TEOREMA DI SCHWARZ = $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; A APERTO. SE f È 2 VOLTE DERIVABILE ($\exists\, H_f(x;y)$) E f_{xy} E f_{yx} SONO CONTINUE IN $(x_0;y_0) \in A$
$$\Rightarrow f_{xy}(x_0;y_0) = f_{yx}(x_0;y_0)$$

A APERTO : $C^0(A) = \{f: A \to \mathbb{R}$ CONTINUA IN $A\}$
A APERTO : $C^1(A) = \{f: A \to \mathbb{R}$ t.c. $f_x; f_y$ ESISTONO E SONO CONTINUE IN $A\}$
A APERTO : $C^2(A) = \{f: A \to \mathbb{R}$ t.c. $f_{xx}; f_{xy}; f_{yx}; f_{yy}$ ESISTONO E SONO CONTINUE IN $A\}$

COROLLARIO: SE $f \in C^2(A) \Rightarrow f_{xy}(x;y) = f_{yx}(x;y) \quad \forall (x;y) \in A$

TEOREMA DI TAYLOR CON RESTO DI PEANO = $A \subseteq \mathbb{R}^2$ APERTO; $(x_0;y_0) \in A$; $f \in C^2(A)$
$$\Rightarrow f(x;y) = f(x_0;y_0) + \langle \nabla f(x_0;y_0); \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} \rangle + \frac{1}{2}(x-x_0; y-y_0) \cdot H_f(x_0;y_0) \cdot \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} + \sigma\left((x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right)$$

esempio: $f(x;y) = x^2 \cos y$ $\quad f(0;0) = 0$ $\quad \begin{cases} f_x(0;0) = 0 \\ f_y(0;0) = -x^2 \sin y|_{(0;0)} = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} f_{xx}(0;0) = 2\cos y|_{(0;0)} = 2 \\ f_{xy}(0;0) = -2x \sin y|_{(0;0)} = 0 \\ f_{yy}(0;0) = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow f(x;y) = \cancel{f(0;0)} + \cancel{\langle \nabla f(0;0); \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rangle} + \frac{1}{2}(x;y)\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \sigma(x^2+y^2) \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x^2 + \sigma(x^2+y^2) \Rightarrow x^2 + \sigma(x^2+y^2)$$

MASSIMI E MINIMI = $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; A APERTO; $(x_0;y_0) \in A$

(1) MASSIMO ASSOLUTO : $(x_0;y_0)$ È PT. DI MAX. ASSOLUTO SE $f(x_0;y_0) \geq f(x;y) \quad \forall (x;y) \in A$
MASSIMO RELATIVO : $(x_0;y_0)$ È PT. DI MAX. RELATIVO SE $\exists B_r(x_0;y_0)$ t.c. $f(x_0;y_0) \geq f(x;y) \quad \forall (x;y) \in B_r(x_0;y_0)$

(2) MINIMO ASSOLUTO : $(x_0;y_0)$ È PT. DI MIN. ASSOLUTO SE $f(x_0;y_0) \leq f(x;y) \quad \forall (x;y) \in A$
MINIMO RELATIVO : $(x_0;y_0)$ È PT. DI MIN. RELATIVO SE $\exists B_r(x_0;y_0)$ t.c. $f(x_0;y_0) \leq f(x;y) \quad \forall (x;y) \in B_r(x_0;y_0)$

(1) PT. MAX.  (2) PT. MIN. 

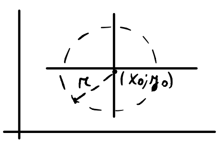
PUNTO STAZIONARIO = $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; A APERTO; $(x_0;y_0) \in A$. $(x_0;y_0)$ SI DICE PUNTO STAZIONARIO SE:
I) f È DERIVABILE IN $(x_0;y_0)$
II) $\nabla f(x_0;y_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

TEOREMA DI WEIERSTRASS = $A \subseteq \mathbb{R}^2$ CHIUSO E LIMITATO; $f: A \to \mathbb{R}$ CONTINUA $\Rightarrow f$ HA MAX. E MIN.
($\exists (x_M;y_M)$ PT. DI MAX. ASSOLUTO $\vee$ $\exists (x_m;y_m)$ PT. DI MIN. ASSOLUTO)

$\rightarrow$ QUINDI $f(x_m;y_m) \leq f(x;y) \leq f(x_M;y_M)$; CIOÈ f È LIMITATA

dim)
TEOREMA DI FERMAT = $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $(x_0;y_0)$ PT. INTERNO. SE f DERIVABILE IN $(x_0;y_0)$ E $(x_0;y_0)$ PT. DI ESTREMO LOCALE
$$\Rightarrow \nabla f(x_0;y_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

· DIMOSTRAZIONE: $(x_0;y_0)$ PT. MAX. REL. $\Rightarrow \exists B_r(x_0;y_0)$ t.c. $f(x_0;y_0) \geq f(x;y) \quad \forall (x;y) \in B_r(x_0;y_0)$

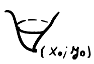


· CONSIDERO $g(x) = f(x;y_0)$ $\quad x \in (x_0-r; x_0+r) \Rightarrow g(x_0) \geq g(x) \quad \forall x \in (x_0-r; x_0+r)$

· QUINDI: I) x_0 PT. INTERNO $(x_0-r; x_0+r)$ II) g DERIVABILE IN x_0 PERCHÈ $g'(x_0) = f_x(x_0;y_0)$
III) x_0 È PT. MAX. REL. PER g

$\Rightarrow$ APPLICO TEOREMA DI FERMAT PER f DI UNA VARIABILE: $\underset{f_x(x_0;y_0)}{g'(x_0)} = 0$
· RIPETO IL RAGIONAMENTO CON $\tilde{g}(y) = f(x_0;y) \sim \underset{f_y(x_0;y_0)}{\tilde{g}'(y_0)} = 0$

$\Rightarrow \nabla f(x_0;y_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

· OSSERVAZIONE: (1) f DERIVABILE IN $(x_0;y_0)$ È IPOTESI NECESSARIA 
(2) $\nabla f(x_0;y_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ È NECESSARIO, NON SUFFICIENTE

dim)

TEOREMA: CRITERIO DELLA MATRICE HESSIANA = $A \subseteq \mathbb{R}^2$ APERTO; $f \in C^2(A)$; $(x_0;y_0) \in A$ STAZIONARIO:

I) SE LA f.q. INDOTTA DA $H_f(x_0;y_0)$ È DEFINITA POSITIVA $\Rightarrow$ $(x_0;y_0)$ PT. MINIMO LOCALE
SE LA f.q. INDOTTA DA $H_f(x_0;y_0)$ È DEFINITA NEGATIVA $\Rightarrow$ $(x_0;y_0)$ PT. MASSIMO LOCALE
III) SE LA f.q. INDOTTA DA $H_f(x_0;y_0)$ È INDEFINITA $\Rightarrow$ $(x_0;y_0)$ SELLA

DIMOSTRAZIONE: $f(x;y) - f(x_0;y_0) - \cancel{\langle \nabla f(x_0;y_0); \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} \rangle} = \frac{1}{2}(x-x_0;\ y-y_0)\ H_f(x_0;y_0) \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} + o((x-x_0)^2+(y-y_0)^2)$ per $(x;y) \to (x_0;y_0)$

(PERCHÉ $(x_0;y_0)$ È PT. STAZIONARIO PER HP)

$f \in C^2(A) \Rightarrow H_f(x_0;y_0)$ SIMMETRICA ($\times$ TEO. SCHWARZ) $\Rightarrow \exists$ DUE AUTOVALORI IN $\mathbb{R}$ $(\lambda_1 \le \lambda_2)$

AFFERMO CHE VALE: $\lambda_1 \left\| \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} \right\|^2 \le (x-x_0;\ y-y_0)\ H_f(x_0;y_0) \cdot \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} \le \lambda_2 \left\| \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} \right\|^2 \longrightarrow$ 3 CASISTICHE

I) SE $H_f(x_0;y_0)$ DEF. POSITIVA $\Rightarrow \lambda_2 \ge \lambda_1 > 0 \Rightarrow f(x;y) - f(x_0;y_0) \ge 0$ per $(x;y) \in B_r(x_0;y_0)$
$\Rightarrow f(x;y) \ge f(x_0;y_0) \quad \forall (x;y) \in B_r(x_0;y_0)$
$\Rightarrow (x_0;y_0)$ PT. DI MINIMO LOCALE

II) SE $H_f(x_0;y_0)$ DEF. NEGATIVA $\Rightarrow \lambda_1 \le \lambda_2 < 0 \Rightarrow f(x;y) - f(x_0;y_0) \le 0$ per $(x;y) \in B_r(x_0;y_0)$
$\Rightarrow f(x;y) \le f(x_0;y_0) \quad \forall (x;y) \in B_r(x_0;y_0)$
$\Rightarrow (x_0;y_0)$ PT. DI MASSIMO LOCALE

III) SE $H_f(x_0;y_0)$ INDEFINITA $\Rightarrow \lambda_2 > 0 > \lambda_1 \Rightarrow \exists\ \underline{u};\underline{v} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ t.c. $\begin{cases} \langle H_f(x_0;y_0)\underline{u};\underline{u} \rangle > 0 \\ \langle H_f(x_0;y_0)\underline{v};\underline{v} \rangle < 0 \end{cases}$

$\to$ VALUTO:

- $f(x_0+tu_1;\ y_0+tu_2) - f(x_0;y_0) = \frac{1}{2}(tu_1, tu_2)\ H_f(x_0;y_0) \begin{pmatrix} tu_1 \\ tu_2 \end{pmatrix} + o(t^2) =$ per $t \to 0$
$= \frac{1}{2} t^2\ \underline{u}^T H_f(x_0;y_0)\,\underline{u} + o(t^2)$
> 0

- $f(x_0+tv_1;\ y_0+tv_2) - f(x_0;y_0) = \frac{1}{2}(tv_1, tv_2)\ H_f(x_0;y_0) \begin{pmatrix} tv_1 \\ tv_2 \end{pmatrix} + o(t^2) =$ per $t \to 0$
$= \frac{1}{2} t^2\ \underline{v}^T H_f(x_0;y_0)\,\underline{v} + o(t^2)$
< 0

$\Rightarrow (x_0;y_0)$ SELLA

COROLLARIO:
- $\det H_f(x_0;y_0) > 0$:
  - $f_{xx}(x_0;y_0) > 0 \Rightarrow (x_0;y_0)$ MIN. LOC.
  - $f_{xx}(x_0;y_0) < 0 \Rightarrow (x_0;y_0)$ MAX. LOC.
- $\det H_f(x_0;y_0) < 0 \Rightarrow (x_0;y_0)$ SELLA

VINCOLO DI UGUAGLIANZA = $Z = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2$ t.c. $F(x;y) = 0\}$

PUNTO CRITICO VINCOLATO = $(x_0;y_0) \in Z$ t.c. (1) $\exists\ \underline{v}$ VETTORE TANGENTE AL VINCOLO IN $(x_0;y_0)$
(2) $\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(x_0;y_0) = 0$

METODO DEI MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE = $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ SU $Z = \{(x;y) : F(x;y) = 0\}$ $\Rightarrow$ $\mathcal{L}(x;y;\lambda) = f(x;y) - \lambda F(x;y)$

TEOREMA DEI MOLT. DI LAGRANGE = SE $f;F$ DERIVABILI IN $(x_0;y_0)$; $(x_0;y_0)$ SIA PUNTO DI ESTREMO PER f VINCOLATO A Z.
SE $\nabla f(x_0;y_0) \neq \binom{0}{0}$ $\Rightarrow \exists \lambda_0 \in \mathbb{R}$ t.c. $\nabla f(x_0;y_0) = \lambda_0 \nabla F(x_0;y_0)$
(cioè $(x_0;y_0;\lambda_0)$ è pt. stazionario di $\mathcal{L}$)

· OSSERVAZIONE: I PUNTI SINGOLARI DEL VINCOLO (CIOÈ QUELLI PER CUI $\nabla F = \binom{0}{0}$) VANNO STUDIATI A PARTE

INSIEME CONVESSO = INSIEME CONNESSO DI $\mathbb{R}^2$ È $\Omega \in \mathbb{R}^2$ t.c. $\forall P;Q \in \Omega$ IL SEGMENTO $\lambda P + (1-\lambda)Q \in \Omega$ $\forall \lambda \in [0;1]$

FUNZIONE CONVESSA/CONCAVA = (1) CONVESSA: $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; Ω CONVESSO; SI DICE CONVESSA SE
$f(\lambda P + (1-\lambda)Q) \leq \lambda f(P) + (1-\lambda) f(Q)$ $\forall \lambda \in [0;1]$

(2) CONCAVA: $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; Ω CONVESSO; SI DICE CONCAVA SE
$f(\lambda P + (1-\lambda)Q) \geq \lambda f(P) + (1-\lambda) f(Q)$ $\forall \lambda \in [0;1]$

TEOREMA CONVESSITÀ E PIANO TANGENTE = $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ CONVESSO. $f: \Omega \to \mathbb{R}$ DIFFERENZIABILE.
(1) f CONVESSA $\iff f(x;y) \geq f(x_0;y_0) + \langle \nabla f(x_0;y_0); \binom{x-x_0}{y-y_0} \rangle$ $\forall (x;y) \in \Omega$
(2) f CONCAVA $\iff f(x;y) \leq f(x_0;y_0) + \langle \nabla f(x_0;y_0); \binom{x-x_0}{y-y_0} \rangle$ $\forall (x;y) \in \Omega$

TEOREMA CONVESSITÀ E H_f: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ CONVESSO; $f: \Omega \xrightarrow{C^2} \mathbb{R}$: (1) SE $H_f(x;y)$ DEFINITA POSITIVA O SEMIDEFINITA POSITIVA $\forall (x;y) \in \Omega$
$\Rightarrow f$ CONVESSA
(2) SE $H_f(x;y)$ DEFINITA NEGATIVA O SEMIDEFINITA NEGATIVA $\forall (x;y) \in \Omega$
$\Rightarrow f$ CONCAVA

dim)
TEOREMA OTTIMIZZAZIONE FUNZIONI CONVESSE = $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ CONVESSO; $f: \Omega \to \mathbb{R}$ CONVESSA (CONCAVA) E DIFF.BILE IN Ω; $(x_0;y_0)$ PUNTO CRITICO
$\Rightarrow (x_0;y_0)$ È PUNTO DI MINIMO (MASSIMO) ASSOLUTO

· DIMOSTRAZIONE: f CONVESSA IN Ω CONVESSO DIFF.BILE $\Rightarrow$ TEOREMA CONVESSITÀ E PIANO TANGENTE
$f(x;y) \geq f(x_0;y_0) + \langle \nabla f(x_0;y_0); \binom{x-x_0}{y-y_0} \rangle$ $\forall (x;y) \in \Omega$

SE $(x_0;y_0)$ PUNTO CRITICO $\Rightarrow f(x;y) \geq f(x_0;y_0)$ $\forall (x;y) \in \Omega$
$\Rightarrow (x_0;y_0)$ È PUNTO DI MINIMO ASSOLUTO

dim)

OTTIMIZZAZIONE DEL PROFITTO = COBB-DOUGLAS

L = QUANTITÀ LAVORO ; K = CAPITALE INVESTITO

m = COSTO UNITARIO DEL LAVORO

n = COSTO UNITARIO DEL CAPITALE

$\alpha; \beta \in (0;1); b > 0$

$\Rightarrow$ PROFITTO: $h(L;K) = bL^\alpha K^\beta - mL - nK$

IPOTESI: $b=1$; $\alpha = m$; $\beta = n$ $[\alpha + \beta < 1]$

CAMBIO NOTAZIONE: $f(x;y) = x^\alpha y^\beta - \alpha x - \beta y$; $\Omega = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0; y > 0\}$

PROBLEMA: $\max\limits_{\Omega} f$; Ω APERTO E ILLIMITATO, CONVESSO

f CONTINUA ; $f \in C^2$

CALCOLO PTI STAZIONARI: $\begin{cases} f_x(x;y) = \alpha x^{\alpha-1} y^\beta - \alpha = 0 \\ f_y(x;y) = \beta x^\alpha y^{\beta-1} - \beta = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \alpha(x^{\alpha-1}y^\beta - 1) = 0 \\ \beta(x^\alpha y^{\beta-1} - 1) = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x^{\alpha-1}y^\beta = 1 \\ x^\alpha y^{\beta-1} = 1 \end{cases}$

$$\frac{x^{\alpha-1}y^\beta}{x^{\alpha-1}y^{\beta-1}} = \frac{x^\alpha y^{\beta-1}}{x^{\alpha-1}y^{\beta-1}} \longrightarrow y = x \Rightarrow x^{\alpha+\beta-1} = 1 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 1$$

$\longrightarrow P(1;1)$ UNICO PUNTO CRITICO

$$H_f(1;1) = \begin{vmatrix} \alpha(\alpha-1) & \alpha\beta \\ \alpha\beta & \beta(\beta-1) \end{vmatrix} \Rightarrow \det H_f(1;1) = \dots = \underbrace{\alpha\beta}_{>0}\underbrace{(1-\alpha-\beta)}_{>0} \quad (>0)$$

$\Rightarrow P(1;1)$ MASSIMO GLOBALE

$$f_{xx}(1;1) = \underbrace{\alpha}_{>0}\underbrace{(\alpha-1)}_{<0} \quad (<0)$$

MA: $f(x;y)$ È UNA FUNZIONE CONCAVA SU Ω CONVESSO $\Rightarrow$ IL SUO UNICO PUNTO CRITICO È UN MASSIMO ASSOLUTO

dim)

OTTIMIZZAZIONE DELLA PRODUZIONE CON UN VINCOLO DI BUDGET

COBB-DOUGLAS: $L = x$ $\quad \alpha = \beta = m = n = 1/2$ $\quad$ (N.B.: $\alpha + \beta = 1$)

$K = y$

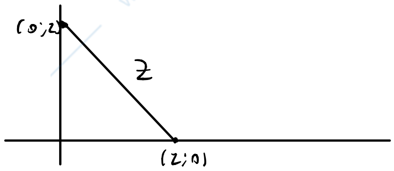
VINCOLO DI BUDGET: $mL + nK = 1$

OTTIMIZZAZIONE $f(x;y) = x^{1/2} y^{1/2} \longrightarrow F(x;y) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - 1$ $\quad$ VINCOLO $F^{-1}(0)$

VINCOLO $\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 1\} \iff F^{-1}(0) \iff \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - 1 = 0 \rightsquigarrow F(x;y) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - 1$

$\Omega = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 ;\ y > 0\}$

$Z = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - 1 = 0\}$ NON È CHIUSO, MA LIMITATO



CONSIDERO $\overline{Z} = Z \cup \{(2;0);(0;2)\}$ CHIUSO E LIMITATO ; f CONTINUA

$\Rightarrow \exists \max_{\overline{Z}} f$; $\min_{\overline{Z}} f$ PER WEIERSTRASS

CONTROLLO PUNTI SINGOLARITÀ VINCOLO

$\begin{cases} F_x(x;y) = 1/2 \\ F_y(x;y) = 1/2 \end{cases}$ $\Rightarrow$ TUTTI I PUNTI DEL VINCOLO SONO REGOLARI

$L(x;y;\lambda) = f(x;y) - \lambda F(x;y) = x^{1/2} y^{1/2} - \lambda\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - 1\right)$

$\begin{cases} L_x = \frac{1}{2} x^{-1/2} y^{1/2} - \frac{1}{2}\lambda = 0 \\ L_y = 1/2\, x^{1/2} y^{-1/2} - 1/2\,\lambda = 0 \\ L_\lambda = \dots = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x^{-1/2} y^{1/2} = \lambda \\ x^{1/2} y^{-1/2} = \lambda \\ \dots \end{cases}$ $\begin{cases} x^{-1/2} y^{1/2} = x^{1/2} y^{-1/2} \\ \dots \end{cases}$

$\begin{cases} \text{PRENDENDO } x;y \neq 0 \quad \frac{y^{1/2}}{x^{-1/2}} x^{-1/2} y^{1/2} = x^{1/2} y^{-1/2} \frac{y^{1/2}}{x^{-1/2}} \Rightarrow x = y \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 1 \Rightarrow x = 1 ;\ y = 1 \rightarrow P(1;1) \end{cases}$

$f(1;1) = 1^{1/2}\, 1^{1/2} = 1 \longrightarrow \max_{\overline{Z}} f$

$f(2;0) = f(0;2) = 0 \longrightarrow \min_{\overline{Z}} f$

DOMINIO NORMALE = (1) $D = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.c. } a \le x \le b ;\ \alpha(x) \le y \le \beta(x)\}$ DOVE $\alpha;\beta \in C^0([a;b])$
$\alpha(x) \le \beta(x)\ \forall x \in [a;b]$

SI DICE DOMINIO NORMALE RISPETTO A X (OPPURE Y-SEMPLICE)

$\Rightarrow \operatorname{mis}(D) = \int_a^b (\beta(x) - \alpha(x))\, dx$

(2) $D = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.c. } c \le y \le d ;\ \gamma(y) \le x \le \delta(y)\}$ DOVE $\gamma;\delta \in C^0([c;d])$
$\gamma(y) \le \delta(y)\ \forall y \in [c;d]$

SI DICE DOMINIO NORMALE RISPETTO A Y (OPPURE X-SEMPLICE)

$\Rightarrow \operatorname{mis}(D) = \int_c^d (\delta(y) - \gamma(y))\, dy$

PARTIZIONE DI DOMINI NORMALI = DATO UN DOMINIO NORMALE CHIAMO PARTIZIONE DI D IN DOMINI NORMALI UN INSIEME FINITO DI DOMINI NORMALI $P = \{D_1 \dots D_m\}$ t.c. $\mathring{D}_i \cap \mathring{D}_j = \emptyset$
$D_i \subseteq D \ \forall i = 1 \dots m$

t.c. $\bigcup_{i=1}^{m} D_i = D$

SOMME DI REINMANN = SIA $f: D \subseteq \mathbb{R}^2$ LIMITATA CON D = DOMINIO NORMALE
P = PARTIZIONE DI D IN DOMINI NORMALI

(1) $s(P) = \sum_{j=1}^{\tilde{m}} mis(D_j) \inf f$ SOMME DI REINMANN INFERIORI

(2) $S(P) = \sum_{j=1}^{\tilde{m}} mis(D_j) \sup f$ SOMME DI REINMANN SUPERIORI

SE $\sup s(P) = \inf S(P) \Rightarrow f$ SI DICE REINMANN - INTEGRABILE SU D

FORMULA DI RIDUZIONE PER DOMINI NORMALI = (1) D DOMINIO NORMALE RISPETTO A x ; $f \in R(D)$

$$\iint_D f \, dx\, dy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x;y)\, dy \right) dx$$

(2) D DOMINIO NORMALE RISPETTO A y ; $f \in R(D)$

$$\iint_D f \, dx\, dy = \int_c^d \left(\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x;y)\, dx \right) dy$$

MATRICE JACOBIANA = DATA $\phi \in C^1$; $\phi: \Omega' \to \Omega$ SI CHIAMA MATRICE JACOBIANA $J_\phi(u;v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$

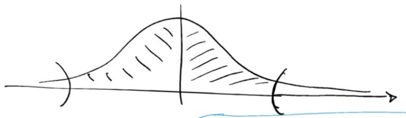
TEOREMA MATRICE JACOBIANA = $\Omega' ; \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ APERTI ; $\phi: \Omega' \xrightarrow{C^1} \Omega$ INVERTIBILE (GLOBALMENTE) $\det J_\phi(u;v) \neq 0 \quad \forall (u;v) \in \Omega'$

SE $f \in R(\Omega) \Rightarrow \iint_\Omega f(x;y)\, dx\, dy = \iint_{\Omega'} f(\phi(u;v)) \cdot |\det J_\phi(u;v)|\, du\, dv$

dim)

INTEGRALE DELLA GAUSSIANA

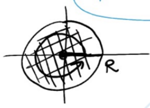
Dimostriamo $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$



1° passo)
Partiamo calcolando

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \underbrace{e^{-(x^2+y^2)}}_{\substack{\text{cont. su } \mathbb{R}^2\\ f \geq 0}}\,dx\,dy \underset{\text{def. di int. doppio generalizzato}}{=} \lim_{R\to+\infty} \iint_{B_R} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy =$$

$e^{-x^2} \leq \frac{1}{x^2}$ int.bile all'∞ per x suff. grande



$$= \lim_{R\to+\infty} \int_0^{2\pi}\int_0^R \underbrace{e^{-\rho^2}\rho}_{h(\rho)}\,d\rho\,d\theta \quad g(\theta)\equiv 1$$

$$= \lim_{R\to+\infty} \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\frac{-2}{-2}\int_0^R e^{-\rho^2}\rho\,d\rho\right) =$$

$$= \lim_{R\to+\infty} 2\pi\left[-\frac{1}{2}e^{-\rho^2}\right]_0^R = \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}\pi\left(1-\underbrace{e^{-R^2}}_{\to 0}\right) = \pi$$

Quindi $\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \pi.$

2° passo)

$$\pi = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy \underset{\text{def. int. doppio generalizzato}}{=} \lim_{R\to+\infty} \iint_{Q_R} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy =$$

$$= \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R}\int_{-R}^{R} \underbrace{e^{-x^2}}_{h(x)}\cdot\underbrace{e^{-y^2}}_{g(y)}\,dx\,dy = \lim_{R\to+\infty}\left(\int_{-R}^{R} e^{-x^2}\,dx\right)\left(\int_{-R}^{R} e^{-y^2}\,dy\right)$$

oss. iniziale $\iint$ per f. a var. separate

$$= \left(\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} e^{-x^2}\,dx\right)^2$$

lim. del prodotto è prod dei limiti se i 2 limiti esistono e non si dà una forma di indecisione nel prodotto

OK perché la gaussiana è R-int.bile in senso improprio per teo confronto (An 1 !!)

$$= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^2$$

def. di int. improprio di An 1.

Quindi $\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^2 = \pi \implies \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$

Per simmetria $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$ ∎

EDO = UNA EDO DI n ORDINE AMMETTE ∞^n SOLUZIONI

dim)

TEOREMA DI STRUTTURA PER EDO LINEARI I ORDINE = (i) L'INT. GEN. DELLA EQ. OMOGENEA ASSOCIATA È UNO SPAZIO VETTORIALE DI DIM. 1

(ii) L'INT. GEN. DELLA EQ. NON OMOGENEA È UGUALE AL INT. GEN. DELLA OMOGENEA PIU' UNA SOLUZIONE PARTICOLARE DELLA NON OMOGENEA

i) Int. gen. dell'eq. omog. ass. = $\ker L$ con L op. lineare
$\Rightarrow$ si struttura a sp. vett.

$y'(t) = p(t)\,y(t)$ $\quad \boxed{y=0 \text{ sol. costante}}$

$y \neq 0 \quad \frac{y'}{y} = p(t) \quad \int \frac{dy}{y} = \int p(t)\,dt \quad \log|y| = P(t) + k$

$\Rightarrow |y| = e^{P(t)+k} = e^k e^{P(t)} = c\, e^{P(t)} \quad c>0$

$\Rightarrow y = ce^{P(t)}$ opp $y = -ce^{P(t)} \rightsquigarrow y(t) = ce^{P(t)} \quad c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

$\Rightarrow y(t) = ce^{P(t)} \quad c \in \mathbb{R}$: dipende da 1 parametro
dim $\ker L = 1$

ii) "TUTTE" : Considero $y(t) = \eta(t) + y_p(t)$ dove η e' sol. dell'eq. omog. an. e y_p e' sol. dell'eq. non omog

Devo dim. che y risolve l'eq. non omog.

$y'(t) = (\eta(t) + y_p)' = \eta' + y_p' = p(t)\eta + (p(t)y_p + q(t))$

$= p(t)(\eta(t) + y_p(t)) + q(t) = p(t)y(t) + q(t)$

"SOLE" Cons. u, v soluzioni dell'eq. non omog.
Cons $w = u - v$

Devo dim. che w e' sol. dell'eq. omog. an.

$w' = u' - v' = p(t)u + \cancel{q(t)} - (p(t)v + \cancel{q(t)}) = p(t)(u-v) = p(t)w$.

■

TEOREMI EDO

TEOREMA Siano $p, q \in C^0(I)$ I intervallo, $t_0 \in I$
Allora $\begin{cases} y'(t) = p(t)y + q(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$
ammette un'unica sol. $y \in C^1(I)$.

la sol. sara' data dal teo. seguente:

TEOREMA (FORMULA RISOLUTIVA PER EDO I ORDINE LINEARI)

L'int. gen. di $y'(t) = p(t)y(t) + q(t)$ e'

$$y(t) = e^{P(t)} \cdot \left\{ c + \int e^{-P(t)} q(t)\,dt \right\}$$

dove $P(t)$ è una primitiva di $p(t)$ (... tipicamente sceglierò la primitiva con costante d'integr. $= 0$)

dim)

FORMULA RISOLUTIVA EDO I ORDINE

Dim:

$$y(t) = \underbrace{Ce^{P(t)}}_{\text{int. gen dell' eq. omog.}} + \underbrace{e^{P(t)}\int e^{-P(t)} q(t)\,dt}_{\text{dovrà essere una sol. part. della non omog.}}$$

↳ vd. dim. n° 19.

Mostro che $y_p(t) = e^{P(t)} \underbrace{\int e^{-P(t)} q(t)\,dt}_{Q(t)}$ è sol. di $y' = p(t)y + q(t)$

$$y_p' = \left(e^{P(t)}Q(t)\right)' = P'(t)\,e^{P(t)}Q(t) + e^{P(t)}Q'(t)$$

$$= p(t)\,e^{P(t)}Q(t) + \underbrace{e^{P(t)}e^{-P(t)}}_{1}q(t)$$

$$= p(t)\left(e^{P(t)}Q(t)\right) + q(t) \quad \leadsto \quad y_p' = p(t)\,y_p + q(t)$$

TEOREMA DI ESISTENZA E UNICITÀ (EDO II ORDINE)

= SE $a; b; c; f : I \xrightarrow{C^0} \mathbb{R}$ $\quad a(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$; $t_0 \in I$

ALLORA IL PROBLEMA DI CAUCHY

$$\begin{cases} a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \end{cases}$$

AMMETTE UN'UNICA SOLUZIONE $y(t)$ $t \in I$ DI CLASSE C^2

dim)

TEOREMA PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE

Sia $y_1(t)$ sol. $a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = f_1(t)$

$y_2(t)$ " - - - - - - - - $= f_2(t)$

Allora $\boxed{y(t) = y_1(t) + y_2(t)}$ è soluzione di

$$a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = f_1(t) + f_2(t) \quad t \in I.$$

Dim

$y' = y_1' + y_2'$ $\quad \boxed{y'' = y_1'' + y_2''}$

$$a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = a(t)(y_1'' + y_2'') + b(t)(y_1' + y_2') + c(t)(y_1 + y_2)$$

$$= \left(a(t)y_1'' + b(t)y_1' + c(t)y_1\right) + \left(a(t)y_2'' + b(t)y_2' + c(t)y_2\right)$$

$$= f_1(t) + f_2(t)$$

■

dim)

TEOREMA DI STRUTTURA DELL'INT. GEN. PER EDO II ORDINE LINEARI

i) l'int. gen. dell'eq. omog. associata è uno sp. vett. di dim = 2

ii) L'int. gen. dell'eq = int. gen. dell'eq. omog. associata + una sol. particolare dell'eq. completa

Dim (n° 22)

i) Segue dalla linearità di L
Non dimostro dim = 2.

ii) TUTTE Considero $y = y_0 + y_p$ $\quad y' = y_0' + y_p' \quad y'' = y_0'' + y_p''$

Allora y risolve:

$$a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = a(t)(y_0'' + y_p'') + b(t)(y_0' + y_p') + c(t)(y_0 + y_p)$$
$$= a(t)y_0'' + b(t)y_0' + c(t)y_0 + a(t)y_p'' + b(t)y_p' + c(t)y_p$$
$$= 0 + f(t) = f(t) \quad ✓$$

SOLE Considero y_1, y_2 sol. non omog, Chiamo $v = y_1 - y_2$
Dimostro che v è sol. dell'eq. omog.

$$a(t)v'' + b(t)v' + c(t)v = a(t)(y_1'' - y_2'') + b(t)(y_1' - y_2') + c(t)(y_1 - y_2)$$
$$= \underbrace{a(t)y_1'' + b(t)y_1' + c(t)y_1}_{f(t)} - \underbrace{(a(t)y_2'' + b(t)y_2' + c(t)y_2)}_{f(t)} = 0 \quad ✓$$

dim)

EQUIVALENZA TRA SISTEMI ED EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Cons. un'eq. diff. lin. di ordine n.

$$y^{(n)} = a_1(t)\,y(t) + a_2(t)\,y' + \dots + a_{n-1}(t)\,y^{(n-1)} + b(t)$$

Dim:

$$\underline{Y} = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} \qquad \underline{Y}' = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \\ y'''(t) \\ \vdots \\ \boxed{y^{(n)}(t)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} Y_1' = Y_2 \\ Y_2' = Y_3 \\ \vdots \\ Y_n' = y^{(n)} = a_1(t)Y_1 + a_2(t)Y_2 + \dots + a_{n-1}Y_{n-1} + b(t) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} Y_1' \\ Y_2' \\ \vdots \\ Y_n' \end{pmatrix} = \underline{Y}'(t) = \Big[\qquad \Big] \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \dots & 0 \\ & & & & \\ a_1(t) & a_2(t) & \dots & & a_n(t) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$$

Ho dim. che eq. diff. lin. di ordine n è equivalente ad un sist. lin. del I ordine $n \times n$.