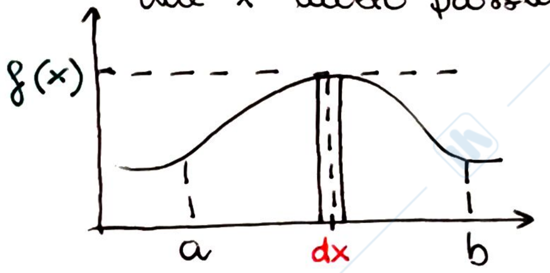
17/11 (GULLÁ)

INTEGRAZIONE

• Aspetti teorici

"SOMMA" di aree da a a b $\left[\int_a^b \underbrace{f(x)}_{\text{VALORE CHE LA FUNZIONE ASSUME IN UN PUNTO "x"}} dx\right]$ DIFFERENZIALE DI x → dal punto di vista geometrico rappresenta la distanza tra due x molto prossime tra loro

rispetto a dx, f(x) rappresenta un'approssimazione dell'area del rettangolo che ho per base dx e altezza f(x)



• Proprietà (se f e g sono integrabili)

1 → Se $f \leq g \Rightarrow L(f) \leq L(g)$ ⟼ $L(f)$ è un'area MA CON SEGNO

$L(f) = \int_a^b f(x)\,dx$

2 → $\forall k \in \mathbb{R} \Rightarrow L(kf) = kL(f)$

3 → $L(f+g) = L(f) + L(g)$

⟼ L è un OPERATORE LINEARE

Considerando l'insieme $\mathcal{J}$ = { funzioni integrabili in [a, b] } la linearità dell'integrale implicata dalle prime 2 proprietà ci porta a dire che l'insieme $\mathcal{J}$ è un SOTTOSPAZIO VETTORIALE.

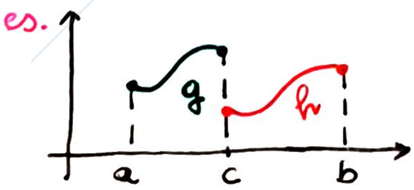
C = { funzioni continue su [a, b] } è un SOTTOSPAZIO VETTORIALE

D = { funzioni derivabili su [a, b] } è un SOTTOSPAZIO VETTORIALE

Questi 3 insiemi sono caratterizzati dall'uso, alla fine di un LIMITE

• TEOREMA: f continua su [a, b] (e nulla fuori da [a, b]) allora è INTEGRABILE. A ⇒ B vuol dire che NON A ⇒ NON B

es.



$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c \overset{g}{f(x)}\,dx + \int_c^b \overset{h}{f(x)}\,dx$

POSSO SPEZZARE L'INTEGRALE

Quindi se f continua su $[a, b] \Rightarrow$ f è uniformemente continua

TEOREMA DI HEINE-CANTOR

• TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

ip f continua su $[a,b]$ $(a \neq b)$; sia $x_0 \in (a,b)$ e sia:

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

def. di funzione integrale

Allora F è una PRIMITIVA di f $(F' = f)$ [COROLLARIO]

se G è una primitiva di f: $\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$

Senza gli estremi di integrazione avrei un INTEGRALE INDEFINITO:

$$\int f(x)\,dx = \{\text{tutte le primitive di } f\} = \{G : G' = f\}$$

è un insieme

• METODI DI INTEGRAZIONE

→ TEO: INTEGRAZIONE PER PARTI

f e g continue in $[a,b]$; f ammette primitiva F e g primitiva G

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,G(x)\,dx + \int_a^b F(x)\,g(x)\,dx = \left[F(x)G(x)\right]_a^b = F(b)G(b) - F(a)G(a)$$

DIM.: $\int (f \cdot g)' = \int f' g + \int f \cdot g'$; $\int f \cdot g' = f \cdot g - \int f' \cdot g$

→ TEO: INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE

$\underset{A}{[a,b]}$ e $\underset{C}{[c,d]}$ $\varphi: C \to A$ derivabile e φ' è CONTINUA

$$\Rightarrow \forall f \text{ definita su } A \text{ e continua } \int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

es $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ $\varphi(t) = \operatorname{sen}(t)$ $\varphi'(t) = \cos(t)$ $a = \varphi(c)$; $b\ \varphi(d)$

$0 = \operatorname{sen}(0)$, $1 = \operatorname{sen}(\pi/2)$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\operatorname{sen}^2(t)} \cdot \cos(t)\,dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (1-\cos(2t))\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left[t - \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2t)\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\cancel{0} - \cancel{0} - \frac{1}{2}\cancel{\operatorname{sen}(0)}\right] = \pi/4$$

INTEGRAZIONE IN 2 VARIABILI

Domini piani normali

Sia $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, $\alpha, \beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue e t.c. $\alpha(x) \le \beta(x)\ \forall x \in [a,b]$

Chiamiamo → $\boxed{D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b,\ \alpha(x) \le y \le \beta(x)\}}$

DOMINIO NORMALE RISPETTO ALL' ASSE x

Definiamo AREA di D la quantità:

$$A(D) = \int_a^b [\beta(x) - \alpha(x)]\,dx \ge 0$$

In modo analogo definiamo un DOMINIO NORMALE RISPETTO ALL'ASSE y:

$[c,d] \subseteq \mathbb{R}$; $\gamma, \delta : [c,d] \to \mathbb{R}$ e tali che $\gamma(y) \le \delta(y)\ \forall y \in [c,d]$

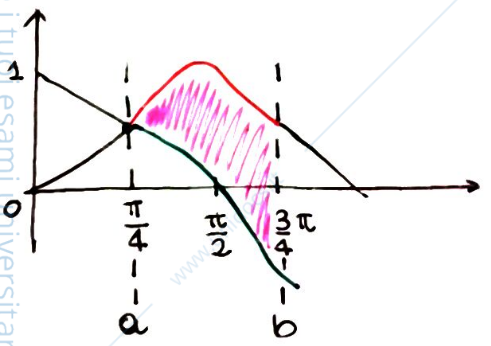
$$\boxed{E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \le y \le d,\ \gamma(y) \le x \le \delta(y)\}}$$

$$\Rightarrow A(E) = \int_c^d [\delta(y) - \gamma(y)]\,dy$$

NB: I domini normali sono COMPATTI (chiusi e limitati) e CONNESSI (NON sono unioni disgiunte di più insiemi)

es) CALCOLARE L'AREA DEL SOTTOINSIEME DI $\mathbb{R}^2$:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\pi}{4} \le x \le \frac{3}{4}\pi,\ \underbrace{\cos(x)}_{\alpha(x)} \le y \le \underbrace{\operatorname{sen}(x)}_{\beta(x)}\}$$



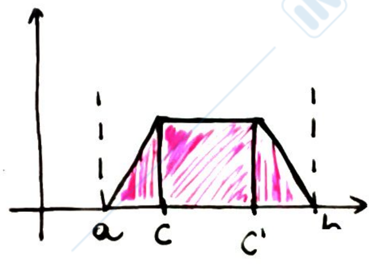
$$A(D) = \int_{\pi/4}^{3/4\pi} [\operatorname{sen}(x) - \cos(x)]\,dx = [-\cos(x) - \operatorname{sen}(x)]_{\pi/4}^{3/4\pi} =$$

$$= -\cos\left(\tfrac{3}{4}\pi\right) - \operatorname{sen}\left(\tfrac{3}{4}\pi\right) + \cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right) + \operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{4}\right)$$

$$= \sqrt{2}$$

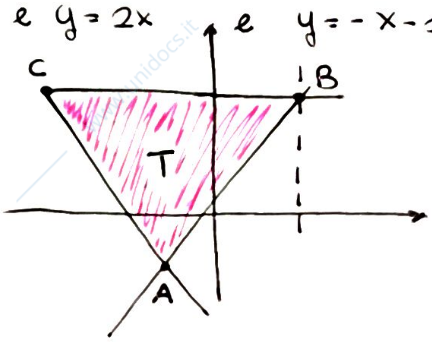
• DEF: Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ unione finita di domini normali con parti interne a due a due disgiunte. A è detto DOMINIO REGOLARE

AREA di UN DOMINIO REGOLARE ⇒ $A(A) = \sum_{i=1}^{m} A(D_j)$



è NORMALE rispetto all'asse x? NO
è " " " " y? SI
è un dominio regolare su x? SI

es Calcolare l'area del triangolo T definito dalla retta $y-2=0$ e $y=2x$ e $y=-x-1$



Dominio normale rispetto all'asse y:

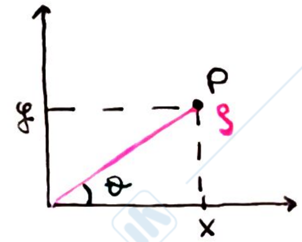
$$T=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 .\ Ay \le y \le 2,\ -y-1 \le x \le \frac{y}{2}\right\}$$

$$A(T)=\int_{Ay}^{2}\left[\frac{y}{2}+y+1\right]dx = \dots$$

· COORDINATE POLARI

Vogliamo riprodurre per f di 2 variabili il metodo di sostituzione

Sia il punto P di $\mathbb{R}^2 \Rightarrow P=(x,y)$ disterà da O una quantità ρ (RO)



$$\boxed{\begin{aligned} x &= \rho \operatorname{sen}(\theta) \\ y &= \rho \cos(\theta) \end{aligned}}$$ → coordinate polari

$$\begin{cases} x^2 = \rho^2 \cos^2(\theta) \\ y^2 = \rho^2 \operatorname{sen}^2(\theta) \end{cases} \quad ; \quad x^2+y^2 = \rho^2 \underbrace{(\cos^2(\theta) + \operatorname{sen}^2(\theta))}_{1}$$

$$\Rightarrow x^2+y^2 = \rho^2$$

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) \\ y = \rho \operatorname{sen}(\theta) \end{cases}$$

Si definisca MATRICE JACOBIANA del cambio di coordinate

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\rho \operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \rho\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Regione infinitesima di superficie $dA = dx\,dy$

In coordinate polari $dA = \underbrace{\det(J)}_{\rho}\, d\rho\, d\theta = \rho\, d\rho\, d\theta$

$$A(D) = \iint_D dx\,dy = \iint_{D'} \rho\, d\rho\, d\theta$$

D' → È LA SCRITTURA di D IN COORDINATE POLARI

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \Rightarrow \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D'} f(\rho\cos(\theta), \rho \operatorname{sen}(\theta))\,\rho\, d\rho\, d\theta$$

Es. L'area del settore circolare S di raggio r e ampiezza α

$$S=\{(\rho,\theta)\in\mathbb{R}^2 : 0\le\rho\le r,\ 0\le\theta\le\alpha\}$$

$$A(S)=\iint_S \rho\, d\rho\, d\theta=\int_0^r \rho\, d\rho\int_0^\alpha d\theta=\int_0^r \rho\, d\rho\cdot\alpha=\alpha\frac{r^2}{2}$$

$\Rightarrow$ area cerchio: $\alpha=2\pi \Rightarrow A(C)=2\pi\frac{r^2}{2}=\pi r^2$

Es. $f(x,y)=\frac{1}{1+x^2+y}$

$\iint_V f(x,y)\,dx\,dy$ dove $V=$ corona circolare delimitata dalle circonferenze di raggio 1 e 3

$$V=\{(\rho,\theta)\in\mathbb{R}^2 : 1\le\rho\le 3,\ 0\le\theta\le 2\pi\}$$

$$\iint_V f(x,y)\,dx\,dy=\int_1^3 d\rho\cdot\rho\int_0^{2\pi}\frac{1}{1+\rho^2}\,d\theta=\int_1^3\frac{\rho}{1+\rho^2}\,d\rho\int_0^{2\pi}d\theta=$$

$$=\frac{2\pi}{2}\int_1^3\frac{2\cdot\rho}{1+\rho^2}\,d\rho=\Big[\pi\ln(1+\rho^2)\Big]_1^3=\pi\ln\left(\frac{10}{2}\right)=\pi\ln(5)$$

Es x CASA

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\le x,\ x^2+y^2-2x-2y+1\le 0\}$$

$\iint_D xy\,dx\,dy$ $\quad$ hint. $\begin{cases} x=1+\rho\cos(\theta)\\ y=1+\rho\sin(\theta)\end{cases}$

BARICENTRO REGIONI PIANE

Sia D una regione piana compatta e connessa; definiamo il baricentro di D come il punto $P=(x_P, y_P)$ dove

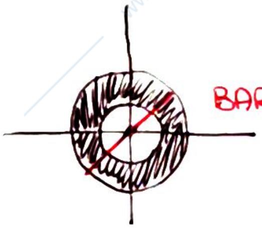
$$x_P = \frac{1}{A(D)} \iint_D x \, dx\, dy$$

$$y_P = \frac{1}{A(D)} \iint_D y \, dx\, dy$$

Proposizione: se r è ASSE DI SIMMETRIA di $D \Rightarrow P \in r$

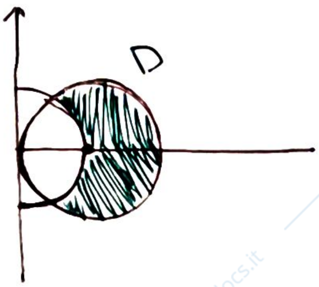
Il baricentro di una regione COMPATTA e CONNESSA non appartiene necessariamente alla regione stessa

→ ES. CORONA CIRCOLARE



BARICENTRO NON APPARTIENE ALLA FIGURA

ESERCIZIO



$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \, dx\, dy = \iint_{D'} \frac{1}{\rho} \cdot \rho \, d\rho\, d\vartheta =$$

$$= \iint_{D'} d\rho\, d\vartheta$$

$$D' = \left\{ (\rho, \vartheta) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le \rho \le 2 ,\ -\frac{\pi}{3} \le \vartheta \le \frac{\pi}{3} \right\}$$

$$\iint_{D'} d\rho\, d\vartheta = \int_1^2 d\rho \int_{-\pi/3}^{\pi/3} d\vartheta = \int_1^2 \frac{2}{3}\pi \, d\rho = \frac{2}{3}\pi$$