

# Analisi Matematica II: Dimostrazioni

Sophie Cavallini

26 giugno 2020

## Vettore accelerazione: componenti tangenziale e centripeta

Se  $t \mapsto \mathbf{r}(t)$  è di classe  $\mathcal{C}^2$ , è definito il vettore accelerazione  $\mathbf{r}''(t)$ . Vale la decomposizione:

$$\mathbf{r}''(t) = v'(t)\mathbf{T}(t) + v(t)^2k(t)\mathbf{N}(t)$$

Dim: Derivando l'equazione  $\mathbf{r}'(t) = v(t)\mathbf{T}(t)$  si ottiene,

$$\mathbf{r}''(t) = v'(t)\mathbf{T}(t) + v(t)\mathbf{T}'(t) = v'(t)\mathbf{T}(t) + v(t)v(t)k(t)\mathbf{N}(t)$$

## Formule di calcolo per la curvatura

Il calcolo della curvatura utilizzando l'ascissa curvilinea  $s(t) = \int_a^t |\mathbf{r}'(\tau)| d\tau$  è

$$k(s) = \left| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right| = \left| \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \right|$$

Dalla relazione  $\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{d\mathbf{T}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v(t) \cdot \frac{d\mathbf{T}}{ds}$ , si ottiene, prendendo i moduli:  $k(t) = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{v(t)}$  e  $\mathbf{N}(t) = \frac{1}{|\mathbf{T}'(t)|}\mathbf{T}'(t)$ . Osservare che:  $\mathbf{T}'(t) = v(t)k(t)\mathbf{N}(t)$ .

Osservando che  $\mathbf{r}'$  è parallelo a  $\mathbf{T}$  e ortogonale a  $\mathbf{N}$ :

$$|\mathbf{r}'(t) \wedge \mathbf{r}''(t)| = v(t)^2k(t) |\mathbf{r}'(t) \wedge \mathbf{N}(t)| = v(t)^3k(t)$$

Pertanto:

$$k(t) = \frac{|\mathbf{r}'(t) \wedge \mathbf{r}''(t)|}{v(t)^3}$$

## Teorema degli zeri

Sia  $E \subset \mathbb{R}^n$  connesso, e  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Supponiamo che esistano due punti  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  in  $E$  |  $f(\mathbf{x}) > 0$  e  $f(\mathbf{y}) < 0$ . Allora  $\exists$  un punto  $\mathbf{z} \in E$  |  $f(\mathbf{z}) = 0$ .

Dim: Poiché  $E$  è connesso,  $\exists$  una curva  $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow E$  |  $\mathbf{r}(a) = \mathbf{x}$  e  $\mathbf{r}(b) = \mathbf{y}$ . La funzione composta  $g(t) = f(\mathbf{r}(t))$  è continua in  $[a, b]$  e |  $g(a) > 0$ ,  $g(b) < 0$ . Per il teorema degli zeri unidimensionale,  $\exists t \in (a, b)$  |  $g(t) = 0$ . Ma,  $g(t) = f(\mathbf{r}(t))$ , per cui  $f$  si annulla nel punto  $\mathbf{z} = \mathbf{r}(t)$ .

## Continuità delle funzioni differenziabili

Sia  $f$  differenziabile in  $\mathbf{x}_0 \in D$  (aperto in  $\mathbb{R}^n$ ). Allora,  $f$  è continua in  $\mathbf{x}_0$ .

Dim: Ponendo  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{h}$ , riscriviamo la definizione di differenziabilità nella forma  $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \mathbf{a} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + o(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ , da cui si ottiene facilmente  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)$ . Pertanto,  $f$  è continua in  $\mathbf{x}_0$ .

## Formula del gradiente

Sia  $f$  differenziabile in  $\mathbf{x}_0 \in D$  (aperto in  $\mathbb{R}^n$ ). Allora,  $\exists$  tutto le derivate direzionali di  $f$  in  $\mathbf{x}_0$  e vale la formula:

$$D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}_0) = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{v}$$

Dim: Possiamo scrivere nella definizione di differenziabilità:

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{h} + o(\mathbf{h})$$

Scegliendo ora  $\mathbf{h} = t\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{v}$  versore qualsiasi:

$$f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0) = t\nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{v} + o(t)$$

Dividendo per  $t$  e facendo il limite per  $t \rightarrow 0$  si ottiene ora:

$$D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}_0) = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{v}$$

## Ortogonalità del gradiente alle curve di livello

Sia  $f(x, y)$  differenziabile e supponiamo che l'insieme di livello  $\{(x, y) \mid f(x, y) = c\}$  sia (sostegno di) una curva regolare  $\mathbf{r} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$ ,  $t \in I$ . Allora:

$$g(t) := f(x(t), y(t)) = c, \forall t \in I$$

Derivando rispetto a  $t$ :

$$g'(t) = \nabla f(x(t), y(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$$

Dunque in ogni punto regolare di una curva di livello il gradiente di  $f$  (se diverso da 0) è perpendicolare alla tangente alla curva (si dice in breve che il gradiente è ortogonale alle curve di livello).

## Test delle derivate seconde

Siano  $f \in C^2(D)$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  e  $\mathbf{x}_0 \in D$  un punto critico di  $f$ . Se la forma quadratica  $q(\mathbf{h}) = H_f(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} \cdot \mathbf{h}$  è:

- definita positivamente (negativa)  $\Rightarrow \mathbf{x}_0$  è punto di minimo (massimo) locale forte;
- indefinita  $\Rightarrow \mathbf{x}_0$  è punto di sella.

Dim.: Nelle ipotesi del teorema, se  $q(\mathbf{h})$  è definita positiva:

$$\Delta f := f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2}H_f(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} \cdot \mathbf{h} + o(|\mathbf{h}|^2) \geq \lambda_{\min}|\mathbf{h}|^2 + o(|\mathbf{h}|^2) = \lambda_{\min}|\mathbf{h}|^2(1 + o(1))$$

L'ultimo termine è  $> 0 \forall \mathbf{h}$  di norma sufficientemente piccola. Dunque in un intorno di  $\mathbf{x}_0$  vale  $\Delta f > 0$ , cioè  $\mathbf{x}_0$  è punto di minimo locale forte.

Se  $q(\mathbf{h})$  è definita negativa, si dimostra in modo simile che  $\Delta f < 0$  in un intorno di  $\mathbf{x}_0$  e quindi che abbiamo un punto di massimo locale forte.

Se  $q(\mathbf{h})$  è indefinita,  $\exists$  due vettori  $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \mid q(\mathbf{h}_1) > 0$  e  $q(\mathbf{h}_2) < 0$ . Possiamo supporre che siano di lunghezza unitaria (quindi versori, per comodità di calcoli). Allora, per  $t$  sufficientemente piccolo:

$$f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}_1) - f(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2}t^2 H_f(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{h}_1 + o(t^2) = t^2 \left( \frac{q(\mathbf{h}_1)}{2} + o(1) \right) > 0,$$

$$f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}_2) - f(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2}t^2 H_f(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{h}_2 + o(t^2) = t^2 \left( \frac{q(\mathbf{h}_2)}{2} + o(1) \right) < 0$$

Dunque, lungo due direzioni uscenti da  $\mathbf{x}_0$  la variazione  $\Delta f$  ha segno opposto. Si conclude che  $\mathbf{x}_0$  è un punto di sella.

## Moltiplicatori di Lagrange

Siano  $f, g \in C^1(\mathbb{R}^2)$  e sia  $(x_0, y_0)$  un punto di estremo vincolato per  $f$  con il vincolo  $g(x, y) = c$  ( $c \in \mathbb{R}$ ).

Se  $(x_0, y_0)$  è un punto regolare del vincolo ( $\nabla g(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$ ) esiste allora  $\lambda_0 \in \mathbb{R} \mid$

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda_0 \nabla g(x_0, y_0)$$

Dim: Poiché  $(x_0, y_0)$  è un punto regolare, per il teorema del Dini il vincolo  $g(x, y) - c = 0$  definisce localmente un arco di curva regolare  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ , dove si può assumere  $t$  variabile in un intorno dell'origine e  $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ .

Per ipotesi,  $t = 0$  è punto di estremo locale per la funzione composta  $f(x(t), y(t))$ , per cui

$$0 = \left. \frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) \right|_{t=0} = \partial_x f(x_0, y_0) x'(0) + \partial_y f(x_0, y_0) y'(0)$$

Quindi, nel punto considerato,  $\nabla f(x_0, y_0)$  è ortogonale al vettore tangente  $(x'(0)\mathbf{i} + y'(0)\mathbf{j})$  alla curva di livello  $g(x, y) = c$ .

Ma, come è noto, anche il vettore  $\nabla g$  è ortogonale (in ogni punto regolare) alla curva di livello.

Si conclude che i vettori  $\nabla f(x_0, y_0)$  e  $\nabla g(x_0, y_0)$  devono essere paralleli, ovvero che

$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda_0 \nabla g(x_0, y_0)$  per qualche  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ .

## Spazio vettoriale delle soluzioni delle equazioni omogenee

Denotiamo con  $L : \mathcal{C}^2(I) \rightarrow \mathcal{C}^0(I)$  l'operatore differenziale definito da

$$y(t) \mapsto Ly(t) := y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t)$$

La generica equazione del secondo ordine in forma normale si scrive allora  $Ly(t) = f(t)$ .

L'osservazione fondamentale è che  $L$  è un operatore lineare tra gli spazi vettoriali  $\mathcal{C}^2(I)$  e  $\mathcal{C}^0(I)$ .

1. L'insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea  $Lz(t) = 0$  è uno spazio vettoriale (sottospazio di  $\mathcal{C}^2(I)$ );
2. Lo spazio vettoriale delle soluzioni di un'equazione lineare omogenea del secondo ordine ha dimensione 2.

Dim:

1. Osserviamo prima di tutto che  $z(t) = 0$  è soluzione dell'equazione omogenea. Se poi  $z_1(t)$ ,  $z_2(t)$  soddisfano  $Lz_1(t) = Lz_2(t) = 0$  e  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ , allora

$$L[c_1 z_1(t) + c_2 z_2(t)] = c_1 Lz_1(t) + c_2 Lz_2(t)$$

Quindi qualunque combinazione lineare di soluzioni dell'equazione omogenea è ancora soluzione dell'equazione.

2. Mostriamo che si possono sempre trovare due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione  $Lz = 0$  | ogni altra soluzione è combinazione lineare di queste due.

Fissato  $t_0 \in I$ , siano  $z_1(t)$ ,  $z_2(t)$ , le soluzioni in  $I$  rispettivamente dei problemi di Cauchy.

$$Lz_1(t) = 0, \quad z_1(t_0) = 1, \quad z_1'(t_0) = 0;$$

$$Lz_2(t) = 0, \quad z_2(t_0) = 0, \quad z_2'(t_0) = 1.$$

L'esistenza di tali soluzioni è garantita dal teorema di esistenza e unicità. Se per assurdo fossero linearmente dipendenti, avremmo  $z_2(t) = \lambda z_1(t) \forall t \in I$ , ma  $z_1(t_0) = 1$  e  $z_2(t_0) = 0$ , per cui deve essere  $\lambda = 0$ , ma allora si avrebbe  $z_1(t) = 0 \forall t \in I$ , impossibile.

Sia ora  $z(t) \in \mathcal{C}^2(I)$  una soluzione dell'equazione omogenea e poniamo  $c_1 := z(t_0)$ ,  $c_2 := z'(t_0)$ . Definiamo la funzione

$$\bar{z}(t) := c_1 z_1(t) + c_2 z_2(t)$$

Dalla definizione delle soluzioni  $z_1$  e  $z_2$ , si vede facilmente che  $\bar{z}$  risolve il problema di Cauchy

$$L\bar{z}(t) = 0, \quad \bar{z}(t_0) = c_1, \quad \bar{z}'(t_0) = c_2.$$

cioè con i medesimi valori iniziali di  $z(t)$ .

Ancora per il teorema di esistenza e unicità si conclude che  $\bar{z}(t) = z(t)$ , ovvero che ogni soluzione di  $Lz = 0$  è combinazione lineare di  $z_1$  e  $z_2$ .

## Struttura dell'integrale generale delle equazioni complete

Data una soluzione  $\bar{y}(t)$  dell'equazione completa ( $L\bar{y}(t) = f(t)$ ) l'integrale generale si ottiene sommando a  $\bar{y}(t)$  l'integrale generale dell'equazione omogenea.

Dim: Se  $\bar{y}$  risolve  $L\bar{y}(t) = f(t)$  e  $z(t)$  è soluzione dell'equazione omogenea,

$$L[\bar{y}(t) + z(t)] = L\bar{y}(t) + Lz(t) = f(t) + 0 = f(t)$$

Dunque, aggiungendo a una soluzione dell'equazione completa una soluzione dell'equazione omogenea si ottiene ancora una soluzione dell'equazione completa.

Viceversa, se  $y(t) \neq \bar{y}(t)$  è un'altra soluzione dell'equazione completa,

$$L[y(t) - \bar{y}(t)] = Ly(t) - L\bar{y}(t) = f(t) - f(t) = 0$$

Si conclude che tutte le soluzioni dell'equazione completa si possono scrivere nella forma  $y(t) = \bar{y}(t) + z(t)$ , dove  $z(t)$  risolve  $Lz(t) = 0$ .

## Proprietà dei campi conservativi: indipendenza del cammino di integrazione e circolazione nulle

L'integrale di linea di un campo conservativo è indipendente dal cammino di integrazione.

Precisamente, se  $\mathbf{F}$  è conservativo in  $D$  (aperto e connesso) con funzione potenziale  $U$ , allora per ogni curva regolare  $\mathbf{r}(t)$ ,  $t \in [a, b]$ ,  $|\gamma \subset D$ :

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = U(\mathbf{r}(b)) - U(\mathbf{r}(a)).$$

Se  $\gamma$  è una linea chiusa ( $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$ ) abbiamo in particolare:

$$\oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

Dim:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_a^b \nabla U(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} U(\mathbf{r}(t)) dt = U(\mathbf{r}(b)) - U(\mathbf{r}(a)), \end{aligned}$$

dove l'ultimo passaggio segue dal teorema fondamentale del calcolo.

## Condizione necessaria per un campo conservativo

Se  $\mathbf{F}$  è conservativo in  $D$ , allora  $\text{rot}(\mathbf{F}) = \mathbf{0}$  in  $D$ .

Dim: Se  $\exists U \in \mathcal{C}^2(D) \mid \mathbf{F} = \nabla U$ , allora

$$\text{rot}(\mathbf{F}) = \text{rot}(\nabla U) = (\partial_y \partial_z U - \partial_z \partial_y U) \mathbf{i} + (\partial_z \partial_x U - \partial_x \partial_z U) \mathbf{j} + (\partial_x \partial_y U - \partial_y \partial_x U) \mathbf{k} = \mathbf{0}$$

per il teorema di Schwarz.

## Formula di Gauss-Green

Sia  $D \subset \mathbb{R}^2$  un dominio limitato la cui frontiera sia una curva di Jordan regolare a tratti e che sia semplice rispetto ad entrambi gli assi. Se  $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} \in \mathcal{C}'(D)$ , vale la formula:

$$\int \int_D Q_x - P_y \, dx dy = \int_{\partial^+ D} P dx + Q dy$$

Dim: Dimostriamo prima il seguente lemma:

1. se  $D$  è  $y$ -semplice, allora:

$$\int \int_D P_y dx dy = - \int_{\partial^+ D} P dx$$

2. se  $D$  è  $x$ -semplice, allora:

$$\int \int_D Q_x dx dy = \int_{\partial^+ D} Q dy$$

1. Sia  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b], g_1(x) \neq y \neq g_2(x)\}$ , dalle formule di riduzione abbiamo:

$$\int \int_D P_y(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} P_y(x, y) dy \right) dx = \int_a^b [P(x, g_2(x)) - P(x, g_1(x))] dx$$

Calcoliamo allora l'integrale di  $P$  sulla frontiera osservando che  $dx = 0$  sui tratti rettilinei dove  $x = a$  e dove  $x = b$ :

$$\int_{\partial^+ D} P dx = \int_a^b P(x, g_1(x)) dx + \int_b^a P(x, g_2(x)) dx = - \int_a^b [P(x, g_2(x)) - P(x, g_1(x))] dx$$

2. Sia  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [c, d], h_1(y) \neq x \neq h_2(y)\}$ , dalle formule di riduzione abbiamo:

$$\int \int_D Q_x(x, y) dx dy = \int_c^d \left( \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} Q_x(x, y) dx \right) dy = \int_c^d [Q(h_2(y), y) - Q(h_1(y), y)] dy$$

Calcoliamo ora l'integrale di  $Q dy$  sulla frontiera osservando che  $dy = 0$  sui tratti rettilinei dove  $y = c$  e dove  $y = d$ :

$$\int_{\partial^+ D} Q dy = \int_c^d Q(h_2(y), y) dy + \int_d^c Q(h_1(y), y) dy = \int_c^d [Q(h_2(y), y) - Q(h_1(y), y)] dy$$

Nelle ipotesi del teorema valgono entrambe le relazioni 1. e 2. del precedente lemma. Sottraendo la prima equazione dalla seconda si ottiene il risultato.

## Teorema di Gauss o della divergenza

Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  un dominio limitato, semplice rispetto ai tre assi cartesiani, la cui frontiera  $\partial\Omega$  è una superficie regolare a pezzi, orientata con la scelta della normale esterna  $\mathbf{n}_e$ . Se  $\mathbf{F} \in \mathcal{C}^1(\Omega)$  vale la formula:

$$\int \int \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} dx dy dz = \int \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_e dS$$

Dim: Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  definito da:

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D, \varphi_1(x, y) \neq z \neq \varphi_2(x, y)\}$$

dove  $D$  è un dominio regolare e semplicemente connesso del piano e  $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{C}^1(D)$ . Se  $\mathbf{F} = F_1 \mathbf{i} + F_2 \mathbf{j} + F_3 \mathbf{k} \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ , vale la formula

$$\int \int \int_{\Omega} \partial_z F_3 dx dy dz = \int \int_{\partial\Omega} F_3 \mathbf{k} \cdot \mathbf{n}_e dS$$

Dalla formula di riduzione per gli integrali tripli (integrazione per fili) si ha

$$\begin{aligned} \int \int \int_{\Omega} \partial_z F_3(x, y, z) dx dy dz &= \int \int_D \left( \int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} \partial_z F_3 dz \right) dx dy = \\ &= \int \int_D [F_3(x, y, \varphi_2(x, y)) - F_3(x, y, \varphi_1(x, y))] dx dy \end{aligned}$$

Calcoliamo ora l'integrale a destra. La frontiera  $\partial\Omega$  è l'unione di tre superfici regolari:

- la superficie cartesiana  $\Sigma_1$  di equazione  $z = \varphi_1(x, y)$ , dove il prodotto della normale esterna per l'elemento d'area è:

$$\mathbf{n}_e dS = (\partial_x \varphi_1 \mathbf{i} + \partial_y \varphi_1 \mathbf{j} - \mathbf{k}) dx dy$$

- la superficie cartesiana  $\Sigma_2$  di equazione  $z = \varphi_2(x, y)$ , dove il prodotto della normale esterna per l'elemento d'area è:

$$\mathbf{n}_e dS = (-\partial_x \varphi_2 \mathbf{i} - \partial_y \varphi_2 \mathbf{j} + \mathbf{k}) dx dy$$

- la superficie laterale  $\Sigma_3$ , dove  $\mathbf{n}_e$  è ortogonale a  $\mathbf{k}$ .

Abbiamo quindi:

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}_e = \begin{cases} -dxdy & , \text{su } \Sigma_1; \\ dxdy & , \text{su } \Sigma_2; \\ 0 & , \text{su } \Sigma_3. \end{cases}$$

Dunque:

$$\begin{aligned} & \int \int_{\partial\Omega} F_3 \mathbf{k} \cdot \mathbf{n}_e dS = \\ & = \int \int_{\Sigma_1} F_3 \mathbf{k} \cdot \mathbf{n}_e dS + \int \int_{\Sigma_2} F_3 \mathbf{k} \cdot \mathbf{n}_e dS + \int \int_{\Sigma_3} F_3 \mathbf{k} \cdot \mathbf{n}_e dS = \\ & = - \int \int_D F_3(x, y, \varphi_1(x, y)) dx dy + \int \int_D F_3(x, y, \varphi_2(x, y)) dx dy + 0 = \\ & = \int \int_D [F_3(x, y, \varphi_2(x, y)) - F_3(x, y, \varphi_1(x, y))] dx dy \end{aligned}$$

Con dimostrazioni simili, si ottengono le formule:

$$\int \int \int_{\Omega} \partial_x F_1 dx dy dz = \int \int_{\partial\Omega} F_1 \mathbf{i} \cdot \mathbf{n}_e dS$$

se  $\Omega$  è semplice rispetto all'asse  $x$ ;

$$\int \int \int_{\Omega} \partial_y F_2 dx dy dz = \int \int_{\partial\Omega} F_2 \mathbf{j} \cdot \mathbf{n}_e dS$$

se  $\Omega$  è semplice rispetto all'asse  $y$ .

In un dominio semplice rispetto a tutti i tre gli assi possiamo sommare le tre formule e otteniamo

$$\int \int \int_{\Omega} (\partial_x F_1 + \partial_y F_2 + \partial_z F_3) dx dy dz = \int \int_{\partial\Omega} F_1 \mathbf{i} + F_2 \mathbf{j} + F_3 \mathbf{k} \cdot \mathbf{n}_e dS$$

cioè

$$\int \int \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} dx dy dz = \int \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_e dS$$

## Equazione di continuità

L'equazione di continuità è

$$\partial_t \rho(x, y, z, t) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v})(x, y, z, t) = 0$$

Dim: Il moto di un fluido di densità  $\rho(x, y, z, t)$  è descritto da un campo di velocità  $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ . Supponiamo che  $\rho$  e  $\mathbf{v}$  siano derivabili con continuità in  $\mathbb{R}^4$ . Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  una regione limitata occupata dal fluido e dove valgono le ipotesi del teorema della divergenza.

La massa totale del fluido contenuta in  $\Omega$  all'istante  $t$  è

$$M(t) = \int \int \int_{\Omega} \rho(x, y, z, t) dx dy dz$$

La rapidità di variazione nel tempo della massa è allora

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \int \int \int_{\Omega} \rho(x, y, z, t) dx dy dz$$

Si dimostra che se  $\rho$  e  $\partial_t \rho$  sono continue in  $\Omega \times [a, b]$ , allora  $\forall t \in [a, b]$  vale la relazione

$$\frac{d}{dt} \int \int \int_{\Omega} \rho(x, y, z, t) dx dy dz = \int \int \int_{\Omega} \partial_t \rho(x, y, z, t) dx dy dz$$

Nell'ultimo passaggio si è utilizzato il teorema di derivazione sotto il segno di integrale.

Ma, in assenza di sorgenti o pozzi in  $\Omega$ , la velocità di variazione della massa contenuta in  $\Omega$  si deve alla quantità di fluido che nell'unità di tempo esce o entra attraverso  $\partial\Omega$ , ovvero il flusso del vettore  $\rho \mathbf{v}$ .

Più precisamente, il flusso  $\rho \mathbf{v}$  uscente da  $\partial\Omega$  sarà pari alla rapidità di decrescita di  $M(t)$ .

Deve valere allora la relazione (legge di conservazione della massa)

$$\int \int_{\partial\Omega} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_e dS = - \int \int \int_{\Omega} \partial_t \rho dx dy dz.$$

Applicando il teorema della divergenza, l'equazione diventa

$$\int \int \int_{\Omega} \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) dx dy dz = - \int \int \int_{\Omega} \partial_t \rho dx dy dz$$

Se ora  $\Omega$  è una sferetta di raggio  $r$  centrata in un punto  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ , dividendo l'equazione per il volume di  $\Omega$  e facendo il limite per  $r \rightarrow 0$  si ottiene (sempre il teorema della media e per la continuità degli integrali)

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{v})(x, y, z, t) = -\partial_t \rho(x, y, z, t)$$

ovvero l'equazione di continuità:

$$\partial_t \rho(x, y, z, t) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v})(x, y, z, t) = 0.$$