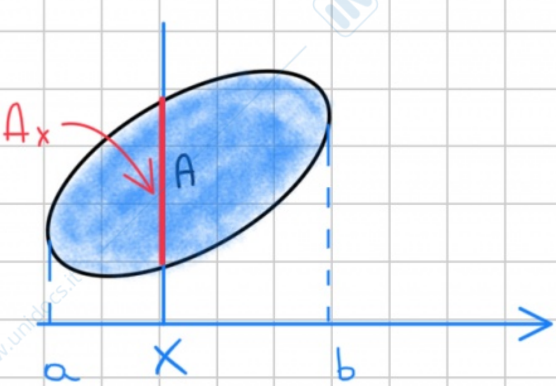
Considero una figura piana A



Per calcolare l'area di A scelgo un'asse

Ogni x sull'asse indico con A_x la sezione di A ad altezza x

(A intersecato con la retta ortogonale all'asse e passante per x)



Pongo $l(x) :=$ lunghezza di A_x

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

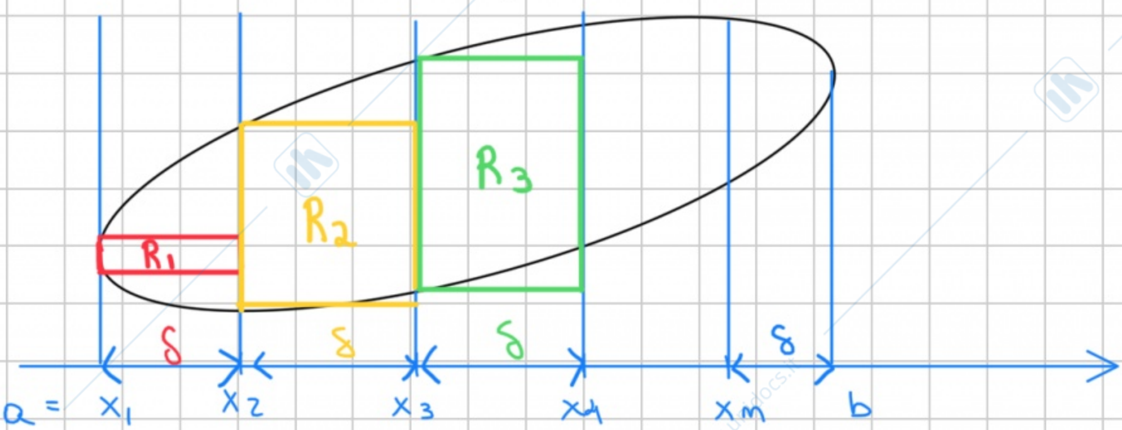
Pongo $l(x) :=$ lunghezza di A_x

allora

$$\text{area}(A) = \int_a^b l(x)\,dx$$

GIUSTIFICAZIONE DELLA FORMULA

Per calcolare l'area di A, approssimo A con dei rettangoli:



divido $[a, b]$ in N intervalli di lunghezza δ

$[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$ ... e costruisco i rettangoli $R_1, \ldots, R_N$ come in figura ($x_1 = a$)

Mi aspetto che area (A) sia approssimata da

$$\sum_{n=1}^{N} \text{area}(R_n)$$, tanto meglio quanto più δ è piccolo, cioè

$$\text{area}(A) = \lim_{\delta \to 0} \sum_{n=1}^{N} \text{area}(R_n) =$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari