Analisi Matematica II: Dimostrazioni

Sophie Cavallini

26 giugno 2020

Vettore accelerazione: componenti tangenziale e centripeta

Se $t \mapsto \boldsymbol{r}(t)$ è di classe $\mathcal{C}^2$, è definito il vettore accelerazione $\boldsymbol{r}''(t)$. Vale la decomposizione:

$$\boldsymbol{r}''(t) = v'(t)\boldsymbol{T}(t) + v(t)^2 k(t)\boldsymbol{N}(t)$$

Dim: Derivando l'equazione $\boldsymbol{r}'(t) = v(t)\boldsymbol{T}(t)$ si ottiene,

$$\boldsymbol{r}''(t) = v'(t)\boldsymbol{T}(t) + v(t)\boldsymbol{T}'(t) = v'(t)\boldsymbol{T}(t) + v(t)v(t)k(t)\boldsymbol{N}(t)$$

Formule di calcolo per la curvatura

Il calcolo della curvatura utilizzando l'ascissa curvilinea $s(t) = \int_a^t |\boldsymbol{r}'(\tau)| d\tau$ è

$$k(s) = \left|\frac{d\boldsymbol{T}}{ds}\right| = \left|\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\right|$$

Dalla relazione $\frac{d\boldsymbol{T}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{T}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v(t) \cdot \frac{d\boldsymbol{T}}{ds}$, si ottiene, prendendo i moduli: $k(t) = \frac{|\boldsymbol{T}'(t)|}{v(t)}$ e $\boldsymbol{N}(t) = \frac{1}{|\boldsymbol{T}'(t)|}\boldsymbol{T}'(t)$. Osservare che: $\boldsymbol{T}'(t) = v(t)k(t)\boldsymbol{N}(t)$.
Osservando che $\boldsymbol{r}'$ è parallelo a $\boldsymbol{T}$ e ortogonale a $\boldsymbol{N}$:

$$|\boldsymbol{r}'(t) \wedge \boldsymbol{r}''(t)| = v(t)^2 k(t)\, |\boldsymbol{r}'(t) \wedge \boldsymbol{N}(t)| = v(t)^3 k(t)$$

Pertanto:

$$k(t) = \frac{|\boldsymbol{r}'(t) \wedge \boldsymbol{t}''(t)|}{v(t)^3}$$

Teorema degli zeri

Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ connesso, e $f : E \to \mathbb{R}$ continua. Supponiamo che esistano due punti $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ in $E|\ f(\boldsymbol{x}) > 0$ e $f(\boldsymbol{y}) < 0$. Allora $\exists$ un punto $\boldsymbol{z} \in E|\ f(\boldsymbol{z}) = 0$.

Dim: Poiché E è connesso, $\exists$ una curva $\boldsymbol{r} : [a, b] \to E \mid \boldsymbol{r}(a) = \boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{r}(b) = \boldsymbol{y}$. La funzione composta $g(t) = f(\boldsymbol{r}(t))$ è continua in $[a, b]$ e $\mid g(a) > 0,\ g(b) < 0$. Per il teorema degli zeri unidimensionale, $\exists\, t \in (a, b) \mid g(t) = 0$. Ma, $g(t) = f(\boldsymbol{r}(t))$, per cui f si annulla nel punto $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{r}(t)$.

Continuità delle funzioni differenziabili

Sia f differenziabile in $\boldsymbol{x}_0 \in D$ (aperto in $\mathbb{R}^n$. Allora, f è continua in $\boldsymbol{x}_0$.

Dim: Ponendo $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}$, riscriviamo la definizione di differenziabilità nella forma $f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0) + \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) + o(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)$, da cui si ottiene facilmente $\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0)$. Pertanto, f è continua in $\boldsymbol{x}_0$.

Formula del gradiente

Sia f differenziabile in $\boldsymbol{x}_0 \in D$ (aperto in $\mathbb{R}^n$. Allora, $\exists$ tutto le derivate direzionali di f in $\boldsymbol{x}_0$ e vale la formula:

$$D_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x}_0) \cdot \boldsymbol{v}$$

Dim: Possiamo scrivere nella definizione di differenziabilità:

$$f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x}_0) \cdot \boldsymbol{h} + o(\boldsymbol{h})$$

Scegliendo ora $\boldsymbol{h} = t\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v}$ versore qualsiasi:

$$f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{x}_0) = t\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x}_0) \cdot \boldsymbol{v} + o(t)$$

Dividendo per t e facendo il limite per $t \to 0$ si ottiene ora:

$$D_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x}_0) \cdot \boldsymbol{v}$$

Ortogonalità del gradiente alle curve di livello

Sia $f(x, y)$ differenziabile e supponiamo che l'inseme di livello $\{(x, y) \mid f(x, y) = 0\}$ sia (sostegno di) una curva regolare $\boldsymbol{r} = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j}$, $t \in I$. Allora:

$$g(t) := f(x(t), y(t))) = c, \forall t \in I$$

Derivando rispetto a t:

$$g'(t) = \boldsymbol{\nabla} f(x(t), y(t)) \cdot \boldsymbol{r}'(t) = 0$$

Dunque in ogni punto regolare di una curva di livello il gradiente di f (se diverso da 0) è perpendicolare alla tangente alla curva (si dice in breve che il gradiente è ortogonale alle curve di livello).

Test delle derivate seconde

Siano $f \in \mathcal{C}^2(D), D \subseteq \mathbb{R}^n$ e $x_0 \in D$ un punto critico di f. Se la forma quadratica $q(\boldsymbol{t}) = H_f(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{h}$ è:

- definita positivamente (negativa) $\Rightarrow \boldsymbol{x}_0$ è punto di minimo (massimo) locale forte;
- indefinita $\Rightarrow \boldsymbol{x}_0$ è punto di sella.

Dim.: Nelle ipotesi del teorema, se $q(\boldsymbol{h})$ è definita positiva:

$$\Delta f := f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}_0) = \frac{1}{2} H_f(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{h} + o(|\boldsymbol{h}|)^2 \geq \lambda_{min}|\boldsymbol{h}|^2 + o(|\boldsymbol{h}|)^2 = \lambda_{min}|\boldsymbol{h}|^2(1 + o(1))$$

L'ultimo termine è > 0 $\forall \boldsymbol{h}$ di norma sufficientemente piccola. Dunque in un intorno di $\boldsymbol{x}_0$ vale $\Delta f > 0$, cioè $\boldsymbol{x}_0$ è punto di minimo locale forte.
Se $q(\boldsymbol{h})$ è definita negatia, si dimostra in modo simile che $\Delta f < 0$ in un intorno di $\boldsymbol{x}_0$ e quindi che abbiamo un punto di massimo locale forte.
Se $q(\boldsymbol{h})$ è indefinita, $\exists$ due vettori $\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2 \mid q(\boldsymbol{h}_1) > 0$ e $q(\boldsymbol{h}_2) < 0$. Possiamo suppore che siano di lunghezza unitaria (quindi versori, per comodità di calcoli). Allora, per t sufficientemente piccolo:

$$f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{h_1}) - f(\boldsymbol{x}_0) = \frac{1}{2} t^2 H_f(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h}_1 \cdot \boldsymbol{h}_1 + o(t^2) = t^2 \left(\frac{q(\boldsymbol{h}_1)}{2} + o(1)\right) > 0,$$

$$f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{h}_2) - f(\boldsymbol{x}_0) = \frac{1}{2} t^2 H_f(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h}_2 \cdot \boldsymbol{h}_2 + o(t^2) = t^2 (\frac{q(\boldsymbol{h}_2)}{2} + o(1)) < 0$$

Dunque, lungo due direizoni uscenti da $\boldsymbol{x}_0$ la variazione Δf ha segno opposto. Si conclude che $\boldsymbol{x}_0$ è un punto di sella.

Moltiplicatori di Lagrange

Siano $f, g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ e sia (x_0, y_0) un punto di estremo vincolato per f con il vincolo $g(x, y) = c$ ($c \in \mathbb{R}$).
Se (x_0, y_0) è un punto regolare del vincolo ($\boldsymbol{\nabla} g(x_0, y_0) \neq \boldsymbol{0}$) esiste allora $\lambda_0 \in \mathbb{R} \mid$

$$\boldsymbol{\nabla} f(x_0, y_0) = \lambda_0 g(x_0, y_0)$$

Dim: Poiché (x_0, y_0) è un punto regolare, per il teorema del Dini il vincolo $g(x,y) - c = 0$ definisce localmente un arco di curva regolare $x = x(t),\ y = y(t)$, dove si può assumere t variabile in un intorno dell'origine e $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$.
Per ipotesi, $t = 0$ è punto di estremo locale per la funzione composta $f(x(t), y(t))$, per cui

$$0 = \frac{d}{dt} f(x(t), y(t))\Big|_{t=0} = \partial_x f(x_0, y_0) x'(0) + \partial_y f(x_0, y_0) y'(0)$$

Quindi, nel punto considerato, $\boldsymbol{\nabla} f(x_0, y_0)$ è ortogonale al vettore tangente $(x'(0)\boldsymbol{i} + y'(0)\boldsymbol{j})$ alla curva di livello $g(x,y) = x$.
Ma, come è noto, anche il vettore $\boldsymbol{\nabla} g$ è ortogonale (in ogni punto regolare) alla curva di livello.
Si conclude che i vettori $\boldsymbol{\nabla} f(x_0, y_0)$ e $\boldsymbol{\nabla} g(x_0, y_0)$ devono essere parelleli, ovvero che
$\boldsymbol{\nabla} f(x_0, y_0) = \lambda_0 \boldsymbol{\nabla} g(x_0, y_0)$ per qualche $\lambda_0 \ \in \mathbb{R}$.

Spazio vettoriale delle soluzioni delle equazioni omogenee

Denotiamo con $L : \mathcal{C}^2(I) \to \mathcal{C}^0(I)$ l'operatore differenziale definito da

$$y(t) \longmapsto Ly(t) := y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t)$$

La generica equazione del secondo ordine in forma normale si scrive allore $Ly(t) = f(t)$.
L'osservazione fondamentale è che L è un operatore lineare tra gli spazi vettoriali $\mathcal{C}^2(I)$ e $\mathcal{C}^0(I)$.

1. L'insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea $Lz(t) = 0$ è uno spazio vettoriale (sottospazio di $\mathcal{C}^2(I)$);

2. Lo spazio vettoriale delle soluzioni di un'equazione lineare omogenea del secondo ordine ha dimensione 2.

Dim:

1. Osserviamo prima di tutto che $z(t) = 0$ è soluzione dell'equazione omogenea. Se poi $z_1(t),\ z_2(t)$ soddisfano $Lz_1(t) = Lz_2(t) = 0$ e $c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}$, allora

$$L[c_1 z_1(t) + c_2 z_2(t)] = c_1 L z_1(t) + c_2 L z_2(t)$$

Quindi qualunque combinazione lineare di soluzioni dell'equazione omogena è ancora soluzione dell'equazione.

2. Mostreremo che si possono sempre trovare due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione $Lz = 0$ | ogni altra soluzione è combinazione lineare di queste due.
Fissato $t_0 \in I$, siano $z_1(t),\ z_2(t)$, le soluzioni in I rispettivamente dei problemi di Cauchy.

$$Lz_1(t) = 0,\ z_1(t_0) = 1,\ z_1'(t_0) = 0;$$

$$Lz_2(t) = 0,\ z_2(t_0) = 0,\ z_2'(t_0) = 1.$$

L'esistenza di tali soluzioni è garantita dal teorema di esistenza e unicità. Se per assurdo fossero linearmente dipendenti, avremmo $z_2(t) = \lambda z_1(t)\ \forall t \in I$, ma $z_1(t_0) = 1$ e $z_2(t_0) = 0$, per cui deve essere $\lambda = 0$, ma allora si avrebbe $z_1(t) = 0\ \forall t \in I$, impossibile.
Sia ora $z(t) \in \mathcal{C}^2(I)$ una soluzione dell'equazione omogena e poniamo $c_1 := z(t_0),\ c_2 := z'(t_0)$.
Definiamo la funzione

$$\bar{z}(t) := c_1 z_1(t) + c_2 z_2(t)$$

Dalla definizione delle soluzioni z_1 e z_2, si vede facilmente che $\bar{z}$ risolve il problema di Cauchy

$$L\bar{z}(t) = 0,\ \bar{z}(t_0) = c_1,\ \bar{z}'(t_0) = c_2.$$

cioè con i medesimi valori iniziali di $z(t)$.
Ancora per il teorema di esistenza e unicità si conclude che $\bar{z}(t) = z(t)$, ovvero che ogni soluzione di $Lz = 0$ è combinazione lineare di z_1 e z_2.

Struttura dell'integrale generale delle equazioni complete

Data una soluzione $\bar{y}(t)$ dell'equazione completa ($L\bar{y}(t) = f(t)$) l'integrale generale si ottiene sommando a $\bar{y}(t)$ l'integrale generale dell'equazione omogenea.

Dim: Se $\bar{y}$ risolve $L\bar{y}(t) = f(t)$ e $z(t)$ è soluzione dell'equazione omogenea,

$$L[\bar{y}(t) + z(t)] = L\bar{y}(t) + Lz(t) = f(t) + 0 = f(t)$$

Dunque, aggiungendo a una soluzione dell'equazione completa una soluzione dell'equazione omogenea si ottiene ancora una soluzione dell'equazione completa.
Viceversa, se $y(t) \neq \bar{y}(t)$ è un'altra soluzione dell'equazione completa,

$$L[y(t) - \bar{y}(t)] = Ly(t) - L\bar{y}(t) = f(t) - f(t) = 0$$

Si conclude che tutte le soluzioni dell'equazione completa si possono scrivere nella forma
$y(t) = \bar{y}(t) + z(t)$, dove $z(t)$ risolve $Lz(t) = 0$.

Proprietà dei campi conservativi: indipendenza del cammino di integrazione e circolazione nulle

L'integrale di linea di un campo conservatico è indipendente dal cammino di integrazione.
Precisamente, se $\boldsymbol{F}$ è conservativo in D (aperto e connesso) con funzione potenziale U, allora per ogni curva regoalre $\boldsymbol{r}(t),\ t \in [a, b],\ |\ \gamma \subset D$:

$$\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = U(\boldsymbol{r}(b)) - U(\boldsymbol{r}(a)).$$

Se γ è una linea chiusa ($\boldsymbol{r}(a) = \boldsymbol{r}(b)$) abbiamo in particolare:

$$\oint_\gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = 0$$

Dim:

$$\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_a^b \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \boldsymbol{r}'(t)dt = \int_a^b \boldsymbol{\nabla} U(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \boldsymbol{r}'(t)dt =$$

$$\int_a^b \frac{d}{dt} U(\boldsymbol{r}(t))dt = U(\boldsymbol{r}(b)) - U(\boldsymbol{r}(a)),$$

dove l'ultimo passaggio segue dal teorema fondamentale del calcolo.

Condizione necessaria per un campo conservativo

Se $\boldsymbol{F}$ è conservativo in D, allora $\mathrm{rot}(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{0}$ in D.

Dim: Se $\exists\ U \in \mathcal{C}^2(D)\ |\ \boldsymbol{F} = \boldsymbol{\nabla} U$, allora

$$\mathrm{rot}(\boldsymbol{F}) = \mathrm{rot}(\boldsymbol{\nabla} U) = (\partial_y \partial_z U - \partial_z \partial_y U)\, \boldsymbol{i} + (\partial_z \partial_x U - \partial_x \partial_z U)\, \boldsymbol{j} + (\partial_x \partial_y U - \partial_y \partial_x U)\, \boldsymbol{k} = \boldsymbol{0}$$

per il teorema di Schwarz.

Formula di Gauss-Green

Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ un dominio limitato la cui frontiera sia una curva di Jordan regolare a tratti e che sia semplice rispetto ad entrambi gli assi. Se $\boldsymbol{F} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} \in \mathcal{C}'(D)$, vale la formula:

$$\int\int_D Q_x - P_y\ dxdy = \int_{\partial^+ D} Pdx + Qdy$$

Dim: Dimostriamo prima il seguente lemma:

1. se D è y-semplice, allora:
$$\int\int_D P_y dxdy = -\int_{\partial^+ D} Pdx$$
2. se D è x-semplice, allora:
$$\int\int_D Q_x dxdy = \int_{\partial^+ D} Qdy$$

1. Sia $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a,b], g_1(x) \neq y \neq g_2(x)\}$, dalle formule di riduzione abbiamo:
$$\int\int_D P_y(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} P_y(x,y)dy\right) dx = \int_a^b \left[P(x,g_2(x)) - P(x,g_1(x))\right] dx$$
Calcoliamo allora l'integrale di P sulla frontiera osservando che $dx = 0$ sui tratti rettilinei dove $x = a$ e dove $x = b$:
$$\int_{\partial^+ D} Pdx = \int_a^b P(x,g_1(x))dx + \int_b^a P(x,g_2(x))dx = -\int_a^b [P(x,g_2(x)) - P(x,g_1(x))]dx$$
2. Sia $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [c,d], h_1(y) \neq x \neq h_2(y)\}$, dalle formule di riduzione abbiamo:
$$\int\int_D Q_x(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} Q_x(x,y)dx\right) dy = \int_c^d [Q(h_2(y),y)) - Q(h_1(y),y)]dy$$
Calcoliamo ora l'integrale di Qdy sulla frontiera osservando che $dy = 0$ sui tratti rettilinei dove $y = c$ e dove $y = d$:
$$\int_{\partial^+ D} Qdy = \int_c^d Q(h_2(y),y)dy + \int_c^d Q(h_1(y),y)dy = \int_c^d [Q(h_2(y),y) - Q(h_1(y),y)]dy$$

Nelle ipotesi del teorema valgono entrambe le relazioni 1. e 2. del precedente lemma. Sottraendo la prima equazione dalla seconda si ottiene il risultato.

Teorema di Gauss o della divergenza

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un dominio limitato, semplice rispetto ai tre assi cartesiani, la cui frontiera $\partial\Omega$ è una superficie regolare a pezzi, orientata con la scelta della normale esternea $\boldsymbol{n}_e$. Se $\boldsymbol{F} \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ vale la formula:
$$\int\int\int_\Omega \mathrm{div}\boldsymbol{F} dxdydz = \int\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}_e \, dS$$

Dim: Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ definito da:
$$\Omega = \{(x,y,z) \mid (x,y) \in D, \varphi_1(x,y) \neq z \neq \varphi_2(x,y)\}$$
dove D è un dominio regolare e semplicemente connesso del piano e $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{C}^1(D)$. Se $\boldsymbol{F} = F_1\boldsymbol{i} + F_2\boldsymbol{j} + F_3\boldsymbol{k} \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, vale la formula
$$\int\int\int_\Omega \partial_z F_3 dxdydz = \int\int_{\partial\Omega} F_3\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{n}_e dS$$
Dalla formula di riduzione per gli integrali tripli (integrazione per fili) si ha
$$\int\int\int_\Omega \partial_z F_3(x,y,z)dxdydz = \int\int_D \left(\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} \partial_z F_3 dz\right) dxdy =$$
$$= \int\int_D \left[F_3(x,y,\varphi_2(x,y)) - F_3(x,y,\varphi_1(x,y))\right] dxdy$$
Calcoliamo ora l'integrale a destra. La frontiera $\partial\Omega$ è l'unione di tre superfici regolari:

- la superficie cartesiana Σ_1 di equazione $z = \varphi_1(x, y)$, dove il prodotto della normale esterna per l'elemento d'area è:
$$\boldsymbol{n}_e dS = (\partial_x \varphi_1 \boldsymbol{i} + \partial_y \varphi_1 \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k})dxdy$$
- la superficie cartesiana Σ_2 di equazione $z = \varphi_2(x, y)$, dove il prodotto della normale esterna per l'elemento d'area è:
$$\boldsymbol{n}_e dS = (-\partial_x \varphi_2 \boldsymbol{i} - \partial_y \varphi_2 \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})dxdy$$
- la superficie laterale Σ_3, dove $\boldsymbol{n}_e$ è ortogonale a $\boldsymbol{k}$.

Abbiamo quindi:
$$\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{n}_e = \begin{cases} -dxdy & , su\ \Sigma_1; \\ dxdy & , su\ \Sigma_2; \\ 0 & , su\ \Sigma_3. \end{cases}$$
Dunque:
$$\int\int_{\partial\Omega} F_3 \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{n}_e dS =$$
$$= \int\int_{\Sigma_1} F_3 \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{n}_e dS + \int\int_{\Sigma_2} F_3 \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{n}_e dS + \int\int_{\Sigma_3} F_3 \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{n}_e dS =$$
$$= -\int\int_D F_3(x, y, \varphi_1(x, y))dxdy + \int\int_D F_3(x, y, \varphi_2(x, y))dxdy + 0 =$$
$$= \int\int_D [F_3(x, y, \varphi_2(x, y)) - F_3(x, y, \varphi_1(x, y))]dxdy$$
Con dimostrazioni simili, si ottengono le formule:
$$\int\int\int_\Omega \partial_x F_1 dxdy = \int\int_{\partial\Omega} F_1 \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{n}_e dS$$
se Ω è semplice rispetto all'asse x;
$$\int\int\int_\Omega \partial_y F_2 dxdydz = \int\int_{\partial\Omega} F_2 \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{n}_e dS$$
se Ω è semplice riseptto all'asse y.
In un dominio semplice rispetto a tutti i tre gli assi possiamo sommare le tre formule e otteniamo
$$\int\int\int_\Omega (\partial_x F_1 + \partial_y F_2 + \partial_z F_3)dxdydz = \int\int_{\partial\Omega} F_1 \boldsymbol{i} + F_2 \boldsymbol{j} + F_3 \boldsymbol{k}) \cdot \boldsymbol{n}_e dS$$
cioè
$$\int\int\int_\Omega \mathrm{div} \boldsymbol{F} dxdydz = \int\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}_e dS$$

Equazione di continuità

L'equazione di continuità è
$$\partial_t \rho(x, y, z, t) + \mathrm{div}(\rho \boldsymbol{v})(x, y, z, t) = 0$$

Dim: Il moto di un fluido di densità $\rho(x, y, z, t)$ è descritto da un campo di velocità $\boldsymbol{v}(x, y, z, t)$. Supponiamo che ρ e $\boldsymbol{v}$ siano derivabili con continuità in $\mathbb{R}^4$. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ una regione limitata occupata dal fluido e dove valgono le ipotesi del teorema della divergenza.
La massa totale del fluido contenuta in Ω all'istante t è
$$M(t) = \int\int\int_\Omega \rho(x, y, z, t)dxdydz$$
La rapidità di variazione nel tempo della massa è allora
$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt}\int\int\int_\Omega \rho(x, y, z, t)dxdydz$$

Si dimostra che se ρ e $\partial_t \rho$ sono continue in $\Omega \times [a,b]$, allora $\forall t \in [a,b]$ vale la relazione

$$\frac{d}{dt} \int\int\int_{\Omega} \rho(x,y,z,t) dxdydz = \int\int\int_{\Omega} \partial_t \rho(x,y,z,t) dxdydz$$

Nell'ultimo passaggio si è utilizzato il teorema di derivazione sotto il segno di integrale.
Ma, in assenza di sorgenti o pozzi in Ω, la velocità di variazione della massa contenuta in Ω si deve alla quantità di fluido che nell'unità di tempo esce o entra attraverso $\partial\Omega$, ovvero il flusso del vettore $\rho\boldsymbol{v}$.
Più precisamente, il flusso $\rho\boldsymbol{v}$ uscente da $\partial\Omega$ sarà pari alla rapidità di decrescita di $M(t)$.
Deve valere allora la relazione (legge di conservazione della massa)

$$\int\int_{\partial\Omega} \rho\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}_e dS = -\int\int\int_{\Omega} \partial_t \rho dxdydz.$$

Applicando il teorema della divergenza, l'equazione diventa

$$\int\int\int_{\Omega} \mathrm{div}(\rho\boldsymbol{v}) dxdydz = -\int\int\int_{\Omega} \partial_t \rho dxdydz$$

Se ora Ω è una sferetta di raggio r centrata in un punto $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$, dividendo l'equazione per il volume di Ω e facendo il limite per $r \to 0$ si ottiene (sempre il teorema della media e per la continuità degli integrali)

$$\mathrm{div}(\rho\boldsymbol{v})(x,y,z,t) = -\partial_t \rho(x,y,z,t)$$

ovvero l'equazione di continuità:

$$\partial_t \rho(x,y,z,t) + \mathrm{div}(\rho\boldsymbol{v})(x,y,z,t) = 0.$$