

# Analisi Matematica II

## Raccolta di esercizi

## CALCOLO DIFFERENZIALE

## FOGLIO 1: NOZIONI DI BASE

1. Trovare e disegnare il dominio delle seguenti funzioni di due variabili

$$1.1. f(x, y) = \frac{x}{y} \quad [\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}]$$

$$1.2. f(x, y) = \frac{y}{x-3} \quad [\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 3\}]$$

$$1.3. f(x, y) = \frac{2x}{x+y} \quad [\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq -x\}]$$

$$1.4. f(x, y) = \frac{x+y}{x-y+1} \quad [\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq x+1\}]$$

$$1.5. f(x, y) = \sqrt{x+y+2} \quad [\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq -x-2\}]$$

$$1.6. f(x, y) = \frac{\sqrt{x-y}}{x-1} \quad [\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y, x \neq 1\}]$$

$$1.7. f(x, y) = \frac{x+y}{x^2+y^2-1} \quad [\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \neq 1\}]$$

$$1.8. f(x, y) = \log(4-x^2-y^2) \quad [\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 4\}]$$

$$1.9. f(x, y) = \sqrt{x^2-1-y} \quad [\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x^2-1\}]$$

2. Identificare il dominio delle seguenti funzioni di tre variabili

$$2.1. f(x, y, z) = \frac{x+y+z}{z-1} \quad [\mathbb{R}^3 \text{ meno il piano } z=1]$$

$$2.2. f(x, y, z) = \frac{x^2+y^2+3}{x^2+y^2+z^2} \quad [\mathbb{R}^3 \setminus \{0, 0, 0\}]$$

$$2.3. f(x, y, z) = \frac{z+2}{xyz} \quad [\mathbb{R}^3 \text{ meno i piani coordinati}]$$

$$2.4. f(x, y, z) = \sqrt{x+y+z-1} \quad [\text{il semispazio } x+y+z \geq 1]$$

$$2.5. f(x, y, z) = \log(1-x^2-y^2-z^2) \quad [\text{l'interno della sfera di raggio 1 e centro l'origine}]$$

$$2.6. f(x, y, z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2-4} \quad [\mathbb{R}^3 \text{ meno la sfera aperta di raggio 2 e centro l'origine}]$$

$$2.7. f(x, y, z) = \log(z-x^2-y^2) \quad [\text{l'interno del paraboloide } z=x^2+y^2]$$

$$2.8. f(x, y, z) = \frac{\sqrt{1-z}}{\sqrt{z-x^2-y^2}} \quad [\text{l'interno del paraboloide } z=x^2+y^2 \text{ sotto al piano } z=1]$$

3. Disegnare alcune curve di livello delle seguenti funzioni:

$$a) f(x, y) = \frac{x-y}{x+y} \quad b) f(x, y) = \sin(x^2+y^2) \quad c) f(x, y) = x^2+5y^2 \quad d) f(x, y) = e^{x^2-y^2}$$

4. Calcolare le derivate parziali  $\frac{\partial f}{\partial x}$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$  delle seguenti funzioni

$$a) f(x, y) = 2x + 3y - 1 \quad b) f(x, y) = x^2 + y^2 \quad c) f(x, y) = y^2 - x^2$$

$$d) f(x, y) = 3x^2 - 4y^3 \quad e) f(x, y) = xy + x \quad f) f(x, y) = x^2 + x - 2$$

$$g) f(x, y) = x^2y^3 - xy^2 \quad h) f(x, y) = \frac{x}{y} \quad i) f(x, y) = \frac{x+1}{y-1}$$

$$j) f(x, y) = \sqrt{xy} \quad k) f(x, y) = e^{x^2-y} \quad l) f(x, y) = \sin(x+2y)$$

$$m) f(x, y) = \log(x^2+y^2) \quad n) f(x, y) = e^y \sin x \quad o) f(x, y) = (3x+2y)^4$$

**Risposte da j) a o)**

$$j) \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y}{2\sqrt{xy}}; \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x}{2\sqrt{xy}} \quad k) \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xe^{x^2-y}; \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -e^{x^2-y}$$

$$l) \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \cos(x+2y); \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2\cos(x+2y) \quad m) \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2x}{x^2+y^2}; \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2y}{x^2+y^2}$$

$$n) \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^y \cos x; \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = e^y \sin x \quad o) \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 12(3x+2y)^3; \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 8(3x+2y)^3$$

5. Calcolare le derivate seconde delle funzioni dell'esercizio 3.

**Risposte da j) a o)**

$$j) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{-y^2}{4(xy)^{\frac{3}{2}}}; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{-x^2}{4(xy)^{\frac{3}{2}}}; \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{1}{4\sqrt{xy}}$$

$$k) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = (2+4x^2)e^{x^2-y}; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = e^{x^2-y}; \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -2xe^{x^2-y}$$

$$l) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -\sin(x+2y); \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -4\sin(x+2y); \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -2\sin(x+2y)$$

$$m) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{2y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{2x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}; \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$n) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -e^y \sin x; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = e^y \sin x; \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = e^y \cos x$$

$$o) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 108(3x+2y)^2; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 48(3x+2y)^2; \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 72(3x+2y)^2$$

6. Determinare le derivate delle seguenti funzioni nelle direzioni e nei punti assegnati:

$$6.1. f(x, y) = e^{-x^2+y^4} \text{ nel punto } P = (1, 0) \text{ secondo la direzione del vettore } v = (1, 1) \quad \left[ -\sqrt{2}/e \right]$$

$$6.2. f(x, y) = e^x \cos y \text{ nel punto } P = (0, 0) \text{ secondo la direzione del vettore } v = (2, -1) \quad \left[ \frac{2}{\sqrt{5}} \right]$$

$$6.3. f(x, y) = x^2 - xy - 2y^2 \text{ nel punto } P = (1, 2) \text{ nella direzione formante un angolo di } \pi/3 \text{ con l'asse } x. \quad \left[ -9\sqrt{3}/2 \right]$$

$$6.4. f(x, y) = x^3 - 2x^2y + xy^2 + 1 \text{ nel punto } P = (1, 2) \text{ nella direzione che congiunge il punto } P \text{ al punto } Q = (4, 6). \quad [1]$$

7. Calcolare le derivate parziali  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial z}$  delle seguenti funzioni

$$7.1. f(x, y, z) = x^3y^2z + 2x - 3y + z + 5$$

$$7.2. f(x, y, z) = (xy)^z$$

$$7.3. f(x, y, z) = z^{xy}$$

**Risposte**

$$7.1. \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y^2z + 2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3yz - 3, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = x^3y^2 + 1$$

$$7.2. \frac{\partial f}{\partial x} = yz(xy)^{z-1}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = xz(xy)^{z-1}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = (xy)^z \log(xy)$$

$$7.3. \frac{\partial f}{\partial x} = yz^{xy} \log z, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = xz^{xy} \log z, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = xy z^{xy-1}$$

8. Sia  $f(x, y, z) = (x-y)(y-z)(z-x)$ . Verificare che  $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = 0$  in ogni punto.

9. Determinare le derivate delle seguenti funzioni nelle direzioni e nei punti assegnati:

$$9.1. f(x, y, z) = x^2 - 3yz + 5 \text{ nel punto } P = (1, 2, -1) \text{ nella direzione che forma angoli uguali con gli assi coordinati.} \quad \left[ -\sqrt{3}/3 \right]$$

$$9.2. f(x, y, z) = xy + yz + zx \text{ nel punto } P = (2, 1, 3) \text{ nella direzione che congiunge il punto } P \text{ al punto } Q = (5, 5, 15). \quad [68/13]$$

## FOGLIO 2: APPLICAZIONI DEL CALCOLO DIFFERENZIALE

1. Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico delle seguenti funzioni nei punti indicati

1.1.  $f(x, y) = \sin x \cos y$  in  $P = (0, 0)$ . [ $z = x$ ]

1.2.  $f(x, y) = e^{x+y}$  [ $z = 1 + x + y$ ]

1.3.  $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 - y$  in  $P = (2, -1, 3)$ . [ $2x - y - z - 2 = 0$ ]

1.4.  $f(x, y) = x^2 + y^2$  in  $P = (1, -2, 5)$ . [ $2x - 4y - z - 5 = 0$ ]

1.5.  $f(x, y) = e^{x^2-y^2} + \sqrt{1+x^2+y^4}$  in  $P = (1, 0, f(1, 0))$ . [ $z = e + \sqrt{2} + (e + 1/\sqrt{2})(x - 1)$ ]

2. Scrivere il polinomio di Taylor del secondo ordine centrato nell'origine delle seguenti funzioni

2.1.  $f(x, y) = \cos x + \cos y$  [ $2 - (x^2 + y^2)/2$ ]

2.2.  $f(x, y) = \cos x \cos y$  [ $1 - (x^2 + y^2)/2$ ]

2.3.  $f(x, y) = \sin(xy)$  [ $xy$ ]

2.4.  $f(x, y) = \sin x \cos y$  [ $x$ ]

2.5.  $f(x, y) = e^{x+y}$  [ $1 + x + y + xy + (x^2 + y^2)/2$ ]

2.6.  $f(x, y) = e^{xy}$  [ $1 + xy$ ]

2.7.  $f(x, y) = e^x \sin y$  [ $y + xy$ ]

3. Scrivere il polinomio di Taylor del secondo ordine delle seguenti funzioni centrato nel punto dato

3.1.  $f(x, y) = \frac{1}{2+x-2y}$  in  $P_0 = (2, 1)$ .  
[ $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{2}(y-1) + \frac{1}{8}(x-2)^2 - \frac{1}{2}(x-2)(y-1) + \frac{1}{2}(y-1)^2$ ]

3.2.  $f(x, y) = \frac{\sin x}{y}$  in  $P_0 = (\frac{\pi}{2}, 1)$ . [ $1 - (y-1) + (y-1)^2 - \frac{1}{2}(x - \pi/2)^2$ ]

4. Trovare i punti critici delle seguenti funzioni e classificarli

a)  $f(x, y) = x + y - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}y^3$ ,

b)  $f(x, y) = \frac{1}{2}(x^3 + y^3) - xy$ ,

c)  $f(x, y) = 2x^2 + 2xy + 3y^2 + y^3$

d)  $f(x, y) = xy - x^2 - y$

e)  $f(x, y) = 2x^2 + y^2 - 4x - 4y$

f)  $f(x, y) = x^2 + 2xy - 4x + 8y$

g)  $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + 2y^2}$

h)  $f(x, y) = (x^2 + y^2 - 4)(x^2 + 2)$

i)  $f(x, y) = xy^2 e^{-x} + x^2 - 2x$

j)  $f(x, y) = ye^{y-x^2}$

### Risposte

a) (1, 1) min (-1, -1) max (-1, 1), (1, -1) selle; b) (0, 0) sella ( $\frac{2}{3}, \frac{2}{3}$ ) min

c) (0, 0) min ( $\frac{5}{6}, -\frac{5}{3}$ ) sella d) (1, 2) sella

e) (1, 2) min; f) (-4, 6) sella

g) non ha punti critici h) (0, 0) sella, (-1, 0) (1, 0) minimi

i) (2, 0) min, (0,  $\sqrt{2}$ ) (0,  $-\sqrt{2}$ ) selle j) (0, -1) min

5. Mostrare che il punto  $P = (0, 0)$  è critico per la funzione

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - cxy$$

per ogni valore del parametro  $c \in \mathbb{R}$  e classificarne il tipo al variare di  $c$ .

$$[(0, 0) \text{ è minimo locale per } c \in [-2, 2], \text{ sella per } c \notin [-2, 2]]$$

6. (Non standard) Dimostrare che la funzione  $f(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$  ha un minimo locale se ristretta a ogni retta passante per l'origine, ma l'origine non è un minimo locale per  $f$ .

## CALCOLO INTEGRALE

## FOGLIO 1: INTEGRALI DOPPI

1.  $\int_D xy \, dx dy$ ,  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1 + x\}$ . [5/8]
2. Calcolare l'area della regione  $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2, e^{-x} \leq y \leq 2 - \frac{1}{4}x^2 \right\}$ .  $[7/3 + e^{-2}]$
3.  $\int_D (3y + e^x) \, dx dy$ ,  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x^2\}$ .  $[8e^{-1}]$
4.  $\int_D (x + y) \, dx dy$ ,  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^3 \leq y \leq 2\sqrt{x}\}$ .  $[39/35]$
5.  $\int_D e^{x+y} \, dx dy$ ,  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1\}$ .  $[e - e^{-1}]$
6.  $\int_D (x - 1)e^{x^2+y} \, dx dy$ ,  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2, -2x + 1 \leq y \leq -x^2 + 1\}$ .  $[0]$
7.  $\int_D |y - x| \, dx dy$ ,  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1\}$ .  $[5/6]$
8.  $\int_D |x - y| \, dx dy$ ,  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1\}$ .  $[11/60]$
9.  $\int_D x^2 e^{xy} \, dx dy$ ,  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y \leq 3x, xy \leq 3\}$ .  $[2e^3/3 + 1/3]$
10.  $\int_D x^2 \, dx dy$ ,  $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq -x^2 + \frac{1}{2}x + 3, y \geq -x^2 - x, y \geq -x^2 + 2x \right\}$ .  $[4]$
11.  $\int_D y^2 \, dx dy$ ,  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \leq y, y^2 \leq x\}$ .  $[3/35]$
12.  $\int_D |xy| \, dx dy$ ,  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ .  $[1/2]$
13.  $\int_D x^2 y^2 \, dx dy$ ,  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1\}$ .  $[1/45]$

## FOGLIO 2: INTEGRALI DOPPI, ANCHE CON CAMBI DI COORDINATE

1.  $\int_D \frac{xy^2}{x^2 + y^2} dx dy, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}.$   $[-7\sqrt{2}/18]$
2.  $\int_D \frac{1}{x+y} dx dy, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x\}.$   $[\log 2]$
3.  $\int_D \frac{y^2}{x^2} dx dy, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq x, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}.$   $[4 - \pi]$
4. Calcolare l'area della regione  $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}.$   $[ab\pi]$
5. Calcolare  $\int_D f(x, y) dx dy,$  dove
 
$$f(x, y) = \begin{cases} 2x - y^2 & \text{se } x + y - 1 < 0 \\ x + y & \text{se } x + y - 1 \geq 0, \end{cases}$$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\} = [0, 1] \times [0, 1].$$
  $[11/12]$
6.  $\int_D x dx dy, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, \frac{\sqrt{3}}{3}x \leq y \leq \sqrt{3}x\}.$   $[7(\sqrt{3} - 1)/6]$
7.  $\int_D |x|y dx dy, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}.$   $[\text{R.}: 1/8]$
8.  $\int_D \frac{xy}{x^2 + y^2} dx dy, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x}{\sqrt{3}} \leq y \leq \sqrt{3}x, 1 \leq xy \leq 4\}.$   $[\pi/4]$
9.  $\int_D |xy| \sin x^2 \cos y^2 dx dy, \quad D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}, -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \leq y \leq \sqrt{\frac{\pi}{2} - x^2} \right\}.$   $[3/8]$
10.  $\int_D x dx dy, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 2x, x^2 + (y - 1)^2 \leq 1\}.$   $[32/75]$
11.  $\int_D \cosh(2y - x) dx dy, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |2y - x| \leq 2, |2y + x| \leq 2\}.$   
Suggerimento: usare il cambio di coordinate  $u = 2y - x, v = 2y + x.$   $[2 \sinh(2)]$
12. Calcolare le coordinate del baricentro di una lamina omogenea (densità = 1) la cui forma è il quarto di ellisse dato dalle condizioni  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, x \geq 0$  e  $y \geq 0.$   $[(4a/3\pi, 4b/3\pi)]$
13. Consideriamo il settore circolare descritto in coordinate polari da  $\rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq \alpha.$  Assumiamo che le densità di massa del settore e del segmento siano costanti e uguali a 1. Per  $\alpha \rightarrow 0,$  il settore "tende" al segmento  $\rho \leq 1, \theta = 0.$  Mostrare che invece il baricentro del settore *non* tende al baricentro del segmento.

## FOGLIO 3: INTEGRALI TRIPLI

1.  $\int_{\Omega} x^2 + y^2 dx dy dz$ , dove  $\Omega$  è il cubo  $[-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$ . [16/3]
2. Sia  $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1\}$ . Calcolare  $\int_{\Omega} z dx dy dz$  a) per fili, b) per strati, c) passando alle coordinate cilindriche.
3. Calcolare  $\int_{\Omega} z dx dy dz$ , dove  $\Omega$  è il tetraedro di vertici  $(0, 0, 0)$ ,  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  e  $(0, 0, 1)$ . [1/24]
4.  $\int_{\Omega} \frac{dx dy dz}{(x + y + z + 1)^3}$ , dove  $\Omega$  è il tetraedro delimitato dai piani coordinati e dal piano  $x + y + z = 1$ . [log 2/2 - 5/16]
5.  $\int_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$ , dove  $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1\}$ . [ $\pi/6$ ]
6.  $\int_{\Omega} (6x - 2y) dx dy dz$ ,  $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 5, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$ . [ $25\pi/4$ ]
7.  $\int_{\Omega} \frac{6y^2 z}{x^2 + y^2} dx dy dz$ ,  $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 2, \sqrt{x^2 + y^2} \leq z\}$ . [ $3\pi/2$ ]
8.  $\int_{\Omega} x^2 dx dy dz$ ,  $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\}$ . [ $\frac{\pi}{5} \left( \frac{8 - 5\sqrt{2}}{12} \right)$ ]
9. Calcolare il volume di  $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1, 1 \leq z \leq 12 - xy\}$ . [ $22\pi$ ]
10.  $\int_{\Omega} x^2 + y^2 dx dy dz$ ,  $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\}$ . [ $4\pi/15$ ]

## FOGLIO 4: INTEGRALI CURVILINEI

1. Calcolare la lunghezza dell'arco di catenaria dato dal grafico di  $f(x) = \cosh x$  per  $x \in [-1, 1]$ .  
[2 sinh(1)]
2. Calcolare  $\int_{\gamma} \sqrt{1+x^2+3y} ds$ , dove  $\gamma$  è l'arco di parabola  $f(x) = x^2$  per  $0 \leq x \leq 3$ . [39]
3. Calcolare  $\int_{\gamma} x^2 y ds$ , dove  $\gamma$  è l'arco di circonferenza di equazione  $x^2 + y^2 = 1$ , situato nel primo e secondo quadrante. [2/3]
4. Calcolare  $\int_{\gamma} z^2 ds$ , dove  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, e^t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ . [ $\frac{1}{3}((1+e^{4\pi})^{3/2} - 2\sqrt{2})$ ]
5. Calcolare il lavoro compiuto dal campo  $F(x, y, z) = (x, xy, xyz)$ , lungo la curva  $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$ ,  $t \in [0, 1]$ , orientata nel senso delle  $t$  crescenti. [37/30]
6. Calcolare il lavoro compiuto dal campo  $F(x, y) = \left( \frac{x+y}{x^2+y^2}, -\frac{x-y}{x^2+y^2} \right)$  lungo la circonferenza  $x^2 + y^2 = 2$ , percorsa in senso antiorario. [-2\pi]
7. Calcolare  $\int_{\gamma} F \cdot dl$ , dove  $F(x, y) = \left( \frac{1}{|x|+|y|}, \frac{1}{|x|+|y|} \right)$  e  $\gamma$  è il bordo del quadrato di vertici  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(-1, 0)$ ,  $(0, -1)$  percorso in senso antiorario. [0]
8. Calcolare  $\int_{\gamma} F \cdot dl$ , dove  $F(x, y) = (-y, x)$  e  $\gamma$  è il bordo, percorso in senso antiorario, dell'insieme  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, y \geq x - 1\}$   
[3\pi/2 + 1]

## FOGLIO 5: CAMPI CONSERVATIVI

1. Stabilire se i campi vettoriali

a)  $F(x, y, z) = (x^2, y, z)$

b)  $G(x, y, z) = (x - xe^z, -y, e^z)$

sono conservativi in  $\mathbb{R}^3$ . In caso affermativo, determinarne un potenziale.

[a)  $U(x, y, z) = x^3/3 + y^2/2 + z^2/2$  b)  $G$  non è conservativo. ]

2. Dato il campo

$$F(x, y) = \left( \frac{(1-x)(1+y^2)}{1+x^2}, \varphi(x)y \right),$$

determinare tutte le funzioni  $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$  per cui  $F$  è conservativo in  $\mathbb{R}^2$ .

$[\varphi(x) = 2 \arctan x - \log(1+x^2) + C]$

3. Verificare che il campo vettoriale

$$F(x, y, z) = \left( xy - \sin z, \frac{x^2}{2} - \frac{e^y}{z}, \frac{e^y}{z^2} - x \cos z \right)$$

è conservativo in  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\}$  e determinarne i potenziali.

$[U(x, y, z) = \frac{x^2}{2}y - x \sin z - \frac{e^y}{z} + C]$

4. Verificare che il campo vettoriale  $F(x, y) = (e^{-y^2}, 1 - 2xye^{-y^2})$  è conservativo in  $\mathbb{R}^2$  e determinarne un potenziale.

$[U(x, y, z) = xe^{-y^2} + y]$

5. Calcolare il lavoro compiuto dal campo  $F(x, y) = (e^y, xe^y - \frac{1}{y})$ , lungo la curva  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  definita da  $\gamma(t) = (te^t, \log(t^2 + 2))$ .

$[3e + \log(\frac{\log 2}{\log 3})]$

6. Sia  $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  e sia  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  il campo vettoriale

$$F(x, y) = \left( \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt[3]{x^2 + y^2}} \right).$$

Sia  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  la curva definita da  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ . Calcolare  $\int_{\gamma} F \cdot d\ell$ . [0]

7. Dato il campo vettoriale  $F(x, y) = (\sin(x+2y) + x \cos(x+2y) + 3y^2 + 5, 2x \cos(x+2y) + \lambda xy)$ ,

a) Determinare  $\lambda$  in modo che il campo sia conservativo in  $\mathbb{R}^2$ .

b) Con tale valore di  $\lambda$ , trovare un potenziale del campo.

$[\lambda = 6, U(x, y) = x \sin(x+2y) + 3xy^2 + 5x + C]$

## FOGLIO 6: INTEGRALI CURVILINEI, TEOREMA DI GREEN

1. Calcolare  $\oint_{\gamma} F \cdot d\ell$ , dove  $F(x, y) = (y^2, x)$  e  $\gamma$  è il bordo del quadrato di vertici  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(0, 1)$ , orientato in senso antiorario. [0]

2. Calcolare  $\oint_{\gamma} F \cdot d\ell$ , dove  $\gamma$  è il bordo del triangolo di vertici  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$ , orientato in senso antiorario e  $F(x, y) = (x^4, xy)$ . [1/6]

3. Calcolare la circuitazione del campo  $F(x, y) = (3y - e^{\sin x}, 7x + \sqrt{y^4 + 1})$  lungo la circonferenza  $x^2 + y^2 = 9$ , orientata in senso antiorario. [36 $\pi$ ]

4. Calcolare la circuitazione del campo  $F(x, y) = (x^3 - xy^3, y^2 - 2xy)$  lungo il bordo del quadrato  $Q = [0, 2] \times [0, 2]$ , percorso in senso antiorario. [R.: 8]

5. Dati il campo  $F(x, y) = (2xy, x)$  e la regione  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 2x\}$ ,

a) indicato con  $\partial D$  il bordo di  $D$  percorso in senso antiorario, calcolare  $\int_{\partial D} F \cdot d\ell$

b) calcolare lo stesso integrale applicando il Teorema di Green.

6. Calcolare la circuitazione del campo  $F(x, y) = (2xy^2 - \sin^3(1 - 3x^2), \frac{3}{2}x^2y + 12 \log(y^4 + 1))$  lungo il bordo dell'insieme

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 4, \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1, x \leq 0, y \leq 0 \right\},$$

orientato in senso antiorario. [R.: -5/2]

7. Sia  $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, (2y + 1)(2x + 1) \leq 4\}$  e sia  $F(x, y) = (x + y, ax)$ , con  $a \in \mathbb{R}$ .

a) Calcolare l'area di  $K$ .

b) Scrivere una parametrizzazione del bordo di  $K$ ,  $\partial K$ , orientato in senso antiorario.

c) Per  $a = 3$ , calcolare l'integrale di  $F$  lungo  $\partial K$  applicando, se possibile, il Teorema di Green.

d) Determinare  $a$  in modo che  $F$  sia conservativo su  $\mathbb{R}^2$ .

$$[a) \log 4 - 3/4 \quad c) 2 \log 4 - 3/2 \quad d) 1]$$

8. Calcolare la circuitazione del campo  $F = (e^{x^2} - y, \frac{x^4}{4} + e^y)$  lungo il bordo della regione  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 9x^2 + y^2 \leq 9, x \geq 0, y \geq 0\}$ , percorso in verso antiorario. [2/5 + 3 $\pi$ /4]

## FOGLIO 7: INTEGRALI DI SUPERFICIE

1. Sia  $\Sigma$  la superficie definita da  $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 3 + 3x^2 + 3y^2, 4 \leq z \leq 8\}$ . Calcolare

$$\int_{\Sigma} \frac{4x^2}{(x^2 + y^2)\sqrt{1 + 36(x^2 + y^2)}} d\sigma.$$

[8 $\pi$ /3]

2. Sia  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$ . Sia  $\Sigma$  il grafico della funzione  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $f(x, y) = e^{2x+y}$ . Calcolare

$$\int_{\Sigma} \frac{xy^2}{\sqrt{1 + 5z^2}} d\sigma.$$

[4/3]

3. Calcolare  $\int_S \frac{z + \cos y}{\sqrt{\cos^2 y + 2 \sin^2 y + 4x^2}} d\sigma$ , dove  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 - \cos y, \text{ con } (x, y) \in T\}$  e  $T$  è il triangolo nel piano  $xy$  di vertici  $A(2, 0)$ ,  $B(0, 3)$ ,  $C(0, -2)$ .

[4]

4. Calcolare  $\int_S \frac{y}{\sqrt{2 + (z - x)^2}} d\sigma$ , dove  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x + e^y, \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1, 2x + 3y \leq 6\}$

[-2]

5. Calcolare  $\int_{\Sigma} \frac{x^2 + y^2}{(1 + e^{2z})^{1/2}} d\sigma$ , dove  $\Sigma$  è la porzione di superficie di equazione  $z = -\frac{1}{2} \log(x^2 + y^2)$  giacente tra i cilindri di equazione  $x^2 + y^2 = e^{-2}$  e  $x^2 + y^2 = 1$ .

[ $\frac{\pi}{2} (1 - e^{-4})$ ]

6. Calcolare  $\int_S (3x^2 + 5y^2) d\sigma$ , dove  $S$  è la porzione della superficie  $z^2 = x^2 + y^2$  tale che  $z \in [1, 2]$ .

[30 $\pi\sqrt{2}$ ]

## FOGLIO 8: TEOREMA DELLA DIVERGENZA (GAUSS)

1. Calcolare il flusso del campo vettoriale  $F(x, y, z) = (4xz, -y^2, yz)$  uscente dal cubo  $[-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$ . [0]
2. Calcolare il flusso del campo vettoriale  $F(x, y, z) = (x^3 + e^{y+z}, y^3 + e^{x+z}, e^{x+y})$  uscente dalla sfera di centro l'origine e raggio  $R$ . [ $8\pi R^5/5$ ]
3. Calcolare il flusso del campo vettoriale  $F(x, y, z) = (4x, -2y^2, z^2)$  uscente dal bordo dell'insieme  $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 3\}$ . [21 $\pi$ ]
4. Dato il campo vettoriale  $F(x, y, z) = (-xz^2, yz^2, z(2 - x^2 + y^2))$ ,
  - a) calcolare il flusso di  $F$  uscente dal bordo dell'insieme  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$
  - b) verificare che  $F$  è conservativo e calcolarne un potenziale.  
[a)  $2\pi$  b)  $U(x, y, z) = -\frac{1}{2}x^2z^2 + \frac{1}{2}y^2z^2 + z^2$ ]
5. Calcolare il flusso del campo vettoriale  $F(x, y, z) = (2x^3 - 10, 2y^3, e^{z/2})$  uscente dal bordo dell'insieme  $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq z \leq 4\}$ . [ $2\pi(33 + e^2)$ ]
6. Calcolare il flusso del campo vettoriale  $F(x, y, z) = (yz, yz^2, zy^2)$  uscente dal bordo dell'insieme  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq y^2 + z^2, z \geq 0, x \leq 1\}$ . [ $\pi/12$ ]

## FOGLIO 9: TEOREMA DEL ROTORE (STOKES)

1. Calcolare il flusso del rotore del campo  $F(x, y, z) = (2x - y, -yz^2, -y^2z)$  attraverso l'emisfero superiore della sfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  con normale che punta verso l'alto.  $[\pi]$
2. Sia  $\Sigma = \{x, y, z \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 4, z = x + e^y\}$  sia  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  il campo vettoriale definito da  $F(x, y, z) = (xy, z, 5)$ . Calcolare il flusso del rotore di  $F$  attraverso  $\Sigma$ , orientata in modo che il versore normale formi un angolo acuto con l'asse  $z$ . Effettuare il calcolo sia direttamente che con il Teorema di Stokes.  $[4\pi]$
3. Sia  $\Sigma$  la superficie definita da  $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ ,  $y \geq 0$ , orientata con normale che punta verso l'alto. Calcolare la circuitazione lungo il bordo di  $\Sigma$  del campo vettoriale  $F(x, y, z) = (y + z, z + x, x + y)$ .  $[0]$
4. Sia  $\gamma$  la curva intersezione del cilindro  $2x^2 + y^2 - 6x = 0$  con piano  $x + z = 3$ , orientata in modo che la sua proiezione sul piano  $(x, y)$  risulti percorsa in verso antiorario. Dato il campo  $F(x, y, z) = (z, x, y)$ , calcolare  $\int_{\gamma} F \cdot d\ell$  direttamente ed utilizzando il teorema di Stokes.  $[9\pi/\sqrt{2}]$
5. Calcolare il flusso del rotore del campo  $F(x, y, z) = (ze^{x^2}, 3(x-1), z(x-1))$  attraverso la superficie definita da  $x = z^2 + y^2$ ,  $z \geq 0$ ,  $x \leq 1$ , con normale che forma un angolo ottuso con l'asse  $x$ .  $[4]$
6. Calcolare il flusso del rotore del campo  $F(x, y, z) = (ze^{x^2}, 3(x-1), z \sin y)$  attraverso la superficie definita da  $x = z^2 + y^2$ ,  $z \geq 0$ ,  $x \leq 1$ , con normale orientata in modo da formare un angolo acuto con l'asse  $x$ .  $[-4 - 2 \cos 1 + 2 \sin 1]$

## SERIE

## FOGLIO 1: SERIE NUMERICHE

1. Scrivere i primi termini della successione delle ridotte delle seguenti serie

$$1.1. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{(n+1)(n+2)}$$

$$1.2. \sum_{n=0}^{\infty} \sin(n) - \sin(n+1)$$

$$1.3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n}}{n}$$

$$1.4. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2 + \sin n}{n^2 \log n}$$

$$1.5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

2. Applicando la condizione necessaria, trovare le serie che non convergono

$$2.1. \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left( e^{\frac{1}{n}} - \cos\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \right) \quad [\text{Divergente}]$$

$$2.2. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 2n}{(n+1)(n+2)} \quad [\text{Divergente}]$$

$$2.3. \sum_{n=1}^{\infty} n^3 \left( \sinh\left(\frac{1}{n}\right) - \sin\left(\frac{1}{n}\right) \right) \quad [\text{Divergente}]$$

$$2.4. \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \log\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \quad [\text{Divergente}]$$

$$2.5. \sum_{n=1}^{\infty} n^3 10^{-n} \quad [\text{Non si può dire nulla}]$$

3. Determinare il carattere delle seguenti serie e calcolarne la somma

$$3.1. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n + 5^n}{10^n} \quad [\text{Convergente, } 11/3]$$

$$3.2. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{9^n - 3^n}{2^n} \quad [\text{Divergente}]$$

$$3.3. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n - (-1)^n}{5^n} \quad [\text{Convergente, } 25/6]$$

$$3.4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi e^n + \pi^n}{\pi^n e^n} \quad [\text{Convergente, } \frac{e\pi-1}{(\pi-1)(e-1)}]$$

$$3.5. \sum_{n=0}^{\infty} (xe^{-|x|})^n \quad [\text{Convergente, } \frac{e^{|x|}}{e^{|x|}-x}]$$

$$3.6. \sum_{n=1}^{\infty} (\arctan |x| + 1)^n \quad [\text{Divergente}]$$

4. Discutere la convergenza delle seguenti serie telescopiche

$$4.1. \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \quad [\text{Divergente}]$$

$$4.2. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \quad [\text{Convergente}]$$

$$4.3. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \cos \left( \frac{\pi}{n} \right) - \cos \left( \frac{\pi}{n+1} \right) \right) \quad [\text{Convergente}]$$

$$4.4. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \log \left( \frac{\pi}{n} \right) - \log \left( \frac{\pi}{n+1} \right) \right) \quad [\text{Divergente}]$$

5. Determinare il carattere delle seguenti serie numeriche applicando il criterio del confronto asintotico

$$5.1. \sum_{n=0}^{\infty} [\log(n+3) - \log(n+1)] \quad [\text{Divergente}]$$

$$5.2. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n - \sqrt{n}}{n^3 - 3n} \quad [\text{Convergente}]$$

$$5.3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + \sqrt[3]{n}}{n^2 + n + 1} \quad [\text{Divergente}]$$

$$5.4. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(n+2)!} \quad [\text{Convergente}]$$

$$5.5. \sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{4 + 3^{-n}} - 2) \quad [\text{Convergente}]$$

$$5.6. \sum_{n=1}^{\infty} (e^{n+\frac{1}{3^n}} - e^n) \quad [\text{Convergente}]$$

$$5.7. \sum_{n=1}^{\infty} (e^{n+\frac{1}{2^n}} - e^n) \quad [\text{Divergente}]$$

$$5.8. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n} \right) \quad [\text{Convergente}]$$

$$5.9. \sum_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \cos \frac{1}{n} \right) \quad [\text{Convergente}]$$

$$5.10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+2^n)}{n^2} \quad [\text{Divergente}]$$

$$5.11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(3^n - 1)}{n^3} \quad [\text{Convergente}]$$

$$5.12. \sum_{n=1}^{\infty} \left( e^{\frac{1}{n}} - 1 - \sin \frac{1}{n} \right) \quad [\text{Convergente}]$$

$$5.13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \sqrt{n} + e^{-\sqrt{n^3}}}{(n+1)^3 + 1 + \cos(n!)} \quad [\text{Convergente}]$$

6. Determinare il carattere delle seguenti serie numeriche applicando il criterio del confronto

$$6.1. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{\cos n}}{n^2 + 1} \quad [\text{Convergente}]$$

$$6.2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{(n+1)\sqrt{n+3}} \quad [\text{Divergente}]$$

$$6.3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n \cdot 4^n} \quad [\text{Convergente}]$$

$$6.4. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n\sqrt{n+1}} \quad [\text{Convergente}]$$

$$6.5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{n} \quad [\text{Convergente}]$$

$$6.6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n} \frac{1}{3^n} \quad [\text{Convergente}]$$

7. Determinare il carattere delle seguenti serie numeriche applicando il criterio del rapporto

$$7.1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{2^n} \quad [\text{Convergente}]$$

$$7.2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n!} \quad [\text{Convergente}]$$

$$7.3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^n n!} \quad [\text{Divergente}]$$

$$7.4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} \quad [\text{Convergente}]$$

$$7.5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \quad [\text{Divergente}]$$

$$7.6. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\log(n+2)}{\sqrt{n!}} \quad [\text{Convergente}]$$

$$7.7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2n^2} \quad [\text{Convergente}]$$

$$7.8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \quad [\text{Convergente}]$$

8. Determinare il carattere delle seguenti serie numeriche applicando il criterio della radice

$$8.1. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} \quad [\text{Convergente}]$$

$$8.2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n^2}}{n^n} \quad [\text{Divergente}]$$

$$8.3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\sqrt{n}}}{n^n} \quad [\text{Convergente}]$$

$$8.4. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 - 2n}{n^2}\right)^{2n^2} \quad [\text{Convergente}]$$

$$8.5. \sum_{n=1}^{\infty} (n^{1/n} - 1)^n \quad [\text{Convergente}]$$

$$8.6. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} \quad [\text{Convergente}]$$

9. Determinare il carattere delle seguenti serie numeriche applicando il criterio di Leibniz

$$9.1. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (3^{1/n} - 1) \quad [\text{Convergente semplicemente}]$$

$$9.2. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2 + 1}{n^3} \quad [\text{Convergente semplicemente}]$$

$$9.3. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \arctan \frac{1}{2n+1} \quad [\text{Converge semplicemente}]$$

$$9.4. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[ \frac{\pi}{2} - \arctan(\log n) \right] \quad [\text{Converge semplicemente}]$$

10. Stabilire il carattere della serie numerica al variare del parametro  $\alpha > 0$

$$10.1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha (\sqrt{n} + 3)} \quad [\text{Converge se e solo se } \alpha > 1/2]$$

$$10.2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n^\alpha (n+1)^2} \quad [\text{Converge se e solo se } \alpha > 0]$$

$$10.3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{3n^\alpha - 4} \quad [\text{Converge se e solo se } \alpha > 3/2]$$

$$10.4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{(2n-1)n^\alpha} \quad [\text{Converge se e solo se } \alpha > 1]$$

$$10.5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2 - 1}{\sqrt{n^\alpha - 3}} \quad [\text{Converge se e solo se } \alpha > 6]$$

$$10.6. \sum_{n=0}^{\infty} (3^n + 5^n) \alpha^n \quad [\text{Converge se e solo se } \alpha < 1/5]$$

11. Stabilire il carattere delle seguenti serie numeriche

$$11.1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{1+n^2} \quad [\text{Diverge}]$$

$$11.2. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + \sqrt{n}}{1 + n + n^2} \quad [\text{Converge}]$$

$$11.3. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n - n^3} \quad [\text{Converge}]$$

$$11.4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! + 1}{(n+1)!} \quad [\text{Diverge}]$$

$$11.5. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \quad [\text{Diverge}]$$

$$11.6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2} \quad [\text{Converge}]$$

$$11.7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{\sqrt[4]{n^7+n^3}}$$

[Diverge]

$$11.8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^{n^2}}$$

[Converge]

$$11.9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} + \log n + \arctan n}{1 + \sqrt{n} + \cosh n}$$

[Converge]

## FOGLIO 2: SERIE DI POTENZE E DI TAYLOR

1. Determinare l'insieme di convergenza delle seguenti serie di potenze.

1.1.  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} x^n$  Insieme di convergenza:  $(-2, 2)$

1.2.  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)2^n}$  Insieme di convergenza:  $[-2, 2)$

1.3.  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{2n} (x-1)^{3n}$  La serie converge solo per  $x = 1$

1.4.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{((2n)!)^2} x^n$  Insieme di convergenza:  $(-\infty, \infty)$

1.5.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3\sqrt{n}}{n} x^n$  Insieme di convergenza:  $(-1, 1)$

1.6.  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{5^{n^2}}{3^n} x^n$  La serie converge solo per  $x = 0$

1.7.  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{3^{n^2}} x^n$  Insieme di convergenza:  $(-\infty, \infty)$

1.8.  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{2^n} x^n$  Insieme di convergenza:  $(-2, 2)$

1.9.  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n} x^n$  Insieme di convergenza:  $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

1.10.  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3+1}{e^{n+1}} x^n$  Insieme di convergenza:  $(-e, e)$

1.11.  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+1}{2^n} x^n$  Insieme di convergenza:  $(-2, 2)$

1.12.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n3^n} x^n$  Insieme di convergenza:  $[-3, 3)$

1.13.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^{n^2}}{n!} x^n$  La serie converge solo in  $x = 0$

1.14.  $\sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)(2x-3)^n$  Insieme di convergenza:  $(1, 2)$

1.15.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n x^n$  Insieme di convergenza:  $(-2, 2)$

$$1.16. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2/3}} x^n$$

Insieme di convergenza:  $[-1, 1)$ 

$$1.17. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3 + n} x^n$$

Insieme di convergenza:  $[-1, 1]$ 

$$1.18. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n! + n} x^n$$

Insieme di convergenza:  $(-\infty, +\infty)$ 

$$1.19. \sum_{n=1}^{+\infty} n^n x^n$$

La serie converge solo in  $x = 0$ 

$$1.20. \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$$

Insieme di convergenza:  $\left(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$ .

$$1.21. \sum_{n=0}^{+\infty} (x - 3)^n$$

Insieme di convergenza:  $(2, 4)$ 

$$1.22. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x - 4)^n}{\sqrt{n}}$$

Insieme di convergenza:  $[3, 5)$ 

$$1.23. \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x - 4}{3}\right)^n$$

Insieme di convergenza:  $(1, 7)$ 

$$1.24. \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3x - 5}{4}\right)^n$$

Insieme di convergenza:  $\left(\frac{1}{3}, 3\right)$ 

$$1.25. \sum_{n=1}^{+\infty} (e^{1/n} - 1)^n x^n$$

Insieme di convergenza:  $(-\infty, \infty)$ 

$$1.26. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} (2x + 3)^n$$

Insieme di convergenza:  $\left[-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ 

2. Determinare l'insieme di convergenza (valutando il comportamento agli estremi) delle seguenti serie.

$$2.1. \sum_{n=1}^{+\infty} n^5 e^{nx}$$

Insieme di convergenza:  $(-\infty, 0)$ 

$$2.2. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{n} (\arctan x)^n$$

Insieme di convergenza:  $[-\tan(1), \tan(1))$ 

$$2.3. \sum_{n=1}^{+\infty} 3^n x^{2n}$$

Insieme di convergenza:  $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ 

$$2.4. \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{5n - 2}{n + 1}\right)^n x^{2n}$$

Insieme di convergenza:  $\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ 

$$2.5. \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n} (3x - 2)^{2n}$$

Insieme di convergenza:  $x \in \left(\frac{1}{3}, 1\right)$

$$2.6. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{\sqrt[3]{n^2+1}(x+1)^n}$$

Insieme di convergenza:  $x \in (-\infty, -3] \cup (1, +\infty)$

3. Per ognuno dei seguenti intervalli scrivere una serie di potenze che ha l'intervallo dato come intervallo di convergenza

a)  $[-3, 3]$ ; b)  $[-2, 4]$ ; c)  $(-3, 1)$ ; d)  $(2, 10]$ ; e)  $[-5, 3)$

4. Supponiamo che la serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-b)^n$  converga solo se  $-9 \leq x < 19$ . Qual è il raggio di convergenza della serie? Quanto vale  $b$ ?

5. Sia  $R$  un numero positivo;

a) mostrare che la serie di potenze  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{R^n}$  converge in  $(-R, R)$

b) mostrare che la serie di potenze  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n R^n}$  converge in  $[-R, R)$

c) mostrare che la serie di potenze  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2 R^n}$  converge in  $[-R, R]$

d) scrivere una serie di potenze che converge in  $(-R, R]$

6. Sviluppare in serie di MacLaurin la funzione  $f(x) = \frac{x+2}{x^2-8x+12}$  precisando il raggio di convergenza. Calcolare  $f^{(n)}(0)$ .

$$\left[ \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3 \cdot 6^n} \right) x^n, \quad R = 2, \quad f^{(n)}(0) = \left( \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3 \cdot 6^n} \right) n! \right]$$

7. Sviluppare in serie di MacLaurin la funzione  $f(x) = \frac{-x+2}{x^2-8x+12}$  precisando il raggio di convergenza.

$$\left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{6^{n+1}}, \quad R = 6 \right]$$

8. Sviluppare in serie di Taylor centrata in  $x_0 = 1$  la funzione  $f(x) = \log \frac{\sqrt{x}}{4-x}$ .

$$\left[ -\log 3 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{(-1)^{n-1}}{2n} + \frac{1}{n3^n} \right) (x-1)^n \right]$$

9. Scrivere la serie di Taylor centrata in  $x_0 = -3$  della funzione  $f(x) = \log \left( \frac{x+1}{x-1} \right)$ .

$$\left[ \log \frac{1}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)2^{n+1}} \left( 1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right) (x+3)^{n+1} \right]$$

10. Scrivere la serie di MacLaurin di  $f(x) = \log \left( \frac{e^{-x}}{4x^2+3} \right)$ .

$$\left[ -\log 3 - x - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{4^n}{n3^n} x^{2n} \right]$$

11. Sviluppare in serie di potenze la funzione  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 5x + 6}$  nell'intorno di  $x_0 = 1$ . Determinare l'intervallo di convergenza della serie ottenuta.

$$\left[ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{1}{3^{n+1}} - \frac{1}{4^{n+1}} \right) (x-1)^n, \quad x \in (-2, 4) \right]$$

12. Sviluppare in serie di potenze la funzione  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$  nell'intorno di  $x_0 = -1$ . Determinare l'intervallo di convergenza della serie ottenuta.

$$\left[ \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{3^{n+1}} - \frac{1}{4^{n+1}} \right) (x+1)^n, \quad x \in (-4, 2) \right]$$

13. Sviluppare in serie di potenze la funzione  $f(x) = \frac{1}{2x^2 + 7x}$  nell'intorno di  $x_0 = -3$ . Determinare l'intervallo di convergenza della serie ottenuta.

$$\left[ -\frac{1}{7} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{3^{n+1}} + (-1)^n 2^{n+1} \right) (x+3)^n, \quad x \in (-7/2, -5/2) \right]$$

## FOGLIO 3: SERIE DI FOURIER

1. Sviluppare in serie di Fourier (discutendo la convergenza) la funzione periodica di periodo  $2\pi$  definita su  $(-\pi, \pi]$  da

$$f(x) = \begin{cases} \pi - x & \text{per } x \in [0, \pi] \\ -\pi - x & \text{per } x \in (-\pi, 0) \end{cases}$$

$$\left[ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k} \sin(kx) \right]$$

2. Sviluppare in serie di Fourier (discutendo la convergenza) la funzione periodica di periodo  $2\pi$  definita su  $(-\pi, \pi]$  da

$$f(x) = \sin x + |\sin x|$$

$$\left[ \frac{2}{\pi} + \sin x - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(4k^2 - 1)} \cos(2kx) \right]$$

3. Sviluppare in serie di Fourier (discutendo la convergenza) la funzione periodica di periodo  $2\pi$  definita su  $(-\pi, \pi]$  da

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in (-\pi, 0) \\ 1 & \text{se } x \in [0, \pi] \end{cases}$$

$$\left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(2k-1)} \sin((2k-1)x) \right]$$

4. Sviluppare in serie di Fourier (discutendo la convergenza) la funzione periodica di periodo  $2\pi$  definita su  $(-\pi, \pi]$  da

$$f(x) = \cos(\alpha x), \quad \alpha \notin \mathbb{Z}$$

$$\left[ \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \frac{2\alpha \sin(\alpha\pi)}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\alpha^2 - k^2} \cos(kx) \right]$$

5. Sviluppare in serie di Fourier la funzione periodica di periodo  $2\pi$  definita su  $(-\pi, \pi]$  da  $f(x) = x^2$ , calcolarla per  $x = \pi$  e usare il risultato ottenuto per la calcolare la somma della serie  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ .

$$\left[ \frac{\pi^2}{6} \right]$$

6. Sviluppare in serie di Fourier la funzione periodica di periodo  $2\pi$  definita su  $(-\pi, \pi]$  da  $f(x) = x^4$ , calcolarla per  $x = \pi$  e usare il risultato ottenuto per la calcolare la somma della serie  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$ .

$$\left[ \frac{\pi^4}{90} \right]$$

7. Sviluppare in serie di Fourier la funzione periodica di periodo 2, definita su  $(-1, 1]$  da  $f(x) = 1 - x^2$ , calcolarla per  $x = 0$  e usare il risultato ottenuto per la calcolare la somma della serie  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$ .

8. Sviluppare in serie di Fourier la funzione, di periodo 4, data nell'intervallo  $[-2, 2]$  da  $f(x) = |x|$ .

a) Usare l'identità di Parseval per dimostrare che

$$1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \dots + \frac{1}{(2n+1)^4} + \dots = \frac{\pi^4}{96}.$$

b) Calcolare lo scarto in media quadratica tra  $f$  e i primi due termini nel suo sviluppo di Fourier.

c) Discutere la convergenza della serie di Fourier.