CLASSIFICAZIONE PUNTI STAZIONARI

I) Porre gradiente della funzione $f(x;y)$ uguale al vettore nullo: $\nabla f = \underline{0}$
perciò: calcolare le derivate parziali e risolvere il sistema $\begin{cases} f'_x(x;y)=0 \\ f'_y(x;y)=0 \end{cases}$
dal quale i risultati mi danno le coordinate dei pt. stazionari

II) Ricavo la matrice Hessiana: $Hf_{(x;y)} = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x;y) & f''_{xy}(x;y) \\ f''_{yx}(x;y) & f''_{yy}(x;y) \end{vmatrix}$ (N.B.) Per TEOREMA DI SCHWARZ: $f''_{xy}(x;y) = f''_{yx}(x;y)$

III) Valutare la Hessiana ottenuta nei punti stazionari

IV) Calcolare il determinante della matrice Hessiana: $|Hf(x;y)|$

V) Cosistiche:
- $\det|Hf| > 0 \quad \vee \quad f''_{xx} > 0 \quad \Rightarrow$ MINIMO
- $\det|Hf| > 0 \quad \vee \quad f''_{xx} < 0 \quad \Rightarrow$ MASSIMO (N.B.) LOCALI (relativi)
- $\det|Hf| < 0 \quad \Rightarrow$ SELLA

→ Come si trova se sono assoluti?

I) Considero la funzione in prossimità della retta $y=0$; ossia $f(x;0)$

$y=0$: $f(x;0) \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} f(x;0) = l$

$\Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} f(x;0) = \pm\infty$ la funzione è illimitata (sup./inf.) perciò non sarà mai un pt. stazionario assoluto

II) Approccio tramite definizione: Considerato un punto generico A questo per essere max./min. assoluto deve valere:

MAX: $f(x;y) \le f(A) \quad \forall (x;y) \in D$

MIN: $f(x;y) \ge f(A) \quad \forall (x;y) \in D$

esempio(1): $f(x;y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$

$\nabla f = \underline{0} \Rightarrow \begin{cases} f_x = 6x^2 - 6y = 0 \\ f_y = -6x + 6y = 0 \end{cases}$ $A(0;0)$ $B(1;1)$

$Hf(x;y) = \begin{vmatrix} 12x & -6 \\ -6 & 6 \end{vmatrix}$

$\Rightarrow Hf(A) = \begin{vmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 6 \end{vmatrix} \Rightarrow \det|Hf| = -36 < 0$ (PT. di SELLA)

$Hf(B) = \begin{vmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 6 \end{vmatrix} \Rightarrow \det|Hf| = 36 > 0 \quad \vee \quad f_{xx} = 12 > 0$ (MINIMO RELATIVO)

→ B è anche minimo assoluto?

$\lim_{x\to-\infty} f(x;0) = \lim_{x\to-\infty} 2x^3 = -\infty$ (NO!)

esempio(2): $f(x;y) = x^2 - 2x + y^4 + y^2$

$\nabla f = \underline{0} \Rightarrow \begin{cases} f_x = 2x - 2 = 0 \\ f_y = 4y^3 + 2y = 0 \end{cases}$ $A(1;0)$

$Hf(x;y) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12y^2+2 \end{vmatrix}$

$\Rightarrow Hf(A) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow \det|Hf| = 4 > 0 \quad \vee \quad f_{xx} = 2 > 0$ (MINIMO RELATIVO)

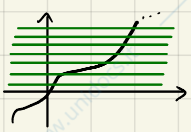
→ A è anche minimo assoluto?

TRAMITE LA DEFINIZIONE: $f(x;y) \ge f(A) \Rightarrow x^2 - 2x + y^4 + y^2 \ge -1 = (x-1)^2 + y^4 + y^2 \ge 0 \quad \forall x \in D$

$\Rightarrow$ A è anche MINIMO ASSOLUTO

→ Come capire se una soluzione è l'unica (UNICITÀ DI UNA SOLUZIONE) [può essere utile per calcolare: $\nabla f = \underline{0}$]

$\begin{cases} y = f(x) \\ y = K \end{cases}$



Quando k è unica? Quando $f(x)$ è INIETTIVA; ossia deve essere invertibile e perciò, a livello pratico, la derivata della funzione non cambia segno (è STRETTAMENTE MONOTONA)

esempio: Considero:
$\begin{cases} g(x) = \frac{1}{x} - x + \ln x \\ g(1) = 0 \end{cases}$

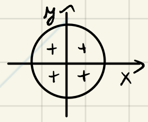
Perciò calcolo $g'(x) := -\frac{x^2 - x + 1}{2} < 0 \quad \forall x \in D'$ (è sempre strettamente minore di zero)

$\Rightarrow g(x)$ è monotona $\Rightarrow x_0 = 1$ è unica soluzione

→ Come agire se il test Hessiano fallisce ⟹ 3 STRATEGIE (per capire che pt. stazionario è...)

esempio$^{(1)}$: $g_1(x;y)=x^4+y^4$; $\nabla g_1(x;y)=\begin{pmatrix}4x^3\\4y^3\end{pmatrix}$ (0;0) PT. STAZIONARIO ; $Hf(x;y)=\begin{pmatrix}12x^2 & 0\\0 & 12y^2\end{pmatrix} \Rightarrow Hf(0;0)=0$

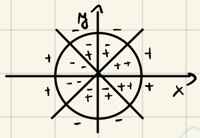
ma: $f(x;y)=x^4+y^4\geq 0 \quad \forall (x;y)\in\mathbb{R}^2$



⟹ (0;0) MINIMO RELATIVO

esempio$^{(2)}$: $g_2(x;y)=x^4-y^4=\underbrace{(x^2+y^2)}_{\geq 0}\overset{(1)}{(x+y)}\overset{(2)}{(x-y)}$ → (1) $x+y\geq 0 \rightarrow y\geq -x$

(2) $x-y\geq 0 \rightarrow y\leq x$



⟹ (0;0) PT. DI SELLA

esempio$^{(3)}$: $g_3(x;y)=-x^4-y^4=-(x^4+y^4)\leq 0 \quad \forall (x;y)\in\mathbb{R}^2$ ⟹ (0;0) MASSIMO RELATIVO

OTTIMIZZAZIONE VINCOLATA

→ VINCOLO DI UGUAGLIANZA

Data $f(x;y)$ determinare eventuali estremi di f lungo la curva γ (VINCOLO DI UGUAGLIANZA determinato da un equazione)

N.B. Verificare (e esplicitare) che: f continua; $\gamma(I)$ compatto (ovvero un insieme chiuso e limitato) perciò per Weierstrass esistono max./min. assoluti lungo γ ...

COME DIMOSTRARLO: I) MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE (VINCOLO NON ESPLICITABILE)

esempio[1]: $f(x;y) = xy$ $\qquad z = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{x^2 - xy + y^2 - 1}_{F(x;y)} = 0\}$

(1) Controllo i pti. singolari del vincolo z:

$\nabla F(x;y) = \underline{0} \rightarrow \nabla F(x;y) = \begin{cases} 2x - y = 0 \\ -x + 2y = 0 \end{cases} \qquad A(0;0)$

(2) Verifico che i pti. ottenuti appartengano al vincolo z (REGOLARITÀ DEL VINCOLO):

$A(0;0) \in z$? $\quad F(0;0) = 1 \neq 0 \implies A(0;0) \notin z \implies$ tutti i pti. di z sono regolari

(3) Cerco i pti. critici di $\mathcal{L}(x;y;\lambda) = f(x;y) - \lambda F(x;y) \Rightarrow \begin{cases} f_x - \lambda F_x = 0 \\ f_y - \lambda F_y = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = F = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow xy - \lambda(x^2 - xy + y^2 - 1) =$

$= \begin{cases} y - \lambda(2x - y) = 0 \\ x - \lambda(-x + 2y) = 0 \\ x^2 - xy + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y(1+\lambda) = 2\lambda x \quad \text{(I)} \\ x(1+\lambda) = 2\lambda y \quad \text{(II)} \\ \dots \end{cases}$

(I) SE $x = 0$ $\begin{cases} \nearrow y = 0 \implies (0;0) \notin z \quad X \\ \searrow \lambda = -1 \implies y = 0 \implies (0;0) \notin z \quad X \end{cases}$

(II) SE $y = 0$ $\begin{cases} \nearrow x = 0 \implies (0;0) \notin z \quad X \\ \searrow \lambda = -1 \implies x = 0 \implies (0;0) \notin z \quad X \end{cases}$

$\implies \begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{cases}$ quindi posso dividere $\begin{cases} \frac{y}{x}(1+\lambda) = 2\lambda \\ \frac{x}{y}(1+\lambda) = 2\lambda \end{cases} \rightarrow \frac{y}{x}\cancel{(1+\lambda)} = \frac{x}{y}\cancel{(1+\lambda)} \rightarrow \frac{y}{x} = \frac{x}{y}$ IN QUANTO $\lambda \neq -1$

$\rightarrow y^2 - x^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} (y-x)(y+x) = 0 \\ x^2 - xy + y^2 + 1 = 0 \end{cases} \begin{cases} y = -x \implies (\sqrt{1/3}; -\sqrt{1/3}); (-\sqrt{1/3}; \sqrt{1/3}) \\ y = x \implies (1;1); (-1;1) \end{cases}$

(4) Valutare i pti. candidati

(1) $f(1;1) = f(-1;-1) = 1 \implies$ PTI. DI MASSIMO ASSOLUTO

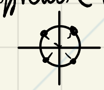
(2) $f(\sqrt{1/3}; -\sqrt{1/3}) = f(-\sqrt{1/3}; \sqrt{1/3}) = -\frac{1}{3} \implies$ PTI. DI MINIMO ASSOLUTO

II) VINCOLO PARAMETRIZZABILE

esempio[2]: $f(x;y) = xy \qquad z = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{x^2 + y^2 = 1}_{F(x;y)}\}$ circonferenza $C(0;0); r = 1$

(1) Definire l'insieme di esistenza del vincolo ed applicare coordinate polari:

$z = \gamma(I) \qquad I = [0; 2\pi] \ni t \qquad \gamma: \begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases}$

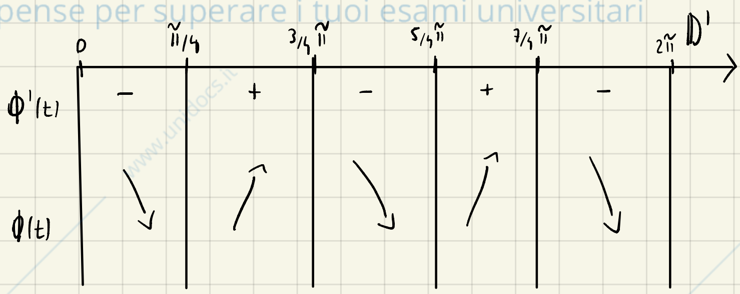


(2) Sostituire con coordinate polari:

$\phi(t) = f(x(t); y(t)) = \cos t \cdot \sin t = \frac{1}{2} \sin 2t \qquad t \in [0; 2\pi]$ N.B. $\begin{cases} \text{(I) } \phi \text{ CONTINUA} \\ \text{(II) } I \text{ COMPATTO} \end{cases} \implies$ WEIERSTRASS $\implies \exists$ M/m ASS.

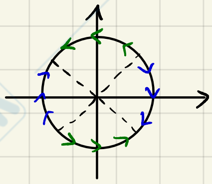
(3) Calcolare la derivata prima e studiare segno

$\phi'(t) = \cos 2t \geq 0 \implies \frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2t \leq \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \implies \frac{\pi}{4} + k\pi \leq t \leq \frac{3}{4}\pi + k\pi$



(5) Analizzo la crescita/decrescita graficamente

N.B (I) CRESCITA = ANTIORARIO ⟹ PUNTA VERSO MASSIMI
(II) DECRESCITA = ORARIO



(6) Analizzo i candidati

(I) $t = \pi/4$ $(\sqrt{2}/2; \sqrt{2}/2)$ $\Rightarrow f(\sqrt{2}/2; \sqrt{2}/2) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}$ (MAX. ASSOLUTO)

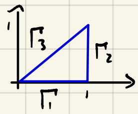
(II) $t = 5/4\,\pi$ $(-\sqrt{2}/2; -\sqrt{2}/2)$ $\Rightarrow f(-\sqrt{2}/2; -\sqrt{2}/2) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}$ (MAX. ASSOLUTO)

(III) $t = 3/4\,\pi$ $(-\sqrt{2}/2; \sqrt{2}/2)$ $\Rightarrow f(-\sqrt{2}/2; \sqrt{2}/2) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{2}$ (MIN. ASSOLUTO)

(IV) $t = 7/4\,\pi$ $(\sqrt{2}/2; -\sqrt{2}/2)$ $\Rightarrow f(\sqrt{2}/2; -\sqrt{2}/2) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{2}$ (MIN. ASSOLUTO)

III) BORDO DATO DA INTERSEZIONE DI PIÙ FUNZIONI

esempio(1): $f(x;y) = e^{x+y}$; $Z = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$



(1) Analizzo $f(x;y)$ lungo le singole funzioni e determino intervallo

(2) Calcolo derivata prima e studio il segno per vedere se crescente o decrescente

• Γ_1: $y = 0$ $x \in [0;1]$

$\Phi_1(x) = f(x;0) = e^x$; $\Phi'(x) = e^x \geq 0 \rightarrow x \geq 0$ (CRESCENTE IN $x \in [0;1]$) $\Rightarrow$ $MAX\ \Phi_1 = e^1 = e$; $min\ \Phi_1 = e^0 = 1$

• Γ_2: $x = 1$ $y \in [0;1]$

$\Phi_2(y) = f(1;y) = e^{y+1}$; $\Phi'(y) = e^{y+1} \geq 0 \rightarrow y \geq 0$ (CRESCENTE IN $y \in [0;1]$) $\Rightarrow$ $MAX\ \Phi_2 = e^{1+1} = e^2$; $min\ \Phi_2 = e^{0+1} = e$

• Γ_3: $y = x$ $x \in [0;1]$

$\Phi_3(x) = e^{x+x} = e^{2x}$; $\Phi'(x) = 2e^{2x} \geq 0 \rightarrow x \geq 0$ (CRESCENTE IN $x \in [0;1]$) $\Rightarrow$ $MAX\ \Phi_3 = e^2$; $min\ \Phi_3 = e^0 = 1$

(3) Valuto massimi e minimi

$\Rightarrow \underset{Z}{MAX}\, f = MAX\{e^2; e\} = e^2$ MASSIMO ASSOLUTO $(A(1;1))$

$\underset{Z}{min}\, f = min\{1; e\} = 1$ MINIMO ASSOLUTO $(O(0;0))$

→ VINCOLO DI DISUGUAGLIANZA = Ha come scopo ottimizzare $f(x;y)$ continua per K chiuso e limitato
⟹ WEIERSTRASS ∃ max./min. assoluti

PROCEDIMENTO: I) Valuto se ci sono pti. stazionari all'interno: $\nabla f = \underline{0}$. Nel caso cui risultano un pt. analizzo se è interno anche al bordo

N.B. Nel caso esistono riconosco la sua tipologia attraverso la matrice Hessiana ⟺ non ottengo altri pti. estremanti lungo il bordo. In caso negativo aspetto di confrontare tutti i pti. solo alla fine per vedere se è un max./min. assoluto. Nel caso in cui non sia né max. né min. assoluto calcolo comunque la Hessiana per capire se è max./min. relativo o un punto di sella

II) Valuto se ci sono pti. stazionari lungo bordo → VEDI VINCOLO UGUAGLIANZA (per i procedimenti)

III) Unisco e quindi valuto la natura dei pti stazionari ottenuti *esempio notevole:* Determinare i pti della curva $y^2+\frac{1}{2}x^2+x^4=1$ aventi minima e massima distanza da $O(0;0)$

· SOLUZIONE: Qual è la funzione $f(x;y)$ di cui trovare min. // max. ?

→ FUNZIONE DISTANZA DALL'ORIGINE $\Rightarrow f(x;y)=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=x^2+y^2$

(equivale ad ottimizzare $d^2=x^2+y^2$)

· riformulo: Determinare minimo e massimo di $f(x;y)=x^2+y^2$
con vincolo: $F(x;y)=0$
$F(x;y)=y^2+\frac{1}{2}x^2+x^4-1$

→ Regolarità del vincolo: $\nabla f=\underline{0} \Rightarrow \begin{cases} x+4x^3=0 \\ 2y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \quad A(0;0)$

ma $F(0;0)\neq 0$ (non nel vincolo) ✓

N.B. EVENTUALI PUNTI DI NON REGOLARITÀ DEL VINCOLO SONO DA TENERE IN CONSIDERAZIONE

Procedo con lo stesso procedimento di un VINCOLO UGUAGLIANZA

→ MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE: $\begin{cases} 2x-\lambda(x+4x^3)=0 \\ 2y-\lambda(2y)=0 \\ y^2+\frac{1}{2}x^2+x^4-1=0 \end{cases} \rightarrow 2y(1-\lambda)=0 \nearrow \lambda=1 \ (1) \ \searrow y=0 \ (2)$

(1) $\begin{cases} \lambda=1 \\ 2x-x-4x^3=0 \end{cases}$

$\begin{cases} \lambda=1 \\ x \end{cases} \nearrow x=0 \ (1.3) \ \searrow x=\pm 1/2 \ (1.2)$

(1.2) $\begin{cases} x=\pm 1/2 \\ y^2+\frac{1}{2}x^2+x^4-1=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=\pm 1/2 \\ y=\pm\frac{\sqrt{13}}{4} \end{cases}$

· 4 CANDIDATI: $(\pm 1/2; \frac{\sqrt{13}}{4})$
$(\pm 1/2; -\frac{\sqrt{13}}{4})$

N.B. NON BASTA SCRIVERE $(\pm\frac{1}{2}; \pm\frac{\sqrt{13}}{4})$
→ SCRITTURA FORMALMENTE SCORRETTA

(1.3) $\begin{cases} x=0 \\ y=\pm 1 \end{cases}$

· 2 CANDIDATI: $(0;\pm 1)$

(2) $\begin{cases} y=0 \\ 1/2\,x^2+x^4-1=0 \end{cases}$

$\begin{cases} y=0 \\ x=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{4}} \end{cases}$ · 2 CANDIDATI: $\left(\pm\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{4}}; 0\right)$

In totale ho ottenuto 8 candidati pti: Sostituisco nella funzione f

N.B. I VALORI MINIMO E MASSIMO DEVONO ESSERE RIFERITI A d NON ALLA d^2

$\Rightarrow m=\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{4}}\ ;\ M=\sqrt{\frac{17}{16}}$

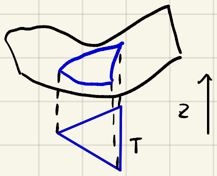
· $f\left(\pm\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{4}}; 0\right)=\frac{\sqrt{17}-1}{4}=d^2$ MINIMI ASSOLUTI

· $f(0;\pm 1)=1=d^2$

· $f(\cdots;\cdots)=\frac{17}{16}=d^2$ MASSIMI ASSOLUTI

INTEGRALI DOPPI → Integrare una funzione $f(x;y)$ lungo un insieme E generico

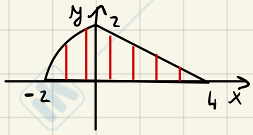
SIGNIFICATO GEOMETRICO = se $f(x;y) \geq 0$; l'integrale calcola il volume del cilindroide con generatrici parallele all'asse z che si proietta dal grafico della funzione $z = f(x;y)$ nel dominio T



I] Scegliere se parametrizzare il generico insieme E in y-semplice oppure in x-semplice

(1) y-SEMPLICE: forma generica: $E = \{ \cdots \leq x \leq \cdots ; \cdots \leq y \leq \cdots \}$ seguendo i segmenti verticali (↑)

esempio:(1)



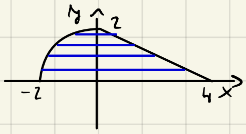
Spezzo: I] $-2 \leq x \leq 0$ = ASSE X ≤ y ≤ SEMICIRCONF. POSITIVA

II] $0 \leq x \leq 4$ = ASSE X ≤ y ≤ RETTA OBLIQUA

$\Rightarrow E^{(1)} = \{ -2 \leq x \leq 0 ; \ 0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2} \} \cup \{ 0 \leq x \leq 4 ; \ 0 \leq y \leq 2 - \tfrac{1}{2}x \}$

(2) x-semplice: forma generica: $E = \{ \cdots \leq y \leq \cdots ; \cdots \leq x \leq \cdots \}$ seguendo i segmenti orizzontali (→)

esempio:(2)



I] $0 \leq y \leq 2$ = SEMICIRCONF. NEGATIVA ≤ x ≤ RETTA OBLIQUA

$\Rightarrow E^{(2)} = \{ 0 \leq y \leq 2 ; \ \sqrt{4-y^2} \leq x \leq 4 - 2y \}$

II] Calcolare integrale partendo con il più interno la x/y-semplice scelta lungo la quale parametrizzare

esempio:(1) l'integrale di $f(x;y)$ su $E^{(1)}$: $\int_{-2}^{0} \left(\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} f(x;y)\, dy \right) dx + \int_{0}^{4} \left(\int_{0}^{2-\frac{1}{2}x} f(x;y)\, dy \right) dx$

esempio:(2) l'integrale di $f(x;y)$ su $E^{(2)}$: $\int_{0}^{2} \left(\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{4-2y} f(x;y)\, dx \right) dy$

→ PROPRIETÀ DI LINEARITÀ DEGLI INTEGRALI (integrali doppi su rettangoli per f a variabili separate)

$f(x;y) = h(x) \cdot g(y)$ a variabili separate ; $\iint_D f(x;y)\, dx\, dy \Rightarrow \left(\int_a^b h(x)\, dx \right) \cdot \left(\int_c^d g(y)\, dy \right)$

con $D = [a;b] \times [c;d]$

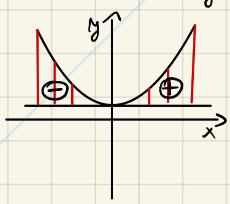
perciò CONDIZIONI INIZIALI = $\begin{cases} \text{estremi di integrazione indipendenti tra loro} \\ \text{integranda } f(x;y) = h(x) \cdot g(y) \end{cases}$

esempio: $\int_{-1/2}^{2} \left(\int_{-1}^{1} \frac{\sin y}{1+x^2}\, dy \right) dx = \int_{-1/2}^{2} \frac{1}{1+x^2}\, dx \cdot \int_{-1}^{1} \sin y\, dy$

→ simmetrie: Dato $\iint_E f\, dx\, dy$ se: $\begin{cases} f \text{ integrabile in E} \\ f \text{ simmetrica rispetto asse x} \\ f \text{ dispari in y} \end{cases} \vee \begin{cases} f \text{ integrabile in E} \\ \text{E simmetrico rispetto asse y} \\ f \text{ dispari in x} \end{cases}$

⇒ l'integrale è nullo

esempio: $f(x;y) = \frac{x}{\sqrt{y}}$; $E = \{ |x| \leq 1 ; 1 \leq y \leq x^2 + 1 \}$

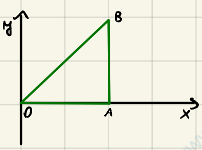


$\begin{cases} f \text{ integrabile su E} \\ \text{E simmetrico asse y} \\ f(-x;y) = -\frac{x}{\sqrt{y}} = -f(x;y) \rightarrow \text{DISPARI} \end{cases}$

$\Rightarrow \iint_E \frac{x}{\sqrt{y}}\, dx\, dy = \emptyset$

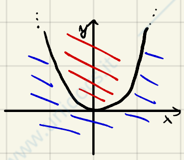
→ integrazione di moduli (N.B) studiare i due casi della definizione di modulo

esempio: $\iint_T |y - x^2|\, dx\, dy$; T triangolo di vertici O(0;0); A(1;0); B(1;1) con $f(x;y)$ continua in T ⇒ è integrabile

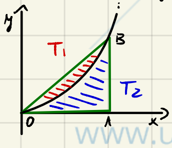


(1) Studio i due casi della definizione di modulo:

$|y - x^2| = \begin{cases} y - x^2 & \text{se } y \geq x^2 \\ x^2 - y & \text{se } y \leq x^2 \end{cases}$; perciò rappresento la parabola



(2) Interseco i grafici della parabola e di T:



perciò devo andare a dividere dominio → $\iint_{T_1} (y - x^2)\, dx\, dy + \iint_{T_2} (x^2 - y)\, dx\, dy$

T_1: y-semplice, x-semplice } preferisco parametrizzare y-semplice: $\{0 \le x \le 1 ;\ x^2 \le y \le x\}$ (↑)

T_2: y-semplice, x-semplice } preferisco parametrizzare y-semplice: $\{0 \le x \le 1 ;\ 0 \le y \le x^2\}$ (↑)

(3) Svolgo calcoli: $\int_0^1 \left(\int_{x^2}^{x} (y-x^2)\, dy\right) dx + \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} (x^2-y)\, dy\right) dx = \dots = \frac{1}{2}\left[\frac{2x^5}{5} - \frac{2x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 7/60$

→ parametrizzazione circonferenze (COORDINATE POLARI)

(1) Sostituisco $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$ sia in $f(x;y)$ sia nell'insieme E

(2) Ricavo il nuovo insieme E come ρ-semplice o θ-semplice

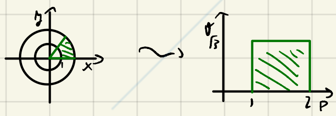
(3) Calcolo il determinante della matrice Jacobiana ($=\rho$)

(4) Sostituisco nell'integrale: $\iint_E f(\rho\cos\theta; \rho\sin\theta) \cdot \rho\, d\rho\, d\theta$

esempio: $f(x;y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}$ $\qquad \Omega = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < \sqrt{3}x \ \vee \ 1 < x^2+y^2 < 4\}$

Sostituisco con coordinate polari: $f(\rho;\theta) = \frac{1}{1+\rho^2}$; $\Omega = \{(\rho;\theta) \in \mathbb{R}^2 : tg\theta < \sqrt{3} \ \vee \ 1 < \rho < 2\}$

$\theta \in (0; \pi/3)$ $\qquad \rho \in (1;2)$



$\Rightarrow \iint_\Omega f\, dx\, dy = \int_0^{\pi/3} \int_1^2 \frac{1}{1+\rho^2} \cdot \rho\, d\rho\, d\theta = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \ln(1+\rho^2)\Big|_1^2 = \frac{\pi}{6} \cdot \ln\left(\frac{5}{2}\right)$

→ cambio di variabile

esempio: $\iint_E \frac{2x+y}{x-y}\, dx\, dy$; $E = \{-3 \le 2x+y \le 1 ;\ 1 \le x-y \le 3\}$

→ $f(x;y)$ ed E entrambi scritti in termini di $2x+y$; $x-y$ $\Rightarrow \begin{cases} u = 2x+y \\ v = x-y \end{cases}$

$f(u;v) = \frac{u}{v}$; $E = \{(u;v) \in \mathbb{R}^2 : -3 \le u \le 1 ;\ 1 \le v \le 3\}$

→ Calcolo il modulo della Jacobiana: $\begin{cases} u = 2x+y \\ v = x-y \end{cases}$ $\begin{cases} x = y+v \\ u = 2y+2v+y \end{cases}$ $\begin{cases} x = \frac{1}{3}u + \frac{1}{3}v \\ y = \frac{1}{3}u - \frac{2}{3}v \end{cases}$ (ricavare $x;y$ in fz. di $u;v$)

$J(u;v) = \begin{vmatrix} dx/du & dx/dv \\ dy/du & dy/dv \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{vmatrix} = |\det(J)| = \left|-\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right| = +\frac{1}{3}$

$\Rightarrow \iint_{E(u;v)} \frac{u}{v} \cdot \frac{1}{3}\, du\, dv = \int_{-3}^{1} \left(\int_1^3 \frac{u}{v} \cdot \frac{1}{3}\, dv\right) du = \dots = -\frac{4}{3} \cdot \ln 3$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

→ equazione retta tangente al grafico della soluzione nel dato iniziale

RETTA TANGENTE: $y - y_0 = m(t - t_0)$ dove: ! $\begin{cases} y_0 = y(t_0) \\ t_0 \end{cases}$ sono dato iniziale

$\Downarrow$ $m = y'(t_0)$ (basta sostituire t_0 nella equazione differenziabile data dal problema di Cauchy)

esempio: $\begin{cases} y' = \frac{1}{t+1} y - \frac{1}{t-2} \\ y(1) = 0 \end{cases}$

· Dal dato iniziale ricavo: $\begin{cases} t_0 = 1 \\ y(t_0) = 0 \end{cases}$ · Calcolo $m = y'(t_0) = \frac{1}{1+1} y(1) - \frac{1}{1-2} = 0 - \frac{1}{-1} = 1$

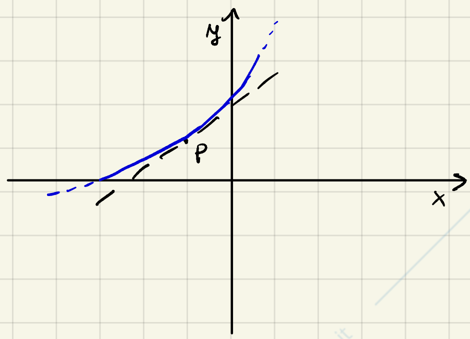
$\Rightarrow y = 1(t-1)$

→ grafico locale della soluzione nel dato iniziale

Sappiamo: t_0 ed $y(t_0)$ $\Rightarrow$ PASSAGGIO PER PUNTO $P(t_0; y(t_0))$

Ricaviamo: $y'(t_0)$ $\Rightarrow$ MI DICE MONOTONIA ed $y''(t_0)$ $\Rightarrow$ MI DICE CONCAVITÀ

esempio: $\begin{cases} y' = -\frac{1}{x} y + x^2 \\ y(-1) = 1 \end{cases}$



· PASSAGGIO PER IL PUNTO: $P(-1; 1)$

· $y'(-1) = -\frac{1}{-1} \cdot (1) + (-1)^2 = 2$ $\nearrow m$

· $y'' = \frac{1}{x^2} y - \frac{1}{x} y' + 2x$

$y''(-1) = 1 \cdot (1) - \frac{1}{-1}(2) - 2 = 1$ $\smile$

→ soluzione del problema di Cauchy

Equazione differenziale scritta nella seguente forma: $y' = p(t)\, y + q(t)$

INTEGRALE GENERALE: $y(t) = e^{+k(t)} \left[c + \int e^{-k(t)} q(t)\, dt \right]$ dove: $k(t) = \int p(t)\, dt$

ATTENZIONE: se $q(t) = 0 \Rightarrow \int e^{-k(t)} q(t)\, dt = 0$

Ricavo c dal dato iniziale

esempio: $\begin{cases} y' = -\frac{1}{x} y + x^2 \\ y(-1) = 1 \end{cases}$

Ricavo: $k(t) = \int -\frac{1}{x}\, dx = -\ln|x|$ ATTENZIONE: Scompongo modulo $\begin{cases} -\ln x & x > 0 \\ -\ln(-x) & x < 0 \end{cases}$

Scelgo funzione per il quale intervallo appartiene x_0

$x_0 = -1 \Rightarrow K(t) = -\ln(-x)$

Ricavo integrale generale: $y(x) = e^{-\ln(-x)}\left[c + \int e^{\ln(-x)} x^2\, dx\right] =$

$= y(x) = -\frac{1}{x}\left[c + \int -x^3\, dx\right] =$

$= y(x) = -\frac{1}{x}\left[c - \frac{x^4}{4}\right] =$

$= y(x) = -\frac{c}{x} + \frac{x^3}{4}$

Dal dato iniziale: $y(-1)=1$ ricavo $c \longrightarrow 1 = c - \frac{1}{4} \rightarrow c = \frac{5}{4}$

$\Rightarrow y(t) = -\frac{1}{x}\left[\frac{5}{4} - \frac{x^4}{4}\right]$ C.E.: $x \neq 0$

→ intervallo massimale di definizione

[PIÙ GRANDE INTERVALLO IN CUI LA FUNZIONE TROVATA È SOLUZIONE, CIOÈ È DERIVABILE, CONTENENTE IL DATO INIZIALE]

I] Calcolo dominio della soluzione unica del problema di Cauchy

II] Valuto intervallo più grande nel quale appartiene t_0

esempio: $y(t) = -\frac{1}{x}\left[\frac{5}{4} - \frac{x^4}{4}\right]$ D: $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

DATO INIZIALE: $y(-1) = 1 \rightarrow x_0 = -1 \Rightarrow I = (-\infty; 0)$

→ scrivere un problema di Cauchy relativo alla stessa equazione differenziale avente come soluzione una funzione il cui grafico è una retta orizzontale

esempio: $y' = x \tan y$ SOLUZIONI COSTANTI $\Rightarrow \tan y = 0 \Rightarrow y = k\pi$

$\rightarrow \begin{cases} y' = x \tan y \\ y(0) = 2\pi \end{cases}$ oppure $\begin{cases} y' = x \tan y \\ y(2) = \pi \end{cases}$ ...

→ variabili separabili

esempio: $\begin{cases} y' = x \tan y \\ y(0) = -\pi/6 \end{cases}$

$q(x) = x \tan y$ pongo considero: $\cdot\ g(x) = x$ $\Rightarrow$ valuto se $\tan y = 0$ (SOL. COSTANTI)

$\cdot\ f(y) = \tan y$

$\tan y = 0 \iff y = k\pi$ ma nessuna di queste soluzioni lo è anche del problema di Cauchy ($y(0) = -\pi/6$)

$\Rightarrow$ Separo le variabili ed integro: $\int \frac{dy}{\tan y} = \int x\, dx \rightarrow \ln|\sin y| = \frac{x^2}{2} + c$

$\rightarrow |\sin y| = e^{\frac{x^2}{2}+c} \longrightarrow |\sin y| = e^{\frac{x^2}{2}} e^c$ ($k = e^c$)

$\rightarrow |\sin y| = k e^{x^2/2} \iff \sin y = \pm k e^{x^2/2}$

$\Rightarrow y(x) = \arcsin(k e^{x^2/2}) \rightarrow$ trovo k dal dato iniziale

→ equazioni differenziali secondo ordine

(1) EQUAZIONE OMOGENEA: Sostituisco con $y''=\lambda^2$ ed $y'=\lambda$ e risolvo equazione con variabile λ

Scrivo integrale generale: $y_0(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$

(2) EQUAZIONE NON OMOGENEA: → Guarda metodo di somiglianza

(3) SOLUZIONE: $y(t) = y_0(t) + \bar{y}(t)$

→ equazione omogenea $\lambda \in \mathbb{C}$ $(\Delta_\lambda < 0)$

base $(y_0(t))$:= I) $e^{\alpha t}\cos(\beta t)$ se $\beta > 0$; II) $e^{\alpha t}\sin(\beta t)$ se $\beta < 0$ — dove $\lambda = \alpha \pm i\beta$

esempio: $y'' + y' + y = 0$

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \rightarrow \lambda_{1/2} = \frac{-1 \pm \overset{(\Delta<0)}{\sqrt{1-4}}}{2} \Rightarrow \lambda_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} y(t) = e^{-1/2 t}\cos(\sqrt{3}/2) \\ y(t) = e^{-1/2}\sin(\sqrt{3}/2) \end{array}$$

→ metodo di somiglianza

(1) POLINOMIO DI GRADO M: Scrivo Q_M simile alla equazione non omogenea

esempio: $f(t) = 3t-1 \Rightarrow Q_M = At+B$

$f(t) = t^2+t-2 \Rightarrow Q_M = At^2+Bt+C$

N.B. SE $\lambda=0$ È SOLUZIONE DELLA EQUAZIONE OMOGENEA ALLORA: $Q_M = t \cdot Q_m$

SE $\lambda=0$ È SOLUZIONE CON MOLTEPLICITÀ DOPPIA ALLORA: $Q_M = t^2 \cdot Q_m$

(2) ESPONENZIALE: $f(t) = Ae^{\alpha t}$

$$\bar{y}(t) = \begin{cases} Ae^{\alpha t} & \text{SE } \lambda=\alpha \text{ NON È SOLUZIONE DELLA EQ. OMOGENEA} \\ tAe^{\alpha t} & \text{SE } \lambda=\alpha \text{ È SOLUZIONE DELLA EQ. OMOGENEA} \\ t^2Ae^{\alpha t} & \text{SE } \lambda=\alpha \text{ È SOLUZIONE CON MOLTEPLICITÀ DOPPIA} \end{cases}$$

(3) GONIOMETRICHE: $f(t) = A\cos\beta t$ // $A\sin\beta(t)$ // $A\cos\beta t + B\sin\beta t$

$$\bar{y}(t) = \begin{cases} A\cos\beta t + B\sin\beta t & \text{SE } \lambda=i\beta \text{ NON È SOLUZIONE DELLA EQ. OMOGENEA} \\ t(A\cos\beta t + B\sin\beta t) & \text{SE } \lambda=i\beta \text{ È SOLUZIONE DELLA EQ. OMOGENEA} \end{cases}$$

→ risoluzione equazione non omogenea

· Trovare $\bar{y}(t)$ · Calcolare $\bar{y}'(t)$ ed $\bar{y}''(t)$ · Sostituire nella equazione omogenea · Ricavare valore A

esempio: $y'' + 7y' + 6y = 3e^{-2t}$

$\bar{y}(t) = A\cdot e^{-2t}$

$\bar{y}'(t) = -2Ae^{-2t}$ → $(4Ae^{2t}) + 7(-2Ae^{-2t}) + 6(Ae^{-2t}) = 3e^{-2t}$ ⇒ $A = -3/4$

$\bar{y}''(t) = 4Ae^{2t}$

$\Rightarrow \bar{y}(t) = -\frac{3}{4}e^{-2t}$

esempi notevoli: → soluzione particolare y_p che verifica $\lim_{t\to-\infty} y_p(t)=0$

esempio: $y''-2y'+y=0$ → $y_0(t)=c_1e^t+tc_2e^t$ ($\lambda=1$ MOLTEPLICITÀ DOPPIA)

Cerco una soluzione particolare della EDO completa

$\Rightarrow \bar{y}(t)=At^2e^t$ (in quanto $\lambda=1$ MOLTEPLICITÀ DOPPIA)

Calcolo derivate: $\bar{y}'(t)=2Ate^t+At^2e^t$

$\bar{y}''(t)=2Ae^t+2Ate^t+2Ate^t+At^2e^t$

$\Rightarrow \bar{y}''-2\bar{y}'+\bar{y}=e^t$ (dove e^t = FORZANTE) → $2Ae^t=e^t$ → $A=1/2$

da cui una soluzione particolare è: $\bar{y}(t)=\frac{t^2}{2}e^t$

e per il principio di sovrapposizione l'integrale generale è: $y(t)=c_1e^t+tc_2e^t+\frac{t^2}{2}e^t$

$\Rightarrow \bar{y}(t)=\frac{t^2}{2}e^t$ verifica richiesta $\lim_{t\to-\infty} y_p(t)=0$

→ soluzione dell'equazione completa passante per un punto con velocità nulla

Risolvere problema di Cauchy della EDO data avente come dati iniziali:

- $y(x_0)=y_0$ → PASSAGGIO PER IL PUNTO
- $y'(x_0)=0$ → VELOCITÀ NULLA

esempio: $2y''-3y'+y=e^t$ → $y(t)=c_1e^{t/2}+c_2e^t+te^t$; $P(0;1)$

Calcolo: $y'(t)=\frac{c_1}{2}e^{t/2}+c_2e^t+e^t+te^t$

→ $y(0)=1$ ⇒ $1=c_1+c_2$

→ $y'(0)=0$ ⇒ $0=\frac{c_1}{2}+c_2+1$

$\begin{cases} c_1=1-c_2 \\ \frac{1}{2}-\frac{c_2}{2}+c_2=-1 \end{cases}$ $\begin{cases} c_1=4 \\ c_2=-3 \end{cases}$

$\Rightarrow y(t)=4e^{t/2}-3e^t+te^t$