Analisi Matematica II
Raccolta di temi d'esame

Avvertenza

Il programma del corso di Analisi Matematica II è cambiato a partire dall'a.a. 2017–2018. Pertanto, nella presente raccolta

- gli esercizi sul calcolo differenziale in più variabili compaiono solo negli scritti a partire dall'a.a. 2017-2018
- alcuni esercizi riguardano argomenti che non fanno più parte del programma del corso. Questi sono preceduti da 3 asterischi.

Analisi Matematica 2 5 febbraio 2013

Nome, Cognome, Matricola:

Cognome del Docente:

Risposte. (Giusta = 3, non data = 0, sbagliata = −1)

Versione	Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Es. 5	Es. 6	Es. 7
1							

Esercizio 1. Sia $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 \le 1,\ 0 \le z \le 1\}$. Sia $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ il campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (3x + y + z^2, 2y^2 - 4z, x^2 + x^3y^3).$$

Il flusso del campo F uscente dal bordo di Ω vale

A) 9π

B) 6π

C) 3π

D) 12π

Esercizio 2. La serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} n \log^2\left(\frac{n^2-3}{n^2}\right)$

A) converge a un numero negativo

B) diverge a $-\infty$

C) diverge a $+\infty$

D) converge a un numero positivo

Esercizio 3. Siano γ_1 e γ_2 le circonferenze di centro $C = (2, 3)$ e raggi 4 e 6 rispettivamente, orientate entrambe in senso orario. Sia $F : \mathbf{R}^2 \setminus \{C\} \to \mathbf{R}^2$ un campo vettoriale C^1 su $\mathbf{R}^2 \setminus \{C\}$ e irrotazionale. Quale delle seguenti affermazioni è necessariamente vera?

A) $\displaystyle\oint_{\gamma_1} F \cdot dP = \oint_{\gamma_2} F \cdot dP$

B) $\displaystyle\oint_{\gamma_1} F \cdot dP = -\oint_{\gamma_2} F \cdot dP$

C) $\displaystyle\oint_{\gamma_1} F \cdot dP = \oint_{\gamma_2} F \cdot dP + 2\pi$

D) nessuna delle altre risposte è corretta

Esercizio 4. L'insieme di convergenza puntuale della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n \log n}{2^n + 3^n}(2x+6)^n$ è

A) $[-9/2, -3/2)$

B) $(-9/2, -3/2)$

C) $(-19/6, -17/6)$

D) $[-19/6, -17/6)$

Esercizio 5. Sia $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\,\}$. L'integrale

$$\int_\Omega (3x + 4y)\, dxdydz$$

vale

A) $3\pi/16$

B) $7\pi/16$

C) $5\pi/16$

D) $\pi/4$

***Esercizio 6.** La serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2 + \cos(nx))\, e^{-nx}}{n^2(1 + 3nx^2)}$$

A) non converge uniformemente su alcun intervallo

B) converge uniformemente su $\mathbf{R}$

C) converge uniformemente su $[-K, K]$, per ogni $K > 0$

D) converge uniformemente su $[0, +\infty)$

***Esercizio 7.** Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione 2π–periodica e continua su tutto $\mathbf{R}$. In queste ipotesi si può affermare che la serie di Fourier di f

A) converge a f puntualmente su $[-\pi, \pi]$

B) converge a f in L^2 su $[-\pi, \pi]$

C) converge a f uniformemente su $[-\pi, \pi]$

D) nessuna delle altre risposte è vera senza ulteriori ipotesi su f

---

Esercizio 8. (9 punti) Sia Σ la superficie definita da

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 6,\ z \leq \sqrt{2}\},$$

orientata in modo che il versore normale punti verso l'origine. Sia F il campo

$$F(x, y, z) = (2x + 4y,\ y^3,\ z \sin x - y \cos z).$$

Calcolare il flusso di $\operatorname{rot} F$ attraverso Σ.

Analisi Matematica 2 20 febbraio 2013

Nome, Cognome, Matricola:

Cognome del Docente:

Risposte. (Giusta = 3, non data = 0, sbagliata = −1)

Versione	Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Es. 5	Es. 6	Es. 7
1							

Esercizio 1. Sia $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 \le 4,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$. L'integrale

$$\int_D (3xy - 2x)\, dxdy$$

vale

A) -6

B) $-7/6$

C) $5/6$

D) $2/3$

Esercizio 2. La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{2n^4 + 3n + 6}$

A) diverge

B) converge assolutamente

C) converge, ma non converge assolutamente

D) è indeterminata

*****Esercizio 3.** La successione di funzioni di termine generale $f_n(x) = \dfrac{e^{nx}\cos x}{3 + e^{nx}}$

A) converge uniformemente su $[-K, K]$, per ogni $K > 0$

B) converge uniformemente su $\mathbf{R}$

C) converge puntualmente su $\mathbf{R}$, ma non uniformemente

D) converge uniformemente su $[-\pi/2, \pi/2]$

Esercizio 4. La serie di Taylor centrata in zero della funzione $f(x) = \log\left(\dfrac{2+4x}{3+3x}\right)$ è

A) $\log\dfrac{2}{3} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(2^n - 1)\frac{x^n}{n}$

B) $\log\dfrac{2}{3} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(4^n - 3^n)\frac{x^n}{n}$

C) $\log\dfrac{2}{3} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{4}{3}\right)^n\frac{x^n}{n}$

D) $\log\dfrac{2}{3} + \dfrac{4}{3}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$

Esercizio 5. Sia $\gamma : [0,1] \to \mathbf{R}^3$ la curva definita da $\gamma(t) = (t,\, t^2,\, t)$. Sia $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ il campo vettoriale

$$F(x,y,z) = (2e^{2x},\, 3e^{3z^2},\, e^{2y} - e^{2x^2}).$$

Il lavoro del campo F lungo la curva γ, orientata nel verso di t crescente, vale

A) $e^2 - e^3$

B) $e^2 - e^3 + 2$

C) $e^2 + e^3$

D) $e^2 + e^3 - 2$

Esercizio 6. Sia $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ una serie di potenze. Il raggio di convergenza della serie è, per definizione,

A) $\sup\limits_n |a_n|$

B) l'estremo superiore dell'insieme $\{t \in \mathbf{R} \mid \text{la serie converge in } x = t\}$

C) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$

D) l'insieme degli $x \in \mathbf{R}$ dove la serie converge

Esercizio 7. Sia $A \subset \mathbf{R}^2$ un insieme aperto. Sia $F : A \to \mathbf{R}^2$ un campo vettoriale di classe C^1 su A. Il campo F è detto conservativo su A se

A) l'integrale curvilineo di F su qualunque curva γ contenuta in A vale zero

B) l'insieme A è semplicemente connesso e $\operatorname{div} F = 0$ in A

C) $\operatorname{rot} F = 0$ in A

D) esiste una funzione $U : A \to \mathbf{R}$ di classe C^2 tale che $F(x,y) = \nabla U(x,y)$ per ogni $(x,y) \in A$

Esercizio 8. (9 punti) Sia Σ la superficie definita da

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z = 3 + 2x^2 + 2y^2,\ 4 \leq z \leq 6\}.$$

Calcolare

$$\int_\Sigma \frac{5x^2}{(x^2 + y^2)\sqrt{1 + 16x^2 + 16y^2}}\, d\sigma.$$

Analisi Matematica 2 4 luglio 2013

Nome, Cognome, Matricola:

Cognome del Docente:

Risposte. (Giusta = 3, non data = 0, sbagliata = −1)

Versione	Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Es. 5	Es. 6	Es. 7	Es. 8
1								

Esercizio 1. Sia $\Omega = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e sia $F : \Omega \to \mathbf{R}^2$ il campo vettoriale

$$F(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt[4]{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt[4]{x^2+y^2}} \right).$$

Sia $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^2$ la curva definita da $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

A) Il campo F è conservativo e quindi $\int_\gamma F \cdot dP = 0$

B) L'integrale di linea $\int_\gamma F \cdot dP$ non può essere nullo, poiché Ω non è semplicemente connesso

C) Il campo F non ammette potenziale e quindi $\int_\gamma F \cdot dP \neq 0$

D) Il campo F non è conservativo, tuttavia l'integrale di linea $\int_\gamma F \cdot dP = 0$

Esercizio 2. La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3(n!)}{2(n+2)! - 3(n+1)!}$

A) converge a un numero negativo

B) converge a un numero positivo

C) diverge a $+\infty$

D) diverge a $-\infty$

Esercizio 3. Sia $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq y \leq \cosh x,\ -1 \leq x \leq 1\}$. L'integrale

$$\int_D (4y - 5x)\, dxdy$$

vale

A) $2 + \sinh(2)$

B) $1 + 2\sinh(2)$

C) $\frac{1}{2}\cosh(2) + 2$

D) $2\sinh(2) + 4$

Esercizio 4. Sia $f(x) = \dfrac{x^2}{5x^2+3}$. La serie di MacLaurin di $f(x)$ e il suo raggio di convergenza R sono

A) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{5^n}{3^n}x^{2n}, \qquad R=\sqrt{3/5}$

B) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{5^n}{3^{n+1}}x^{2n+2}, \qquad R=1/\sqrt{5}$

C) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{5^n}{3^{n+1}}x^{2n+2}, \qquad R=\sqrt{3/5}$

D) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{5^n}{3^n}x^{2n}, \qquad R=1/\sqrt{5}$

Esercizio 5. Sia $A = \{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2\le 1,\ -1\le z\le 7-3x+y\}$.
Il flusso del campo

$$F(x,y,z) = (6x+\cos(zy),\ -5y-3e^x,\ xe^y+4zx)$$

attraverso il bordo di A, con la normale orientata verso l'esterno di A, vale

A) 4π

B) 8π

C) 3π

D) 5π

******Esercizio 6.*** La successione di funzioni $f_n(x) = n\arctan\left(\frac{4x}{n}\right)$

A) converge puntualmente a $\pi/2$ su $(0,+\infty)$ e a $-\pi/2$ su $(-\infty,0)$

B) converge uniformemente a $f(x)=4x$ su $\mathbf{R}$

C) converge puntualmente a $f(x)=\arctan(4x)$ su $\mathbf{R}$, ma non uniformemente

D) converge puntualmente a $f(x)=4x$ su $\mathbf{R}$, ma non uniformemente

---

Esercizio 7. Sia $f(x) = \begin{cases}\pi^2\cos x & \text{se } x\in(-\pi/2,\pi/2)\\ |x|-\frac{\pi}{2} & \text{se } x\in(-\pi,\pi]\setminus(-\pi/2,\pi/2)\end{cases}$. La serie di Fourier dell'estensione 2π–periodica di f è del tipo

A) $\displaystyle 1+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\cos(nx)$

B) $\displaystyle \pi^2+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\cos(nx)$

C) $\displaystyle \frac{9}{8}\pi+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\cos(nx)$

D) $\displaystyle \sum_{n=0}^{+\infty}b_n\sin(nx)$

Esercizio 8 (9 punti). Dato

$$V = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \ \mid \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, \ \ \sqrt{3(x^2 + y^2)} \leq z\right\},$$

calcolare

$$\int_V \frac{5zx^2}{x^2 + y^2}\, dxdydz.$$

Nome, Cognome, Matricola:

Cognome del Docente:

Esercizio 1. Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ la funzione $f(x,y,z) = \frac{1}{3}x^3 + y^2 z$ e sia $\gamma : [0,\pi] \to \mathbf{R}^3$ la curva $\gamma(t) = (\cos t,\ t\cos t,\ t + \sin t)$ orientata nel verso di t crescente. Il lavoro lungo γ del campo vettoriale $F = \nabla f$ vale

A) $\pi^3 - 2/3$

B) 0

C) $-1/3 - \pi^3$

D) π^3

Esercizio 2. Il raggio di convergenza della serie di potenze $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{4^n + 5^n} x^n$ è

A) $1/2$

B) $3/5$

C) $5/3$

D) 2

Esercizio 3. Sia $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \le 0,\ y \ge 0,\ 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}$. L'integrale

$$\int_D (xy^3 - x)\, dxdy$$

vale

A) $5/24$

B) 0

C) $-7/24$

D) $-1/24$

Esercizio 4. Sia $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leq 6\}$ e sia $\partial\Omega$ il bordo di Ω. Sia $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ un campo vettoriale di classe C^1. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

A) Il flusso di F uscente da $\partial\Omega$ è uguale a $\int_\Omega \operatorname{rot} F \cdot n\, dxdydz$, dove n è il versore normale esterno a $\partial\Omega$

B) Il flusso del rotore di F uscente da $\partial\Omega$ è uguale a $\int_\Omega \operatorname{div} F\, dxdydz$

C) Il flusso di F uscente da $\partial\Omega$ è uguale a $\int_\Omega \operatorname{rot} F\, dxdydz$

D) Il flusso di F uscente da $\partial\Omega$ è uguale a $\int_\Omega \operatorname{div} F\, dxdydz$

Esercizio 5. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos\left(\frac{3}{4n}\right) \sin\left(\frac{2}{n}\right)$

A) converge assolutamente

B) converge, ma non assolutamente

C) diverge a $+\infty$

D) è indeterminata

*****Esercizio 6.** Sia $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 2xy - 6y$. Sul bordo del triangolo T di vertici $O = (0, 0)$, $A = (2, 0)$, $B = (0, 2)$,

A) f non ha né massimo né minimo

B) il valore minimo di f è 0 e il valore massimo di f è 4

C) il valore minimo di f è -16 e il valore massimo di f è 4

D) il valore minimo di f è $-9/2$ e il valore massimo di f è 4

*****Esercizio 7.** Dato il sistema $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$ dove $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ quale delle seguenti affermazioni è corretta?

A) tutte le soluzioni tendono al vettore nullo per $t \to +\infty$

B) tutte le soluzioni sono limitate per $t \in [0, +\infty)$

C) ci sono soluzioni che crescono esponenzialmente per $t \to +\infty$

D) $\begin{cases} x_1(t) = 1 \\ x_2(t) = 2\,e^{-2t} \end{cases}$ è una soluzione

---

Esercizio 8 (9 punti). Sia $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 2\}$. Sia Σ il grafico della funzione $f : A \to \mathbf{R}$ definita da $f(x,y) = e^{2x+y}$. Calcolare l'integrale di superficie

$$\int_\Sigma \frac{xy^2}{\sqrt{1+5z^2}}\, d\sigma.$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Analisi Matematica 2 4 settembre 2013

Nome, Cognome, Matricola:

Cognome del Docente:

Risposte. (Giusta = 3, non data = 0, sbagliata = −1)

Versione	Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Es. 5	Es. 6	Es. 7	Es. 8
1								

Esercizio 1. Sia $R_a = 5$ il raggio di convergenza della serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, e $R_b = 3$ il raggio di convergenza della serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$. Allora il raggio di convergenza R_{a+b} della serie somma $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$ vale

A) $R_{a+b} = 3$

B) $R_{a+b} = 5$

C) $R_{a+b} = 8$

D) $R_{a+b} = 2$

Esercizio 2. Sia $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} \sin nx$ la serie di Fourier di una funzione $f : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}$. Detta $\|f\|_2$ la norma quadratica di f, si ha

A) $\|f\|_2 = \sqrt{\frac{\pi}{24}}$

B) $\|f\|_2 = 3\sqrt{\frac{\pi}{24}}$

C) $\|f\|_2 = \frac{1}{8}\sqrt{\pi}$

D) $\|f\|_2 = \frac{3}{8}\sqrt{\pi}$

***__Esercizio 3.__ La successione di funzioni $f_n(x) = |x - 1|^n$ converge per $n \to +\infty$ alla funzione nulla $f(x) = 0$

A) uniformemente sull'intervallo $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$

B) puntualmente ma non uniformemente sull'intervallo $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$

C) uniformemente sull'intervallo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

D) puntualmente ma non uniformemente sull'intervallo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

Esercizio 4. Sia $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ e sia Σ il supporto della superficie $\sigma : D \to \mathbf{R}^3$ definita da $\sigma(x, y) = (x, y, 7 + 2x^2 + 2y^2)$. L'area di Σ vale

A) $\pi(17^{3/2} - 1)/24$

B) $\pi/8$

C) $\pi(13^{3/2} - 1)/6$

D) $\pi(17^{3/2} - 1)$

Esercizio 5. Sia $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,:\, 2(x^2 + y^2) \leq z \leq 12 - x^2 - y^2\}$. Il volume di Ω vale

A) 24π

B) 16π

C) 48π

D) 8π

Esercizio 6. Sia $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,:\, 0 \leq x, y, z \leq 2\}$ il cubo di lato 2. Il flusso del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (\frac{1}{6}x^2yz,\ \frac{1}{4}xy^2z,\ \frac{1}{12}xyz^2)$$

uscente da Ω vale

A) 8

B) 2

C) -4

D) -2

Esercizio 7. La circuitazione del campo vettoriale

$$F(x, y) = \left(y - \frac{x}{\sqrt{2 - 4x^2 - y^2}},\ x - \frac{y}{\sqrt{2 - 4x^2 - y^2}} \right)$$

lungo l'ellisse di equazione $4x^2 + y^2 = 1$ percorsa in senso antiorario vale

A) 0

B) 2

C) -2

D) 4

Esercizio 8 (9 punti). Sia dato il campo vettoriale

$$F(x,y) = \big(\sin(x+2y) + x\cos(x+2y) + 3y^2 + 5,\ 2x\cos(x+2y) + \lambda xy\big)\,.$$

a) Determinare λ in modo che il campo sia conservativo.

b) Con tale valore di λ, trovare un potenziale del campo.

Analisi Matematica 2 3 febbraio 2014

Nome, Cognome, Matricola:

Cognome del Docente:

Risposte. (Giusta = 3, non data = 0, sbagliata = −1)

Versione	Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Es. 5	Es. 6	Es. 7
1							

*****Esercizio 1.** Se il raggio di convergenza della serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-b)^n$ è 5, allora necessariamente

A) la serie converge puntualmente e uniformemente in $[b-5, b+5]$

B) la serie converge puntualmente e uniformemente in $[b-4, b+3]$

C) la serie converge puntualmente in $[b-5, b+5]$

D) la serie converge puntualmente in $(-5, 5)$

Esercizio 2. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione 2π–periodica e integrabile su $[-\pi, \pi]$, e sia

$$S = \sqrt{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{2})^n}{(\sqrt{3})^n} \cos nx$$

la sua serie di Fourier. Detto $\|f\|_2^2$ il quadrato della norma quadratica di f su $[\pi, \pi]$, si ha

A) $\|f\|_2^2 = 5\pi$

B) $\|f\|_2^2 = 9\pi$

C) $\|f\|_2^2 = 5$

D) $\|f\|_2^2 = 8\pi$

*****Esercizio 3.** Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia $f_n : [4, +\infty) \to \mathbf{R}$ la funzione $f_n(x) = \dfrac{(2+\sin x)^n}{1+x^n}$. Per $n \to \infty$, la successione f_n converge

A) puntualmente a zero sull'intervallo $[4, +\infty)$, ma non uniformemente

B) uniformemente a zero sull'intervallo $[4, +\infty)$

C) uniformemente a zero su tutti gli intervalli $[4, K]$, con $K > 4$, ma non su $[4, +\infty)$

D) puntualmente a $f(x) = \dfrac{2}{x}$ sull'intervallo $[4, +\infty)$, ma non uniformemente

Esercizio 4. Sia $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 9(x-3)^2 + 36(y-6)^2 \leq 1\}$ e sia Σ il sostegno della superficie $\sigma : D \to \mathbf{R}^3$ definita da $\sigma(x,y) = (x, y, x+2y)$. L'area di Σ vale

A) $\frac{\pi}{6}$

B) $\pi\sqrt{10}$

C) $\pi\frac{\sqrt{11}}{18}$

D) $\pi\frac{\sqrt{6}}{18}$

Esercizio 5. Sia $D \subset \mathbf{R}^2$ una lamina con densità di massa $\sigma(x,y) = x^2 \sin y$. La coordinata x_G del baricentro di D è

A) $\dfrac{\int_D x^3 \sin y \, dxdy}{\int_D x^2 \sin y \, dxdy}$

B) $\dfrac{\int_D x \sin y \, dxdy}{\int_D \sin y \, dxdy}$

C) $\dfrac{\int_D x^3 \sin y \, dxdy}{\int_D \, dxdy}$

D) $\dfrac{\int_D x \, dxdy}{\int_D x^2 \sin y \, dxdy}$

Esercizio 6. Sia $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 3z^2, \; 0 \leq z \leq 2\}$. Il flusso del campo vettoriale

$$F(x,y,z) = \left(x + \cos(yz) - z^3 e^y, \quad ze^x + y + x^3, \quad x^3y^2 + \sin(xy)\right)$$

uscente da Ω vale

A) 18π

B) 24π

C) 16π

D) 20π

Esercizio 7. La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(ne^{\frac{3}{n}} - n\right)\left(\sin\frac{\alpha}{n} - \frac{5}{n}\right)$

A) converge se e solo se $\alpha \neq 5$

B) converge se e solo se $\alpha < 5$

C) converge se e solo se $\alpha = 5$

D) converge se e solo se $\alpha > 5$

Esercizio 8 (9 punti). Sia $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ il campo vettoriale

$$F(x, y, z) = \left(e^y + \alpha y,\ xe^y + e^z + 2x + \beta yz,\ ye^z + 3y^2\right).$$

a) Determinare $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ in modo che il campo sia conservativo.

b) Con tali valori di α e β, trovare il potenziale $U(x, y, z)$ che vale 10 nel punto $(1, 0, 2)$.

b) Calcolare il lavoro compiuto da F lungo la curva $\gamma : [0, 1] \to \mathbf{R}^3$ definita da $\gamma(t) = \left(t, \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right), \sqrt{t}\right)$.

Analisi Matematica 2 21 febbraio 2014

Nome, Cognome, Matricola:

Cognome del Docente:

Risposte. (Giusta = 3, non data = 0, sbagliata = −1)

Versione	Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Es. 5	Es. 6	Es. 7
1							

*****Esercizio 1.** Sia $f:(-\pi,\pi]\to\mathbf{R}$ la funzione $f(x)=\begin{cases}1-|x| & \text{se } |x|\le 1\\ x^4-1 & \text{se } |x|>1\end{cases}$. La serie di Fourier dell'estensione 2π–periodica di f su $\mathbf{R}$

A) è del tipo $\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin(nx)$ e converge a f puntualmente ma non uniformemente in $[-\pi,\pi]$

B) è del tipo $a_0+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx)$ e converge a f puntualmente ma non uniformemente in $[-\pi,\pi]$

C) è del tipo $\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin(nx)$ e converge uniformemente a f in $[-\pi,\pi]$

D) è del tipo $a_0+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx)$ e converge uniformemente a f in $[-\pi,\pi]$

Esercizio 2. Sia Q un punto di $\mathbf{R}^2$ e siano dati i campi $F:\mathbf{R}^2\setminus Q\to\mathbf{R}^2$, di classe C^1 e conservativo, e $G:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$, di classe C^1 e irrotazionale. Sia $A\subset\mathbf{R}^2$ un cerchio, e ∂A il suo bordo. Supponiamo che $Q\notin\partial A$. Allora

A) $\oint_{\partial A}(4F+2G)\cdot dP=0$

B) $4F+2G$ non è conservativo in $\mathbf{R}^2\setminus Q$

C) $4F+2G$ non è irrotazionale in $\mathbf{R}^2\setminus Q$

D) $\oint_{\partial A}(4F+2G)\cdot dP=0$ se e solo se $Q\notin A$

Esercizio 3. L'insieme di convergenza puntuale della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2 6^n+n3^n}{(2+16x^2)^n}$ è

A) $(1/2,+\infty)$

B) $(-1/2,1/2)$

C) $[-1/2,1/2]$

D) $(-\infty,-1/2)\cup(1/2,+\infty)$

Esercizio 4. Sia $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid \frac{1}{16}x^2 + y^2 + z^2 = 6,\ x \leq 4\}$, e sia $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ il campo vettoriale definito da

$$F(x, y, z) = (3x^2yz,\ 5xz,\ 2xy).$$

Il flusso del rotore di F attraverso Σ, orientata in modo che il versore normale punti verso l'interno dell'ellissoide che definisce Σ, vale

A) -48π

B) 60π

C) -60π

D) 48π

Esercizio 5. Sia $f : [0, 1] \times [0, 3] \to \mathbf{R}$ la funzione $f(x, y) = x^3 + 3y^2$ e sia Σ il suo grafico. L'integrale

$$\int_\Sigma \frac{5x + 2y}{\sqrt{1 + 9x^4 + 36y^2}}\, d\sigma$$

vale

A) 16

B) 33/2

C) 15

D) 80/3

Esercizio 6. La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 5^n \left(\frac{a+n}{n}\right)^{n^2}$

A) converge se $a < 0$

B) converge se $a < 5$

C) converge se $a < \log \frac{1}{5}$

D) converge se $a < \log 5$

*****Esercizio 7.** La serie di funzioni $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\sin(nx)}}{(4 + 2x)^n}$

A) converge puntualmente in $[0, +\infty)$, ma non uniformemente

B) converge uniformemente in $[0, +\infty)$

C) converge uniformemente in $[0, K]$ per ogni $K > 0$, ma non in $[0, +\infty)$

D) non converge puntualmente in tutto $[0, +\infty)$

Esercizio 8 (9 punti). Sia $\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 16,\ z \leq \sqrt{x^2+y^2}\right\}$. Sia $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ il campo vettoriale defnito da $F(x,y,z) = \left(zy^2 - 2x,\ \frac{1}{4}yz + z^2,\ xy + 2x^2 + 2z\right)$. Calcolare il flusso di F uscente da Ω.

Analisi Matematica 2 3 luglio 2014

Nome, Cognome, Matricola:

Cognome del Docente:

Risposte. (Giusta = 3, non data = 0, sbagliata = −1)

Versione	Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Es. 5	Es. 6	Es. 7
1							

***__Esercizio 1.__ Se la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge in $x = 5$, allora necessariamente

A) la serie converge puntualmente in $[-5, 5]$

B) la serie converge uniformemente in $[-5, 5]$

C) la serie converge uniformemente in $(-5, 5)$

D) la serie converge uniformemente in $[-k, k]$ per ogni $k \in (0, 5)$

Esercizio 2. Sia $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 \le y \le 4x^2,\ 2x \le y \le 3x\}$ e sia $I = \int_D \frac{x}{y}\,dxdy$. Usando il cambio di variabile $x = v/u, \quad y = v^2/u$ si ha

A) $I = \int_2^3 \int_1^4 \frac{1}{v}\,dudv$

B) $I = -\int_2^3 \int_1^4 \frac{v}{u^3}\,dudv$

C) $I = \int_2^3 \int_1^4 \frac{v}{u^3}\,dudv$

D) $I = \int_2^3 \int_1^4 vu^2\,dudv$

Esercizio 3. L'insieme di convergenza della serie $\sum_{n=0}^{\infty} n(2x + 7)^n$ è

A) $(-4, -3)$

B) $[-4, -3)$

C) $(-1, 1)$

D) $[-1, 1)$

***Esercizio 4.** La successione di funzioni $f_n(x) = \dfrac{nx^2+3}{2nx^2+5}$

A) converge uniformemente su $\mathbf{R}$

B) converge uniformemente su $[-K, K]$ per ogni $K > 0$, ma non su $\mathbf{R}$

C) converge puntualmente su $\mathbf{R}$, ma non uniformemente

D) converge puntualmente su $[-1/2, 1/2]$, ma non su $\mathbf{R}$

Esercizio 5. Sia $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid y \geq x,\ x \geq 1,\ y \leq 4/x\}$. L'integrale $\displaystyle\int_D (3x - 6y)\ dxdy$ vale

A) -8

B) -12

C) 6

D) 8

Esercizio 6. La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\log(n+4)}{n+3}$

A) diverge

B) converge assolutamente

C) è indeterminata

D) converge, ma non converge assolutamente

Esercizio 7. Sia $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid 5 \leq z \leq 6 - \sqrt{x^2+y^2}\}$ e sia $F : \Omega \to \mathbf{R}^3$ il campo vettoriale $F(x,y,z) = (2x - y^2,\ 4zx^2,\ -2xy^3)$. Il flusso di F uscente da Ω vale

A) π

B) $4\pi/3$

C) $2\pi/3$

D) 2π

Esercizio 8 (9 punti). Data la superficie $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=4,\ y \geq 0\}$, orientata in modo che il versore normale formi un angolo acuto con l'asse y, calcolare il flusso del rotore del campo vettoriale

$$F(x,y,z) = \left(xz+2z,\ x^2e^{-y},\ z^2\right)$$

attraverso Σ.

Analisi Matematica 2 17 luglio 2014

Nome, Cognome, Matricola:

Cognome del Docente:

Risposte. (Giusta = 3, non data = 0, sbagliata = −1)

Versione	Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Es. 5	Es. 6	Es. 7
1							

Esercizio 1. Sia $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 2,\ 0 \le y \le x\}$. L'integrale $\int_D xy^2\,dxdy$ vale

A) 4/15

B) 1/15

C) 3

D) 2/15

Esercizio 2. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{2-n^4}$

A) converge

B) diverge a $+\infty$

C) diverge a $-\infty$

D) è indeterminata

Esercizio 3. Sia $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 3+x\}$. Il flusso del campo vettoriale $F(x,y,z) = (e^y + \sin z,\ 2x^2 - e^z,\ e^x + 3z)$ uscente dal bordo di Ω vale

A) 21

B) 18

C) 24

D) 14

Esercizio 4. Sia $f : (-\pi, \pi] \to \mathbf{R}$ la funzione $f(x) = x\cos x$. La serie di Fourier dell'estensione 2π–periodica di f a tutto $\mathbf{R}$ è del tipo

A) $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx), \quad a_0 \neq 0$

B) $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx), \quad a_0 \neq 0$

C) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$

D) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$

Esercizio 5. Il lavoro compiuto dal campo vettoriale $F(x,y) = (2x, x-y)$ lungo la curva $\gamma : [0,1] \to \mathbf{R}^2$ definita da $\gamma(t) = (e^t, 2t)$ vale

A) $-e^2 + 2e + 1$

B) $e^2 + 2e - 5$

C) $2e + 1$

D) $e^2 - 2e - 1$

Esercizio 6. Se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ ha come raggio di convergenza $R_a > 0$ e la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ ha come raggio di convergenza $R_b > 0$, allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) x^n$ ha come raggio di convergenza un R che verifica

A) $R = \min\{R_a, R_b\}$

B) $R \geq \min\{R_a, R_b\}$

C) $R = R_a + R_b$

D) $R = R_a - R_b$

Esercizio 7. Sia $U : \mathbf{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$ la funzione $U(x,y) = \dfrac{1+x^3}{x^2+y^2}$ e sia $F(x,y) = \nabla U(x,y)$. Allora

A) Il campo vettoriale F è conservativo in $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$

B) Il campo vettoriale F è irrotazionale in $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ ma non conservativo

C) Il campo vettoriale F non è irrotazionale in $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$

D) Il campo vettoriale F è conservativo in $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ ma non irrotazionale

---

***Esercizio 8 (9 punti).** Sia E l'ellisse di equazione $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ e sia $f(x, y) = x^2 + 5x$. Trovare il minimo e il massimo assoluto di f vincolata ad E.

Analisi Matematica 2 11 settembre 2014

Nome, Cognome, Matricola:

Cognome del Docente:

Risposte. (Giusta = 3, non data = 0, sbagliata = −1)

Versione	Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Es. 5	Es. 6	Es. 7
1							

Esercizio 1. L'insieme di convergenza puntuale della serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+5n+6}(x-2)^n$ è

A) $(-1, 1)$

B) $(1, 3)$

C) $[1, 3)$

D) $[-1, 1)$

Esercizio 2. Sia $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 5,\ y \geq \sqrt{3}|x|\}$. L'integrale $\int_D \sin(x^2 + y^2)dxdy$ vale

A) $2\pi(\cos 5 - 1)/6$

B) $-\pi \cos 5$

C) $-(\cos 5 - 1)/6$

D) $-\pi(\cos 5 - 1)/6$

Esercizio 3. La serie $\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n \frac{\log 3n}{2n}$

A) converge, ma non assolutamente

B) converge assolutamente

C) diverge

D) è indeterminata

Esercizio 4. Il flusso del campo $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$,

$$F(x, y, z) = (z^2 \sin y^3, \cos\sqrt{x} + \log(z^2 + 2), 2z^3 + \cos y^2)$$

uscente dall'insieme $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, y \geq 0, z \geq 0\}$ vale

A) $-\pi/15$

B) $\pi/10$

C) $2\pi/5$

D) $\pi/5$

Esercizio 5. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la funzione periodica di periodo 2π che sull'intervallo $(-\pi, \pi]$ vale

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{se } x \in (-\pi, 0] \\ x - 2 & \text{se } x \in (0, \pi]. \end{cases}$$

Il coefficiente b_1 della serie di Fourier di f vale

A) $-\frac{2}{\pi} - 2$

B) $-\frac{8}{\pi} + 2$

C) $\frac{8}{\pi} - 4$

D) $\frac{2}{\pi} - 4$

Esercizio 6. Sia $\gamma : [0, 3] \to \mathbf{R}^2$ la curva definita da $\gamma(t) = \big(2t, t^2 + 3t\big)$. La lunghezza del sostegno di γ è data da

A) $\displaystyle\int_0^3 \sqrt{4t^2 + 12t + 13}\, dt$

B) $\displaystyle\int_0^3 \sqrt{4t^2 + t^4 + 16t^2}\, dt$

C) $\displaystyle\int_0^3 \sqrt{2t^2 + 4}\, dt$

D) nessuna delle altre risposte

***__Esercizio 7.__ Si dice che una successione di funzioni $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ converge uniformemente su $\mathbf{R}$ alla funzione f se

A) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N \in \mathbf{N}$ tale che per ogni $n \geq N$, si ha $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$

B) per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $x \in \mathbf{R}$ esiste $N \in \mathbf{N}$ tale che per ogni $n \geq N$, si ha $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$

C) per ogni $x \in \mathbf{R}$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N \in \mathbf{N}$ tale che per ogni $n \geq N$, si ha $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$

D) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N \in \mathbf{N}$ tale che per ogni $n \geq N$ e ogni $x \in \mathbf{R}$, si ha $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$

Esercizio 8 (9 punti). Sia $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ il campo vettoriale

$$F(x, y, z) = \left(2xy^3 \sin z,\, 3x^2y^2 \sin z,\, x^2y^3 \cos z\right).$$

a) Trovare un potenziale di F.

b) Calcolare il lavoro compiuto da F lungo la curva $\gamma : [0, 1] \to \mathbf{R}^3$ definita da $\gamma(t) = (t, \sqrt{t}, \frac{\pi}{2}t)$.

Nome, Cognome, Matricola:

Cognome del Docente:

Risposte. (Giusta = 3, non data = 0, sbagliata = −1)

Versione	Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Es. 5	Es. 6	Es. 7
1							

Esercizio 1. Sia $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione C^1 e sia $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ il campo vettoriale

$$F(x,y) = \big((3x^2y^3 + 2xy^3)\varphi(x)\, ,\, 3x^2y^2\varphi(x) \big).$$

Per quale delle seguenti scelte di φ il campo F è conservativo in $\mathbf{R}^2$?

A) $\varphi(x) = e^{2x}$

B) $\varphi(x) = e^{3x}$

C) $\varphi(x) = e^{-3x}$

D) $\varphi(x) = e^{-2x}$

******Esercizio 2.*** La serie di Fourier della funzione $f(x) = |1 - x^2|$ su $[-\pi, \pi]$, estesa per periodicità a tutto $\mathbf{R}$

A) converge in norma quadratica a $f(x)$ in $[-\pi, \pi]$ ma non puntualmente

B) converge puntualmente ma non uniformemente a $f(x)$ in $[-\pi, \pi]$

C) converge uniformemente a $f(x)$ su $[-\pi, \pi]$

D) non converge a $f(x)$ in $x = -1$ e $x = 1$

Esercizio 3. La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{3/2}\left(e^{3/n} - 1\right)}{\log\left(2^n + 5\right)}$$

A) diverge a $+\infty$

B) diverge a $-\infty$

C) converge a un numero positivo

D) converge a un numero negativo

*****Esercizio 4.** Sia $D = \{(u, v) \in \mathbf{R}^2 \mid 2 \leq u \leq 3,\ 4 \leq v \leq 7\}$ e sia Σ il sostegno della superficie $\sigma : D \to \mathbf{R}^3$ definita da $\sigma(u, v) = (u \log v,\ u,\ v)$, orientata in modo che il versore normale formi un angolo acuto con l'asse x. Il flusso attraverso Σ del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (y^2,\ \frac{3y}{x},\ yz)$$

vale

A) -3

B) -6

C) -15

D) -9

*****Esercizio 5.** La successione di funzioni $f_n : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$,

$$f_n(x) = \frac{3ne^{2x} + 2}{2ne^{2x} + 5}$$

A) converge uniformemente su $[K, +\infty)$ per ogni $K > 0$, ma non su $[0, +\infty)$

B) converge puntualmente su $[0, +\infty)$ ma non uniformemente

C) converge uniformemente su $[0, K]$ per ogni $K > 0$, ma non su $[0, +\infty)$

D) converge uniformemente su $[0, +\infty)$

Esercizio 6. Il lavoro compiuto dal campo vettoriale $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ definito da

$$F(x, y) = \left(3xe^{x^2} + 4y^4,\ 16xy^3 - 6ye^{y^2}\right)$$

lungo la curva $\gamma(t) = (3t(1-t),\ 2t^{3/2})$, $t \in [0, 1]$, vale

A) $3e^4 - 1$

B) $e^2 - 1$

C) $3(1 - e^4)$

D) $3 - e^4$

Esercizio 7. L'insieme di convergenza puntuale della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + n^4}{(2n)^5 + 6^n} 2^{(x-4)n}$ è

A) $(-\infty, 5]$

B) $(-\infty, 5)$

C) $(-\infty, 2)$

D) $(-\infty, 2]$

Esercizio 8 (9 punti). Sia

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x \geq 1,\ y \geq 4,\ 16(x-1)^2 + (y-4)^2 \leq 16,\ y-7 \leq z \leq y+1\}$$

e sia $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ il campo vettoriale

$$F(x,y,z) = \left(2xy - xe^y,\ xz - y^2,\ ze^y + \frac{1}{2}xz\right).$$

Calcolare il flusso di F uscente da Ω.

Analisi Matematica 2 20 febbraio 2015

Nome, Cognome, Matricola:

Cognome del Docente:

Risposte. (Giusta = 3, non data = 0, sbagliata = −1)

Versione	Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Es. 5	Es. 6	Es. 7
1							

Esercizio 1. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione 2π-periodica tale che $f(x) = \frac{\pi}{2} - |x|$ per $x \in [-\pi, \pi]$. La ridotta $S_1(x)$ di indice 1 della serie di Fourier di f è:

A) $\frac{2}{\pi} \cos x$

B) $-\frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \cos x$

C) $\frac{4}{\pi} \cos x$

D) $-\frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} (\cos x - \sin x)$

Esercizio 2. La somma della serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{-2n}}{2^{2-n}}$ vale:

A) $\frac{1}{e^2 (e^2 - 2)}$

B) $\frac{e^2}{4 (e^2 - 2)}$

C) $\frac{1}{2 (e^2 - 2)}$

D) $\frac{4}{e^2 (e^2 - 2)}$

Esercizio 3. Il lavoro del campo vettoriale $F(x, y) = (e^{x^2+5}, 6e^{xy} + e^{y^2-5})$ lungo la frontiera del quadrato $D = [0, 3] \times [0, 3]$ percorsa in senso orario vale:

A) $2 \left(e^8 - 9\right)$

B) $3 \left(e^6 - 7\right)$

C) $3 \left(5 - e^4\right)$

D) $2 \left(10 - e^9\right)$

Esercizio 4. Sia $F:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}^2$ un campo vettoriale di classe C^1 su $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ e sia Γ la circonferenza $x^2+y^2=3$. Se $\displaystyle\int_\Gamma F\cdot dP=1$, allora è necessariamente vero che:

A) F non è irrotazionale su $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

B) F non è conservativo sulla corona circolare $1<x^2+y^2<2$

C) F non è conservativo sulla corona circolare $1<x^2+y^2<4$

D) nessuna delle altre affermazioni è necessariamente vera

Esercizio 5. La coordinata z del baricentro dell'insieme

$$A=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2\le 4,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0\right\}$$

(con densità di massa costante) vale:

A) 1

B) $3/4$

C) $\pi/2$

D) $3\pi/2$

Esercizio 6. La serie di MacLaurin della funzione $\displaystyle f(x)=\int_0^x t^{13}\log(1+2t^2)\,dt$ è:

A) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\,2}{n\,(2n+13)}\,x^{2n+13}$

B) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\,2^{n-1}}{n\,(n+7)}\,x^{2n+14}$

C) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\,2^{n}}{n\,(2n+13)}\,x^{2n+13}$

D) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\,(n+7)}\,x^{2n+14}$

Esercizio 7. Siano $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ e $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ due serie di potenze con raggi di convergenza R_1 ed R_2, rispettivamente. Se $0<R_1<R_2<+\infty$, allora la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(2a_n-b_n)\,x^n$ ha raggio di convergenza:

A) R_1

B) R_2

C) $\dfrac{R_1+R_2}{2}$

D) $2R_1-R_2$

Esercizio 8 (9 punti). Sia $\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = \frac{1}{4}\sqrt{x^2+y^2} - \frac{1}{4},\ 0 \leq z \leq \frac{1}{2}\right\}$. Calcolare il flusso del rotore del campo

$$F(x,y,z) = e^{x^2+y^2}\left(2yz,\ 3z,\ \frac{1}{2}x + z\right)$$

attraverso Σ, orientata in modo che la normale formi un angolo ottuso con l'asse z.

Analisi Matematica 2 — 1 luglio 2015

Nome, Cognome, Matricola:

Cognome del Docente:

Risposte. (Giusta = 3, non data = 0, sbagliata = −1)

Versione	Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Es. 5	Es. 6	Es. 7
1							

Esercizio 1. Sono dati:

– un aperto semplicemente connesso $\Omega \subset \mathbf{R}^2$;

– un campo vettoriale C^1 e conservativo $F : \Omega \to \mathbf{R}^2$, $F(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y))$.

Posto $G(x,y) = \Big(F_1(x,y) + \cos x^3,\ F_2(x,y) - \arctan y^2\Big)$, quale delle seguenti affermazioni è corretta?

A) Esiste una curva chiusa, semplice e regolare γ con sostegno in Ω tale che $\int_\gamma G \cdot dP \neq 0$.

B) Per ogni curva chiusa, semplice e regolare γ con sostegno in Ω si ha che $\int_\gamma G \cdot dP \neq 0$.

C) Per ogni curva semplice e regolare γ con sostegno in Ω si ha che $\int_\gamma G \cdot dP = 0$.

D) Per ogni curva chiusa, semplice e regolare γ con sostegno in Ω si ha che $\int_\gamma G \cdot dP = 0$.

Esercizio 2. Sia (a_k) una successione reale e sia $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. La serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ si dice convergente se

A) Esiste $\lim_{n\to\infty} S_n$.

B) $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

C) La successione S_n ha limite finito.

D) La successione S_n è limitata.

Esercizio 3. Sia $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid \frac{1}{16}x^2 + (y-5)^2 \leq 1,\ x \leq 0\}$. L'integrale

$$\int_D (2x - y)\, dxdy$$

vale

A) $\frac{64}{3} + 10\pi$

B) $-\frac{64}{3} - 10\pi$

C) $\frac{1}{3} + 5\pi$

D) $\frac{3}{2} + 10\pi$

Esercizio 4. L'insieme di convergenza puntuale della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n (x-3)^n$ è

A) $(3/2, 9/2)$

B) $(3/2, 9/2]$

C) $[3/2, 9/2)$

D) $[3/2, 9/2]$

Esercizio 5. Sia A il quadrilatero di vertici $A = (1,0)$, $B = (2,0)$, $C = (2,2)$, $D = (1,2)$. La circuitazione del campo

$$F(x,y) = (14xe^{5y} - 3y + 5, 35x^2e^{5y} + 2x + 1)$$

sul bordo di A orientato in senso antiorario vale

A) -5

B) -10

C) 5

D) 10

Esercizio 6. La serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!}{(n+1)! - n!}$$

A) converge a un limite finito non nullo

B) è indeterminata

C) diverge a $+\infty$

D) converge a zero

*****Esercizio 7.**
La successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{nx+3}{nx^4+1}$$

A) converge puntualmente su $\mathbf{R}$ ma non uniformemente

B) converge uniformemente su ogni intervallo $[-a, a]$ ma non su $\mathbf{R}$

C) converge uniformemente su $\mathbf{R}$

D) converge puntualmente a 3 su $\mathbf{R}$

Esercizio 8. (9 punti) Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = \left(\frac{1}{3}x^3 + z^7, -x^3 + 3y^3z^2, x^3y^2 - 3y^2z^3\right)$$

uscente dal bordo dell'insieme

$$D = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 3 \le x^2 + y^2 \le 5,\ 0 \le z \le 4\right\}.$$

Analisi Matematica 2 16 luglio 2015

Nome, Cognome, Matricola:

Cognome del Docente:

Risposte. (Giusta = 3, non data = 0, sbagliata = −1)

Versione	Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Es. 5	Es. 6	Es. 7
1							

Esercizio 1. Il lavoro del campo $F(x, y, z) = (z,\ y^4,\ 2x)$ lungo la curva $\gamma : [0, 1] \to \mathbf{R}^3$ definita da $\gamma(t) = (t^2,\ 3,\ 2t)$, vale

A) $4/3$

B) $8/3$

C) $2/3$

D) 0

Esercizio 2. La serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n - 4 - e^{-n}}{n^2 + n - 1}$

A) è indeterminata

B) diverge a $-\infty$

C) converge

D) diverge a $+\infty$

*****Esercizio 3.** Una delle soluzioni del sistema di equazioni differenziali

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{u}$$

è

A) $\vec{u} = (0, 0, 1)\mathrm{e}^t$

B) $\vec{u} = (3, 3, 3)\mathrm{e}^t$

C) $\vec{u} = (1, 1, 1)$

D) $\vec{u} = (3, 0, 3)\mathrm{e}^t$

Esercizio 4. Il campo vettoriale $F(x,y) = \left(\dfrac{6y}{9x^2+4y^2}\,,\ \dfrac{-6x}{9x^2+4y^2}\right)$ su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

A) non è irrotazionale

B) è conservativo, ma non è irrotazionale

C) non è irrotazionale e non è conservativo

D) è irrotazionale, ma non è conservativo

Esercizio 5. La coordinata z del baricentro dell'insieme

$$A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \le 16,\ z \ge 0\right\}$$

(con densità di massa costante) vale

A) $3/2$

B) $3/4$

C) $\pi/2$

D) $3\pi/4$

Esercizio 6. Il flusso del campo vettoriale

$$F(x,y,z) = \left(xe^{y^2},\ z+3y,\ -ze^{y^2}\right)$$

uscente dal bordo del cubo $Q = [0,2] \times [0,2] \times [0,2]$, vale

A) 24

B) 18

C) 0

D) 3

Esercizio 7. Siano $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ e $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ due serie di potenze con raggi di convergenza R_1 ed R_2, rispettivamente. Se $0 < R_1 < R_2 < +\infty$, allora la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (3a_n + 5b_n)\, x^n$ ha raggio di convergenza

A) $\dfrac{3R_1 + 5R_2}{2}$

B) R_2

C) R_1

D) $3R_1 + 5R_2$

Esercizio 8 (9 punti). Sia $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| - 1 \leq y \leq 1 - x,\ -1 \leq x \leq 1\}$. Calcolare

$$\int_A y\, dxdy.$$

Analisi Matematica 2 14 settembre 2015

Nome, Cognome, Matricola:

Cognome del Docente:

Risposte. (Giusta = 3, non data = 0, sbagliata = −1)

Versione	Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Es. 5	Es. 6	Es. 7
1							

*****Esercizio 1.** Sia Σ il sostegno della superficie $\sigma : [0,2] \times [0,3] \to \mathbf{R}^3$ definita da $\sigma(u,v) = (u,\, v,\, 2u^2v)$. L'integrale

$$\int_\Sigma \frac{4u}{\sqrt{1+16u^2v^2+4u^4}} d\sigma$$

vale

A) 18

B) 24

C) 12

D) 6

Esercizio 2. Sia $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ continua. L'integrale $\displaystyle\int_1^2 \int_0^3 f(2x,3y)\, dy\, dx$ è uguale a

A) $\displaystyle\int_2^4 \int_0^9 f(x,y)\, dy\, dx$

B) $\displaystyle 6\int_2^4 \int_0^9 f(x,y)\, dy\, dx$

C) $\displaystyle \frac{1}{6}\int_1^2 \int_0^3 f(x,y)\, dy\, dx$

D) $\displaystyle \frac{1}{6}\int_2^4 \int_0^9 f(x,y)\, dy\, dx$

Esercizio 3. La circuitazione del campo $F(x,y) = \big(\sin(xy) + xy\cos(xy),\, x^2\cos(xy)\big)$ lungo la curva $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbf{R}^2$ definita da $\gamma(t) = (3\cos t, 4\sin t)$ vale

A) -2π

B) π

C) 0

D) 1

Esercizio 4. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-6}{2n+3}\right)^n$

A) diverge a $-\infty$

B) diverge a $+\infty$

C) converge

D) è indeteminata

*****Esercizio 5.** La successione di funzioni $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f_n(x) = 4 - \cos(x - n)$$

A) converge puntualmente su $[0, 2\pi]$

B) converge puntualmente su $\mathbf{R}$ ma non uniformemente

C) converge uniformemente su $\mathbf{R}$

D) non converge in nessun punto di $\mathbf{R}$

Esercizio 6. Sia $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ una serie di potenze tale che $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{16}$. Allora il raggio di convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 x^n$

A) è 16^2

B) è 4

C) è 16

D) non si può calcolare senza ulteriori informazioni

Esercizio 7. La serie di MacLaurin della funzione $f(x) = x(\log(2+x) - \log 2)$ è

A) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{2n} - x \log 2$

B) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{2n}$

C) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n2^n}$

D) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n x^{n+1}}{n}$

Esercizio 8 (9 punti). Sia

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\}.$$

Calcolare

$$\int_\Omega \frac{5x}{x^2 + y^2 + z^2}\, dxdydz.$$

Analisi Matematica 2 — 2 febbraio 2016

Cognome: .... Nome: .... Matricola: ....

Corso di Laurea: ◯ Biomedica ◯ Meccanica

Risposte (giusta = 3, non data = 0, sbagliata = −1)

Versione	Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Es. 5	Es. 6	Es. 7
1							

Esercizio 1. Sia $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ (x+2)^2+y^2 \leq 4, \ 0 \leq 3y \leq \sqrt{3}(x+2), \ 4(x+4) \leq z \leq 5(x+4)\}$ e sia $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ il campo vettoriale

$$F(x,y,z) = \big(xe^y,\, 3y - xe^z,\, 3y - ze^y\big).$$

Il flusso di F uscente da Ω vale

A) $2\pi - 4$

B) $2\pi + 4$

C) $4\pi + 2$

D) $4\pi - 4$

Esercizio 2. La serie $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}(n+3)^2 \sin\left(\frac{4}{n^3}\right) \log\left(1 - \frac{2}{n}\right)$

A) diverge a $+\infty$

B) converge a un numero positivo

C) converge a un numero negativo

D) diverge a $-\infty$

Esercizio 3. L'insieme di convergenza puntuale della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)! - (n-1)!}{(3^n+2)(n-1)!} e^{nx}$$

A) è $(-\infty, \log 3)$

B) è $(-\infty, \log 3]$

C) è $(-\infty, 3]$

D) è $(-\infty, 3)$

Esercizio 4. Sia $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ il campo vettoriale $F(x,y) = (3x^2 \cos y + 2\cos x, -x^3 \sin y)$ e sia $\gamma : [0,\pi] \to \mathbf{R}^2$ la curva $\gamma(t) = (t, (\pi - t)^2)$. Il lavoro compiuto da F lungo γ vale

A) π^3

B) $2\pi^3$

C) π^2

D) $3\pi^2$

*****Esercizio 5.** La serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log^3 n}{n^3 + 2n^2 + 3} \cos(n!\, x)$$

A) converge a zero perché $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log^3 n}{n^3 + 2n^2 + 3} \cos(n!\, x) = 0$ per ogni $x \in \mathbf{R}$

B) converge uniformemente su $\mathbf{R}$ ma la sua somma non è una funzione continua

C) converge puntualmente su $\mathbf{R}$ ma non uniformemente

D) converge uniformemente su $\mathbf{R}$ e la sua somma è una funzione continua

---

Esercizio 6. Siano γ_1 e γ_2 le circonferenze di raggio 2 centrate rispettivamente in $(0,0)$ e in $(8,6)$, entrambe orientate in senso antiorario. Sia $F : \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbf{R}^2$ un campo C^1 e conservativo. Le circuitazioni di F lungo γ_1 e γ_2

A) sono diverse da zero e di segno opposto

B) sono uguali, ma possono essere diverse da zero

C) valgono entrambe zero

D) sono diverse, perché una vale zero e l'altra no

*****Esercizio 7.** Sia $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ una serie di funzioni. Si dice che la serie converge uniformemente in $A \subset \mathbf{R}$ se

A) la successione delle ridotte è limitata su A

B) la successione delle ridotte converge uniformemente su A

C) la successione f_n converge uniformemente a zero su A

D) per ogni n esiste M_n tale che $|f_n(x)| \le M_n \;\; \forall x \in A$ e $M_n \to 0$ per $n \to \infty$

*****Esercizio 8 (9 punti).** Sia Σ il sostegno della superficie $\sigma : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbf{R}^3$ definita da

$$\sigma(u, v) = \big((2 + \cos u)\cos v,\ (2 + \cos u)\sin v,\ \sin u\big).$$

Calcolare

$$\int_\Sigma \frac{3x}{2 + \sqrt{1 - z^2}}\, d\sigma.$$

Analisi Matematica 2 — 13 febbraio 2016

Nome, Cognome, Matricola:

Cognome del Docente:

Risposte (giusta = 3, non data = 0, sbagliata = −1)

Versione	Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Es. 5	Es. 6	Es. 7
1							

Esercizio 1. Sia $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \ x \geq 0, \ y \geq 0, \ 3x + y \leq 1, \ 0 \leq z \leq 3\}$. L'integrale $\int_\Omega [3x(z-3)^2 + z] \, dxdydz$ vale

A) 5

B) 5/2

C) 15/4

D) 5/4

Esercizio 2. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{7^{nx}}{n^4 + 7^n}$ converge se e solo se

A) $x < 7$

B) $x < 1$

C) $|x| < 1/7$

D) $|x| < 7$

Esercizio 3. Sia Σ la porzione di superficie di equazione $z = 16 - x^2 - y^2$ che giace sopra il piano $z = 0$, con versore normale n che forma un angolo ottuso con l'asse z. Sia

$$F(x, y, z) = (y, \, -4yz, \, 4(e^z - 1)^2).$$

L'integrale $\int_\Sigma \operatorname{rot} F \cdot n \, d\sigma$ vale

A) -16π

B) 16π

C) 4π

D) -4π

Esercizio 4. Sia $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \ x \geq 0, \ y \geq 0, \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 16, \ z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\}$, e sia $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ il campo

$$F(x, y, z) = \Big(zy, \ \frac{3}{4}y, \ x^2 + y^2\Big).$$

Il flusso di F uscente dal bordo di Ω vale

A) $-16\pi(2 - \sqrt{2})$

B) $16\pi(2 - \sqrt{2})$

C) $4\pi(2 - \sqrt{2})$

D) $2\pi(2 - \sqrt{2})$

Esercizio 5. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la funzione periodica, di periodo 2π, data da $f(x) = 9x + 7\pi$ se $x \in [-\pi, \pi)$. Allora, la serie di Fourier di f nel punto $x = -\pi$

A) converge a 16π

B) converge a -2π

C) converge a 7π

D) non converge

Esercizio 6. Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ una serie di potenze tale che $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1/R$, con $R > 0$. Allora la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big[(-1)^n \Big(\frac{3}{2}\Big)^n a_n + \Big(\frac{3}{R}\Big)^n\Big] x^n$$

ha raggio di convergenza

A) $R/3$

B) $R/6$

C) $2R/3$

D) R

*****Esercizio 7.** La successione di funzioni $f_n : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$, definita da $f_n(x) = \frac{3}{n} \log\left(e^{3nx} + 5\right)$

A) converge uniformemente in $[0, +\infty)$

B) converge puntualmente in $[0, +\infty)$ ma non uniformemente

C) converge uniformemente in $[0, K]$ per ogni $K > 0$, ma non in $[0, +\infty)$

D) converge uniformemente in $[K, +\infty)$ per ogni $K > 0$, ma non in $[0, +\infty)$

Esercizio 8. (9 punti) Si consideri il seguente campo vettoriale nel piano:

$$F(x,y) = \Big(\frac{3}{3x-y} + 2xe^{y-3},\ \frac{1}{y-3x} + x^2e^{y-3}\Big).$$

a) Dire se F è conservativo sull'aperto $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \ y > 3x\}$ e, in caso affermativo, determinarne tutti i potenziali.

b) Sia $\gamma(t) = (t, 6 + t^2(t-1))$, $t \in [0,1]$. Calcolare il lavoro compiuto da F lungo γ.

Cognome: .... Nome: .... Matricola: ....

Corso di Laurea: ◯ Biomedica ◯ Meccanica

Risposte (giusta = 3, non data = 0, sbagliata = −1)

Versione	Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Es. 5	Es. 6	Es. 7
1							

Esercizio 1. Sia $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \; x-1 \le y \le 2(x-1), \; 1 \le x \le 2, \; 0 \le z \le 1\}$. L'integrale

$$\int_\Omega (3y + 5z)\, dxdydz$$

vale

A) $13/2$

B) $11/4$

C) 6

D) $13/3$

Esercizio 2. La serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^{2nx}}{4^{5n} + \log(n+2)}$ converge se e solo se

A) $x < 5/2$

B) $x < \log 4$

C) $|x| < 2$

D) $|x| < \log 8$

Esercizio 3. Sia Σ la porzione della superficie di equazione $x^2+y^2+z^2 = 10$ che giace sopra il piano $z = 1$, orientata in modo che il versore normale n formi un angolo acuto con l'asse z. Sia $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ il campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (3(1-z)\sin y, \; x, \; 5y(e - e^z)).$$

Il flusso del rotore di F attraverso Σ vale

A) 0

B) 10π

C) 9π

D) 3π

Esercizio 4. Sia $\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ 0 \le x \le 2,\ y \ge 0,\ 0 \le z \le 1 - \frac{y}{3}\right\}$, e sia $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ il campo $F(x,y,z) = \left(7\pi z^3,\, 3y,\, 4x^3y^2\right)$. Il flusso di F uscente dal bordo di Ω vale

A) 3

B) 6

C) 9

D) 0

Esercizio 5. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la funzione 2π–periodica, data da

$$f(x) = \begin{cases} 2\pi + 2x & \text{se} \quad -\pi \le x < 0 \\ 2\pi - 2x & \text{se} \quad 0 \le x \le \pi. \end{cases}$$

Allora la serie di Fourier di f è del tipo

A) $\pi + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx), \qquad a_n \in \mathbf{R}$

B) $2\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx), \qquad a_n \in \mathbf{R}$

C) $\pi + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx), \qquad a_n \in \mathbf{R}$

D) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right), \qquad a_n, b_n \in \mathbf{R}$

Esercizio 6. Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ una serie di potenze tale che $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{R}$, con $R > 0$. Allora la serie di potenze $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} x^n$ ha raggio di convergenza

A) $3/R$

B) $1/3R$

C) $R/3$

D) $3R$

***__Esercizio 7.__ La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{nx}}$

A) converge semplicemente e assolutamente solo se $x > 2$

B) non converge per nessun valore di x

C) converge semplicemente e assolutamente per ogni $x > 0$

D) converge semplicemente, ma non assolutamente, per ogni $x > 0$

Esercizio 8. (9 punti) Sia $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ y \geq x(x-2),\ y \leq x,\ y \leq (x-2)^2\}$ e sia $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ il campo vettoriale

$$F(x, y)) = \left(e^{x^2} + x^2 - 2y,\ e^{y^2} + 2y^2 + 4x\right).$$

Calcolare la circuitazione di F lungo il bordo di D, orientato in senso antiorario.

Cognome: .... Nome: .... Matricola: ....

Corso di Laurea: ◯ Biomedica ◯ Meccanica

Risposte (giusta = 3, non data = 0, sbagliata = −1)

Versione	Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Es. 5	Es. 6	Es. 7
1							

Esercizio 1. Sia $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1, \ x \geq 0, \ y \geq 0\}$. L'integrale $\displaystyle\int_D xy^3\,dxdy$ vale

A) 18

B) 4

C) 12

D) 6

Esercizio 2. La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n} + \sin\frac{4}{\sqrt{n}}\right)^{\alpha}$ converge se e solo se

A) $\alpha > 2$

B) $\alpha < 2$

C) $\alpha > 1$

D) $\alpha < 1$

Esercizio 3. Sia $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie a termini di segno qualunque tale che $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Allora, necessariamente,

A) la serie converge semplicemente ma non assolutamente

B) la serie converge assolutamente

C) non vale nessuna delle altre risposte

D) la serie diverge

Esercizio 4. Il flusso del campo vettoriale $F(x, y, z) = (-3x^2, 5y^2, 2z^3)$ uscente dall'insieme $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \; : \; x^2 + y^2 \leq 4, \; 1 \leq z \leq 2\}$ vale

A) 48π

B) 24π

C) 56π

D) 36π

Esercizio 5. Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ una serie di potenze con $a_n \geq 0$ per ogni n e raggio di convergenza $R > 1$. Allora la serie numerica $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$

A) converge assolutamente

B) converge semplicemente ma non assolutamente

C) non converge

D) nessuna delle altre risposte è corretta

Esercizio 6. Siano γ_1 e γ_2 le circonferenze di raggio 2 centrate rispettivamente in $(5, 9)$ e in $(8, 6)$, entrambe orientate in senso antiorario. Sia $F : \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbf{R}^2$ un campo C^1 irrotazionale. Le circuitazioni di F lungo γ_1 e γ_2

A) sono non nulle e di segno opposto

B) valgono entrambe zero

C) sono uguali ma non nulle

D) sono in generale diverse

***__Esercizio 7.__ La successione di funzioni $f_n(x) = \dfrac{n^2 x^4 + 2x^2 + 1}{1 + n^4 x^2}$

A) converge uniformemente in $\mathbf{R}$

B) converge puntualmente in $\mathbf{R}$ ma non uniformemente

C) converge uniformemente in $[-K, K]$ per ogni $K > 0$, ma non in $\mathbf{R}$

D) non converge puntualmente in $\mathbf{R}$

*****Esercizio 8 (9 punti).** Sia Σ il sostegno della superficie $\sigma : [0,1] \times [1,3] \to \mathbf{R}^3$ definita da

$$\sigma(u,v) = \big(u,\, v,\, uv^2\big).$$

a) Scrivere il modulo del vettore normale a Σ in un generico punto di Σ.

b) Calcolare

$$\int_\Sigma \frac{2y+3z}{\sqrt{1+y^4+4x^2y^2}}\, d\sigma.$$

Cognome: .... Nome: .... Matricola: ....

Corso di Laurea: ◯ Biomedica ◯ Meccanica

Risposte (giusta = 3, non data = 0, sbagliata = −1)

Versione	Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Es. 5	Es. 6	Es. 7
1							

Esercizio 1. L'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^5 2^n}{2\log n + 4^n} x^{n/5}$$

è

A) $[-32, 32)$

B) $(-2, 2)$

C) $(-32, 32)$

D) $[-2, 2)$

***__Esercizio 2.__ La successione di funzioni $f_n(x) = \dfrac{n|x| + 4}{(2 + n|x|)(3 + 2x^2)}$ converge

A) puntualmente su $\mathbf{R}$ e uniformemente su $(-\infty, -k] \cup [k, +\infty)$ per ogni $k > 0$, ma non su $\mathbf{R}$

B) uniformemente su $\mathbf{R}$

C) puntualmente su $\mathbf{R}$ e uniformemente su $[-k, k]$ per ogni $k > 0$, ma non su $\mathbf{R}$

D) puntualmente su $(-\infty, -k] \cup [k, +\infty)$ per ogni $k > 0$, ma non su $\mathbf{R}$

Esercizio 3. Sia $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 - x,\ z = xe^{4y}\}$. L'integrale

$$\int_\Sigma \frac{5x + 2y}{\sqrt{1 + e^{8y} + 16z^2}} d\sigma$$

A) vale $5/3$

B) vale $5/6$

C) vale $2/3$

D) vale $7/6$

Esercizio 4. Sia $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \; : \; y \leq 4 - x^2, \; y \leq 3x^2, \; y \geq x(x+2)\}$ e sia $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ il campo vettoriale

$$F(x, y) = \Big(e^x + 3y, \, 2y^3 + 2x \Big).$$

La circuitazione di F lungo il bordo di D, orientato in senso antiorario, vale

A) -4

B) -6

C) 2

D) 8

Esercizio 5. La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(3 \log \left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \right) + \sin \frac{4}{n} \right)^{\alpha}$ converge se e solo se

A) $\alpha > 2$

B) $\alpha > 3$

C) $\alpha > 1$

D) $\alpha > 4$

Esercizio 6. Sia $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ un aperto non vuoto e sia $F : \Omega \to \mathbf{R}^3$ un campo vettoriale di classe C^1. Dire che F è conservativo in Ω equivale a dire che

A) Ω è semplicemente connesso e F è irrotazionale in Ω

B) $\operatorname{rot} F(x, y, z) = 0$ per ogni $(x, y, z) \in \Omega$

C) esiste $U : \Omega \to \mathbf{R}$ tale che $\nabla U(x, y, z) = F(x, y, z)$ per ogni $(x, y, z) \in \Omega$

D) il lavoro compiuto da F lungo ogni curva regolare $\gamma : [a, b] \to \Omega$ è nullo

---

***__Esercizio 7.__ Sia $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ una serie di funzioni. Si dice che la serie converge uniformemente in $A \subset \mathbf{R}$ se

A) esiste $f : A \to \mathbf{R}$ tale che $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| = 0$

B) la successione delle ridotte converge uniformemente su A

C) la successione f_n converge uniformemente a zero su A

D) per ogni n esiste M_n tale che $|f_n(x)| \leq M_n \;\; \forall x \in A$ e $M_n \to 0$ per $n \to \infty$

Esercizio 8 (9 punti). Calcolare il flusso del rotore del campo $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definito da

$$F(x, y, z) = \big(5y(x - z),\, 2e^y,\, 3y(z - x)\big)$$

attraverso la superficie $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 6z,\ z \le x + 1\ \}$, orientata in modo che il versore normale formi un angolo acuto con l'asse z.

Cognome: .... Nome: .... Matricola: ....

Corso di Laurea: ◯ Biomedica ◯ Meccanica

Risposte (giusta = 3, non data = 0, sbagliata = −1)

Versione	Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Es. 5	Es. 6	Es. 7
1							

Esercizio 1. Considerate le serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(\log n + 3)}{n^3 + 2\log n} \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{3+\log n}}{n^2+2} \ ,$$

risulta che

A) la prima è convergente e la seconda è divergente

B) la prima è divergente e la seconda è convergente

C) sono entrambe divergenti

D) sono entrambe convergenti

Esercizio 2. Il baricentro del solido omogeneo (cioè con densità di massa costante) $A = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : 2\sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 3\}$ ha coordinate

A) $(0, 0, 3)$

B) $(0, 0, 9/4)$

C) $(0, 0, 9/2)$

D) $(0, 0, 2)$

Esercizio 3. Siano γ_1 e γ_2 le circonferenze di raggio 3 centrate rispettivamente in $(1, 1)$ e in $(-4, 1)$, orientate in senso opposto. Sia $F : \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ un campo vettoriale di classe $\mathcal{C}^1$ e conservativo. Le circuitazioni di F lungo γ_1 e γ_2

A) sono diverse da zero e di segno opposto

B) sono uguali e diverse da zero

C) valgono entrambe zero

D) sono diverse, perché una vale zero e l'altra no

Esercizio 4. Sia $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \;:\; x \geq 0\,,\; y \geq 0\,,\; 9x^2 + y^2 \leq 1\,,\; -4 \leq z \leq 4\}$ e sia $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ il campo vettoriale

$$F(x, y, z) = \Big(e^y + yz + 9x^3,\, y(2z + y^2) + \cos z,\, 4\sin x - z^2\Big).$$

Il flusso del campo F uscente da Ω è uguale a

A) π

B) $\pi/2$

C) $3\pi/4$

D) 6π

Esercizio 5. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione continua a tratti e periodica di periodo 2π. Sia

$$2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n/2}}{\sqrt{n!}} \cos(nx)$$

la sua serie di Fourier. Allora la norma quadratica di f sull'intervallo $[-\pi, \pi]$ vale

A) $\sqrt{\pi(6 + 2e^2)}$

B) $e\sqrt{\pi}$

C) $\sqrt{\pi(7 + e^2)}$

D) $\sqrt{\frac{\pi}{2}(7 + e^2)}$

Suggerimento: può essere utile ricordare lo sviluppo di Taylor di e^x.

*****Esercizio 6.** La successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{n}{x} \sin\left(\frac{x}{n}\right), \qquad n \geq 1, \quad x \in (0, \pi)\,,$$

A) converge uniformemente a $f(x) = 0$ su $(0, \pi)$

B) converge puntualmente ma non uniformemente a $f(x) = 0$ su $(0, \pi)$

C) non converge puntualmente su $(0, \pi)$

D) converge puntualmente a $f(x) = 1$ su $(0, \pi)$

*****Esercizio 7.** Sia $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$ una serie di potenze. Se la serie converge in un punto $a > 0$, allora

A) la serie converge uniformemente sull'intervallo $[-a, a]$

B) la serie converge uniformemente sull'intervallo $[0, a]$

C) la serie converge nel punto $-a$

D) la serie ha raggio di convergenza $R = a$

Esercizio 8 (9 punti). Sia $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ il campo vettoriale definito da

$$F(x, y, z) = \big(\sin y + 2bxz + ay,\ 2x + x\cos y,\ b(x^2 + y)\big),$$

dove a e b sono costanti.

(i) Determinare i valori di a e b in modo che $F(x, y, z)$ sia conservativo.

(ii) Per i valori di a e b determinati al punto (i), trovare il potenziale $U(x, y, z)$ del campo $F(x, y, z)$ tale che $U(0, 0, 0) = 0$.

(iii) Per i valori di a e b determinati al punto (i), calcolare il lavoro compiuto dal campo F lungo la curva $\gamma : [0, 1] \to \mathbf{R}^3$, definita da $\gamma(t) = \left(t, \frac{\pi}{2}t, 2t^3\right)$.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Cognome: .... Nome: .... Matricola: ....

Docente: ....

Corso di Laurea: ◯ Biomedica ◯ Elettrica ◯ Energetica ◯ Meccanica

Risposte (giusta = 3, non data = 0, sbagliata = −1)

Versione	Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Es. 5	Es. 6	Es. 7
1							

Esercizio 1. Sia $f(x) = x^2 \log\left(1 - \frac{x^3}{8}\right)$ e sia f' la sua derivata. Allora

A) $f'(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{n\,8^n} x^{3n+1}$ per ogni $x \in (-2, 2)$

B) $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{n\,8^n} x^{3n+1}$ per ogni $x \in [-2, 2)$

C) $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3n+2}{n\,8^n} x^{3n+1}$ per ogni $x \in (-2, 2\,]$

D) $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{3n+2}{n\,8^n} x^{3n+1}$ per ogni $x \in (-2, 2)$

Esercizio 2. Sia $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ 3y \geq 2x - 1, \ y \leq 2x + 1, \ y \leq 1\}$ e sia $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ il campo vettoriale definito da $F(x, y) = \left(x + 5xy, \, x^2 - 2y + 3\right)$. La circuitazione di F lungo il bordo di D, orientato in senso antiorario, vale

A) -2

B) 2

C) 6

D) -6

Esercizio 3. L'insieme di convergenza della serie di potenze $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n} - e^{1/n}\right) x^n$ è

A) $(-2, 2)$

B) $[-2, 2)$

C) $(-1, 1]$

D) $[-1, 1]$

Esercizio 4. Si consideri la superficie $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : z = x + y\,, x^2 + 9y^2 \leq 1\}$. L'integrale $\int_\Sigma (1 + z)\, d\sigma$ vale

A) $2\pi\sqrt{3}$

B) $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$

C) $\frac{\pi}{3}$

D) 2π

*******Esercizio 5.** La successione di funzioni $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $n \geq 1$, definita da

$$f_n(x) = \frac{2x^n}{n^2 + 3x^2}$$

A) non converge puntualmente su $(-1, 1)$

B) non converge nei punti $x = \pm 1$

C) converge puntualmente ed uniformemente su $[-1, 1]$

D) converge puntualmente ma non uniformemente su $\mathbf{R}$

Esercizio 6. Sia a_n, $n \geq 0$, una successione tale che $\lim_{n\to\infty} a_n = L \in \mathbf{R}$. Allora la somma della serie $\sum_{n=2}^{\infty} (a_{n+1} - a_n)$ vale

A) $L - a_0 - a_1$

B) 0

C) $L - a_2$

D) $L - a_1$

Esercizio 7. Il lavoro compiuto dal campo vettoriale $F : \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbf{R}^2$ definito da

$$F(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}\right)$$

lungo la circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ orientata in senso antiorario

A) vale 0 perché il campo è conservativo su $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

B) vale 0 per il teorema di Green

C) vale 2π

D) non si puó calcolare perché il campo non è definito in $(0, 0)$

Esercizio 8 (9 punti). Sia

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : \, x - 2 \leq z \leq \sqrt{x^2+y^2}\,,\, x^2+y^2 \leq 1\}$$

e sia $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ il campo vettoriale definito da

$$F(x,y,z) = \left(y^3 + e^{z^2},\, x + 5y^3,\, \cos x + 7y - 3z\right).$$

Calcolare il flusso di F uscente da D.

Cognome: .... Nome: .... Matricola: ....

Corso di Laurea: ◯ Biomedica ◯ Meccanica

Risposte (giusta = 3, non data = 0, sbagliata = −1)

Versione	Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Es. 5	Es. 6	Es. 7
1							

Esercizio 1. Sia $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ il campo definito da $F(x, y) = (3xy, 7y^2)$. Il lavoro di F lungo la curva $\gamma : [0, \pi/2] \to \mathbf{R}^2$ definita da $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$

A) vale 0

B) vale 3/2

C) vale 2/3

D) vale 4/3

Esercizio 2. Sia D il cerchio di centro $(4, 3)$ e raggio 2 e sia $F : D \to \mathbf{R}^2$ il campo

$$F(x, y) = \left(2xye^y,\, x^2e^y + x^2ye^y\right).$$

A) F è conservativo in D

B) F è irrotazionale ma non conservativo in D

C) F è conservativo ma non irrotazionale in D

D) F non è irrotazionale in D

Esercizio 3. Sia $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\, 0 \leq z \leq 2\}$. Il flusso del campo

$$F(x, y, z) = (2xy,\, 3yz,\, 4xz)$$

uscente da Ω

A) vale 4π

B) vale 2π

C) vale 6π

D) vale 8π

***Esercizio 4.** La successione di funzioni $f_n : [0,2] \to \mathbf{R}$, $n \geq 1$, definita da

$$f_n(x) = \begin{cases} e^{\frac{x}{n}} & \text{se } x \in [0,1] \\ \frac{3}{x^2+n} & \text{se } x \in (1,2]. \end{cases}$$

A) converge uniformemente solo su intervalli che non contengono il punto $x = 1$

B) converge puntualmente su $[0,2]$ ma non uniformemente

C) converge uniformemente su $[0,2]$

D) non converge puntualmente in $[1/2, 3/2]$

Esercizio 5. La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n}{\alpha n^3 + 4n^2 + 3}$ converge se e solo se

A) $\alpha \neq 0$

B) $\alpha > 0$

C) $\alpha > 1$

D) $\alpha = 0$

Esercizio 6. La circuitazione del campo $F(x,y) = (x^3, 3x^2 + 2y^2)$ lungo il bordo del quadrilatero D di vertici $(0,0)$, $(1,0)$, $(3,1)$, $(1,1)$, orientato in senso antiorario

A) vale 8

B) vale 12

C) vale 10

D) vale 16

Esercizio 7. L'insieme di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{3^n + 4^n} x^n$

A) è $[-3/4, 3/4]$

B) è $[-4/3, 4/3]$

C) è $(-3/4, 3/4)$

D) è $(-4/3, 4/3)$

Esercizio 8 (9 punti). Sia $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ il campo definito da

$$F(x, y, z) = \big(4xy,\, \alpha yz + 2x^2,\, 4y^2 + 2z\big)\,.$$

a) Determinare $\alpha \in \mathbf{R}$ in modo che F sia conservativo in $\mathbf{R}^3$.

b) Per tale valore di α, trovare un potenziale di F.

c) Calcolare il lavoro compiuto da F (con α determinato al punto a)) lungo la curva $\gamma : [0, 1] \to \mathbf{R}^3$ definita da $\gamma(t) = \big(t^3 - t^2, t^2 - t, (t - 1)\sin t\big)$.

Cognome: .... Nome: .... Matricola: ....

Risposte (giusta = 3, non data = 0, sbagliata = −1)

Versione	Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Es. 5	Es. 6	Es. 7
1							

Esercizio 1. La funzione $f(x,y) = \frac{1}{4}x^4 - 3xy + \frac{1}{2}y^2$

A) ha un punto di sella e due massimi locali

B) ha un minimo locale e un massimo locale

C) ha un minimo locale e due punti di sella

D) ha due minimi locali e un punto di sella

Esercizio 2. Sia $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \; : \; x^2+y^2+z^2 \leq 2, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0\}$. L'integrale

$$\int_\Omega x^5 yz \, dxdydz$$

A) vale $1/12$

B) vale $1/15$

C) vale $-1/15$

D) vale $-1/12$

Esercizio 3. Sia $Q = (2,3)$ e sia $F : \mathbf{R}^2 \setminus Q \to \mathbf{R}^2$ un campo vettoriale di classe C^1. Supponiamo che per ogni curva regolare semplice e chiusa γ che non passa per Q risulti $\oint_\gamma F \cdot dP = 0$. Allora

A) F non è conservativo in $\mathbf{R}^2 \setminus Q$ perché $\mathbf{R}^2 \setminus Q$ non è semplicemente connesso

B) F è conservativo in $\mathbf{R}^2 \setminus Q$

C) F non è irrotazionale in $\mathbf{R}^2 \setminus Q$

D) F è conservativo su insiemi che non contengono l'origine, ma non in $\mathbf{R}^2 \setminus Q$

Esercizio 4. Sia $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \;:\; z = 4 - 2\sqrt{x^2 + y^2}, \quad z \geq 3\}$ e sia $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ il campo vettoriale

$$F(x, y, z) = \left(-yz,\, xz,\, xyz^3\right).$$

Il flusso del rotore di F attraverso Σ, con versore normale orientato nel verso delle z positive, vale

A) π

B) 2π

C) $3\pi/2$

D) $5\pi/2$

Esercizio 5. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \left(n - \log\left(1 + e^n\right)\right)$

A) converge

B) diverge a $-\infty$

C) oscilla

D) diverge a $+\infty$

Esercizio 6. L'insieme di convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \log n}{6 + n^2 3^n} \left(e^x + 1\right)^n$ è

A) $(-\infty, \log 2)$

B) $[-\log 2, \log 2)$

C) $(-\infty, \log 2]$

D) nessuno degli altri

Esercizio 7. Sia $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ una serie a termini di segno qualunque. La serie converge se e solo se

A) $|a_k| < 1/k$ per ogni k

B) la successione delle somme ridotte $\sum_{k=0}^{n} a_k$ converge

C) $\lim_{k \to \infty} a_k = 0$

D) la successione delle somme ridotte $\sum_{k=0}^{n} |a_k|$ converge

---

Esercizio 8 (9 punti). Sia $\Sigma = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le x, \quad z = xy^2 + \frac{1}{2}x^3 \right\}$.
Calcolare

$$\int_\Sigma \frac{4x}{\sqrt{1 + 2x^4 + z^2 x^{-2} + 6x^2 y^2}} \, d\sigma$$

dettagliando i passaggi.

Cognome: .... Nome: .... Matricola: ....

Risposte (giusta = 3, non data = 0, sbagliata = −1)

Versione	Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Es. 5	Es. 6	Es. 7
1							

Esercizio 1. Sia $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : y - 1 \leq z \leq 1 + x^2 + y^2, \; x^2 + y^2 \leq 4\}$ e sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ il campo vettoriale definito da $F(x, y, z) = \big(yz, \, 2xz, \, 3xz\big)$. Il flusso di F uscente da Ω vale

A) 0

B) 1

C) −1

D) 2

Esercizio 2. La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n \sin\left(\frac{2n + \sqrt{2n}}{n^3 - \log(n^2)}\right)$

A) diverge a $+\infty$

B) converge

C) oscilla

D) diverge a $-\infty$

Esercizio 3. Sia $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; |x| \leq 2, \; -5x^2 \leq y \leq 0\}$ una lamina con densità di massa costante. Il baricentro di D è

A) $(0, -10)$

B) $(0, 0)$

C) $(-1, 5)$

D) $(0, -6)$

Esercizio 4. Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione 2π-periodica tale che $f(x) = \begin{cases} -x & \text{se } x \in (-\pi, 0) \\ 2\pi - x & \text{se } x \in [0, \pi] \end{cases}$, e sia $S(x)$ la somma della sua serie di Fourier. Allora

A) $S(0) = 2\pi$

B) $S(0) = \pi$

C) $S(0) = 0$

D) $S(0) = \pi/2$

Esercizio 5. Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ il campo definito da $F(x, y) = (xy, 2y^2 + 3x)$ e sia T il triangolo di vertici $A = (0, 0), B = (3, 0), C = (2, 1)$. La circuitazione di F lungo il bordo di T orientato in senso antiorario vale:

A) 4

B) 0

C) 2

D) nessuna delle altre risposte è corretta

Esercizio 6. Sia a_n una successione di numeri reali non nulli tale che $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 5$. Allora

A) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge

B) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a_n}{7^n}$ converge assolutamente

C) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{6^n}$ non converge

D) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n 5^n$ converge

Esercizio 7. Il polinomio di Taylor del secondo ordine centrato in $(0, 0)$ della funzione $f(x, y) = \log(1 + 2x + 5y)$ è

A) $2x + 5y - 2x^2 - \frac{25}{2}y^2$

B) $1 - 2x^2 - 10xy - \frac{25}{2}y^2$

C) $2x + 5y - 2x^2 - 10xy - \frac{25}{2}y^2$

D) $2x + 5y - 4x^2 - 20xy - 25y^2$

Esercizio 8 (9 punti). Sia $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z \leq 1, \ z \geq \sqrt{x^2 + y^2}, \ x^2 + y^2 - 2z + 1 \geq 0\}$. Calcolare

$$\int_{\Omega} 3\sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy\, dz$$

dettagliando i passaggi.

Cognome: .... Nome: .... Matricola: ....

Risposte (giusta = 3, non data = 0, sbagliata = −1)

Versione	Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Es. 5	Es. 6	Es. 7
1							

Esercizio 1. Sia $\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \le 4,\ z \ge \sqrt{x^2 + y^2}\right\}$. Il flusso uscente da Ω del campo vettoriale $F(x, y, z) = (y^2 z + 7, 10 - xz, 2xy + z^2)$ vale

A) 2π

B) 4π

C) 0

D) $4\pi\sqrt{2}$

Esercizio 2. Sia $f(x) = \cos(x^2) + \log(1 + 2x^4)$. La serie di MacLaurin di $g(x) = \int_0^x f(t)dt$ è:

A) $-x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{(2n)!} - \frac{2^n}{n} \right) x^{4n+1}$

B) $1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{(2n)!} - \frac{2^n}{n} \right) x^{4n}$

C) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1} \left(\frac{1}{(2n)!} - \frac{2^n}{n} \right) x^{4n}$

D) $x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1} \left(\frac{1}{(2n)!} - \frac{2^n}{n} \right) x^{4n+1}$

Esercizio 3. Sia $f(x, y) = 1 - \sqrt{4 - x^2 - y^2}$. Quale delle seguenti affermazioni è FALSA?

A) Il dominio di f è chiuso e limitato.

B) Il grafico di f è una semisfera.

C) f non ha punti di massimo.

D) $\nabla f(1, 1) = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.

Esercizio 4. Sia γ il sostegno di una curva regolare che unisce i punti $A = (0, -7/4)$ e $B = (\pi/6, 3)$, orientato da A a B. Il lavoro lungo γ del campo $F(x, y) = (\, e^x + 3y\cos(3x), \sin(3x)\,)$ vale

A) $e^{\pi/6} + \dfrac{17}{4}$

B) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

C) 3

D) $2 + e^{\pi/6}$

Esercizio 5. La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n^2 + n^{1/2}) - \log(n^2 + 3)}{n^{1/2}}$

A) converge

B) diverge a $-\infty$

C) è indeterminata

D) diverge a $+\infty$

Esercizio 6. Sia $D = \big\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 4x^2 + y^2 \leq 1,\ y \geq 0\big\}$. L'area della superficie

$$\Sigma = \big\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : (x, y) \in D,\ z = 2x - 3y + 1\big\}$$

vale

A) $\dfrac{\pi}{\sqrt{14}}$

B) $\dfrac{\pi}{2\sqrt{14}}$

C) $\dfrac{\sqrt{14}}{4}\,\pi$

D) $\dfrac{\sqrt{14}}{2}\,\pi$

Esercizio 7. Sia $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n$ una serie di potenze che converge per $x = 4$. Allora è necessariamente vero che la serie

A) converge assolutamente per $x = -2$

B) non converge per $x = 6$

C) converge per $x = -1$

D) ha raggio di convergenza $R > 4$

Esercizio 8 (9 punti). Sia $\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : z = 7 - 9(x^2 + y^2),\ z \geq -1\right\}$ e sia $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ il campo vettoriale definito da

$$F(x, y, z) = \Big((z + 4)y,\ y^2 - (z + 4)x,\ ze^{x^3+y^2}\Big).$$

Calcolare il flusso del rotore di F attraverso la superficie Σ, orientata in modo che il versore normale formi un angolo ottuso con l'asse z.

Cognome: .... Nome: .... Matricola: ....

Risposte (giusta = 3, non data = 0, sbagliata = −1)

Versione	Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Es. 5	Es. 6	Es. 7
1							

Esercizio 1. L'insieme di convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+4n+4}{n^3+5n^2+3n+7}(x+3)^n$ è

A) $[-4,-2]$

B) $(-4,-2)$

C) $(-4,-2]$

D) $[-4,-2)$

Esercizio 2. Sia $D = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\right\}$. L'integrale $\displaystyle\int_D \cos(4\,x^2+y^2)dxdy$ vale

A) $\dfrac{\pi}{8}\sin 4$

B) $\dfrac{\pi}{8}\cos 4$

C) 0

D) $-\dfrac{\pi}{8}\sin 4$

Esercizio 3. La serie $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{3n+5}\sin\frac{(2n+1)\pi}{2}$

A) diverge

B) converge assolutamente

C) converge, ma non assolutamente

D) è indeterminata

Esercizio 4. Sia F il campo vettoriale $F(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x} + y\,,\ \frac{1}{x}\cos\frac{y}{x} + x\right)$ e sia $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbf{R}^2$ la curva definita da $\gamma(t) = (2+\cos t, 2+\sin t)$. Il lavoro compiuto da F lungo γ vale

A) -2π

B) 2π

C) 0

D) 4π

Esercizio 5. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione periodica di periodo 2π e integrabile e sia

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}\cos nx + \frac{\pi}{n}\sin nx\right)$$

la sua serie di Fourier. Allora, per $n \geq 1$, l'integrale $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$ vale

A) $\frac{\pi}{n^2}$

B) $\frac{\pi}{n}$

C) $-\frac{\pi^2}{n}$

D) $\frac{1}{n^2} + \frac{\pi}{n}$

Esercizio 6. Sia $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbf{R}^3$ la curva definita da $\gamma(t) = \left(3\cos t, 3\sin t, t^2 - 9t\right)$. La lunghezza del sostegno di γ è data da

A) $\displaystyle\int_0^{2\pi} 2t\,dt$

B) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sqrt{4t^2 - 36t + 90}\,dt$

C) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sqrt{4t^2 + 36t + 90}\,dt$

D) nessuna delle altre risposte

Esercizio 7. Sia $f(x,y) = \frac{2}{x} - \frac{9}{y^2} - x + y$. La matrice Hessiana di f nel punto $(2,3)$ è

A) $\begin{pmatrix} -5/2 & 0 \\ 0 & 29/27 \end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -2/3 \end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & 2/27 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

Esercizio 8 (9 punti). Sia $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ il campo vettoriale definito da

$$F(x, y, z) = \Big(4xz + 2y^4,\ z^2 \log(x^2 + 1),\ \cos\sqrt{x^2 + y^2},\ \Big).$$

Calcolare il flusso di F uscente dall'insieme $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 3,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$.

Risposte 2012-2013

5 febbraio 2013

Versione	Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Es. 5	Es. 6	Es. 7	Es.8
1	C	D	A	B	B	D	B	-16π

20 febbraio 2013

Versione	Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Es. 5	Es. 6	Es. 7	Es.8
1	B	C	C	A	D	B	D	$5\pi/2$

4 luglio 2013

Versione	Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Es. 5	Es. 6	Es. 7	Es.8
1	A	B	A	C	D	D	C	$5\pi/2$

18 luglio 2013

Versione	Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Es. 5	Es. 6	Es. 7	Es.8
1	A	C	C	D	B	D	B	$4/3$

4 settembre 2013

Versione	Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Es. 5	Es. 6	Es. 7	Es.8
1	A	A	A	A	A	A	A	$\lambda = 6,\ U = x\sin(x+2y) + 3xy^2 + 5x$

Risposte 2013-2014

3 febbraio 2014

Versione	Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Es. 5	Es. 6	Es. 7
1	B	D	B	D	A	C	C

Es. 8: $\alpha = 2,\ \beta = 6,\ U = xe^y + ye^z + 2xy + 3y^2z + 9,\ L = 2e + 5$

21 febbraio 2014

Versione	Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Es. 5	Es. 6	Es. 7
1	D	A	D	C	B	C	B

Es. 8: -8π

3 luglio 2014

Versione	Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Es. 5	Es. 6	Es. 7
1	D	C	A	C	B	D	C

Es. 8: 8π

17 luglio 2014

Versione	Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Es. 5	Es. 6	Es. 7
1	D	A	C	C	B	B	A

Es. 8: Minimo -6 in $(-2, 0)$; massimo 14 in $(2, 0)$

11 settembre 2014

Versione	Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Es. 5	Es. 6	Es. 7
1	C	D	A	C	B	A	D

Es. 8: $U(x, y, z) = x^2y^3 \sin z; \quad L = 1$

Risposte 2014-2015

5 febbraio 2015

Versione	Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Es. 5	Es. 6	Es. 7
1	B	C	A	D	D	C	B

Es. 8: $4\pi + 16/3$

20 febbraio 2015

Versione	Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Es. 5	Es. 6	Es. 7
1	C	A	D	C	B	B	A

Es. 8: $9e^9\pi$

1 luglio 2015

Versione	Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Es. 5	Es. 6	Es. 7
1	D	C	B	A	D	C	A

Es. 8: 16π

16 luglio 2015

Versione	Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Es. 5	Es. 6	Es. 7
1	B	D	B	D	A	A	C

Es. 8: 1

14 settembre 2015

Versione	Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Es. 5	Es. 6	Es. 7
1	B	D	C	B	D	A	C

Es. 8: $5\pi/8$

Risposte 2015-2016

2 febbraio 2016

Versione	Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Es. 5	Es. 6	Es. 7	Es. 8
1	B	C	A	A	D	C	B	$6\pi + 6$

13 febbraio 2016

Versione	Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Es. 5	Es. 6	Es. 7	Es. 8
1	D	B	B	C	C	A	A	

Es.8: $g(x, y) = \log(y - 3x) + x^2 e^{y-3}$; $e^3 - \log 2$

13 giugno 2016

Versione	Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Es. 5	Es. 6	Es. 7	Es. 8
1	B	A	C	C	A	D	D	13

12 settembre 2016

Versione	Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Es. 5	Es. 6	Es. 7	Es. 8
1	D	A	C	C	A	B	B	21

Risposte 2016-2017

7 febbraio 2017

Versione	Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Es. 5	Es. 6	Es. 7	Es. 8
1	C	A	D	A	B	C	B	30π

20 febbraio 2017

Versione	Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Es. 5	Es. 6	Es. 7	Es. 8
1	A	B	C	A	C	D	B	

Es. 8. $U(x,y,z) = x \sin y + 2xy, \quad L = 1 + \pi$

19 giugno 2017

Versione	Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Es. 5	Es. 6	Es. 7	Es. 8
1	A	A	D	B	C	C	C	$5\pi/2$

26 settembre 2017

Versione	Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Es. 5	Es. 6	Es. 7	Es. 8
1	D	A	C	C	A	B	D	

$\alpha = 8, \quad U(x,y,z) = 4y^2z + 2x^2y + z^2, \quad L = 0$

Risposte 2017-2018

6 febbraio 2018

Versione	Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Es. 5	Es. 6	Es. 7	Es. 8
1	D	B	B	C	B	A	B	$4/3$

19 febbraio 2018

Versione	Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Es. 5	Es. 6	Es. 7	Es. 8
1	A	A	D	B	C	B	C	$\pi/10$

18 giugno 2018

Versione	Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Es. 5	Es. 6	Es. 7	Es. 8
1	B	D	C	D	A	C	C	$16\pi/3$

10 settembre 2018

Versione	Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Es. 5	Es. 6	Es. 7	Es. 8
1	D	A	C	C	A	B	B	$9\pi/4$