Analisi Matematica III: Domande di Teoria

Sophie Cavallini

23 dicembre 2020

Enunciare il teorema di congergenza monotona di Beppo Levi per una successione di funzioni $\{u_n\}$

Sia $f_n \in L^1(E)$, e sia $f_n \longrightarrow f$ q.o. su E. Supponiamo che: $f_n \geq 0,\ f_{n+1} \geq f_n$. Allora:

$$\int_E \lim_n f_n = \lim_n \int_E f_n$$

(eventualmente $+\infty = +\infty$)

Enunciare le condizioni di omolorfia di Cauchy-Riemann.

Sia $f : \Omega \subseteq \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ con forma $f = u + \imath v$ e $z_0 \in \Omega$ con forma $z_0 = x_0 + \imath y_0$. Allora f è derivabile in z_0 se e solo se u, v sono differenziabili in (x_0, y_0) e

$$\begin{cases} u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \\ u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0) \end{cases}$$

Se f è derivabile $\forall\ z_0 \in \Omega$ allora f è olomorfa.

Dare la definizione di prodotto di convoluzione in $L^1(\mathbf{R})$.

Siano $f, g \in L^1(\mathbf{R})$. Il prodotto di convoluzione è definito come:

$$f * g(x) := \int_{\mathbf{R}_y} f(x-y)g(y)dy$$

Enunciare il principio di identità per funzioni olomorfe.

Sia $f : \Omega \subseteq \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ olomorfa. Sia Ω connesso. Sia $Z(f) := \{z \in \Omega \mid f(z) = 0\}$. Sono equivalenti:

1. $z_0 \in acc(Z(f)),\ (\exists\ z_n \subseteq Z(f) \backslash \{z_0\})$
2. $f^{(n)}(z_0) = 0\ \forall n \in \mathbf{N}$
3. $Z(f)$ contiene un intorno di z_0
4. $Z(f) \equiv \Omega$

Enunciare il teorema di convergenza dominata di Lebesgue.

Sia $f_n \in L^1(E)$, sia $f_n \longrightarrow f$ q.o. su E. Supponiamo che $\exists\ g \in L^1(E)$ tale che

$$|f_n| \leq g \text{ q.o. su } E\ \forall n$$

Allora: $f_n \longrightarrow f$ in $L^1(E)$.

Dare la definizione di operatore lineare continuo tra spazi vettoriali normati.

Siano $(V, \|\cdot\|_V)$, $(W, \|\cdot\|_W)$ due spazi vettoriali normati. Un'operatore lineare è una funzione $T : V \longrightarrow W$ tale che:

$$T(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 T(v_1) +_2 T(v_2)\ \forall\ v_1, v_2 \in V,\ \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$$

Enunciare il teorema dei residui.

Sia Ω aperto $\subseteq \mathbf{C}$ e sia $\gamma \subseteq \Omega$ circuito contraibile a un punto (in Ω). Sia $f : \Omega \backslash S \longrightarrow \mathbf{C}$, dove S ("insieme singolare") soddisfa: $\gamma \subseteq \Omega \backslash S$ e $acc(S) \cap \Omega = \emptyset$. Allora:

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi\imath \sum_{z \in S} Res(f, z) \cdot Ind(\gamma, z)$$

$Ind(\gamma, z_0) \neq 0$ per al più un numero finito di punti $z_0 \in S$.

Dare la definizione di spazio di Banach.

Uno spazio vettoriale normato $(V, \|\cdot\|)$ si dice completo o spazio di Banach se tutte le successioni di convergono.

Enunciare e dimostrare l'identità del parallelogramma in uno spazio di Hilbert.

Sia H uno spazio vettoriale munito di prodotto scalare $\langle\ ,\ \rangle$ e sia $\|\cdot\|$ norma indotta da esso. Allora:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \ \forall x, y \in H$$

Dim.:

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2 = (x+y, x+y)+(x-y, x-y) = \|x\|^2+2(x,y)+\|y\|^2+\|x\|^2-2(x,y)+\|y\|^2 = 2\|x\|^2+2\|y\|^2$$

Cosa significa che $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ è denso in $L^2(\mathbb{R})$

$\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ è denso in $L^2(\mathbb{R})$ ovvero:

- $\forall f \in L^2(\mathbb{R}),\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ tale che $\|f - \varphi\|_{L^2(\mathbb{R})} < \varepsilon$
- $\forall f \in L^2(\mathbb{R}),\ \exists \{\varphi_n\} \subseteq \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ tale che $\lim_{n\to+\infty} \|f - \varphi_n\|_{L^2(\mathbb{R})} = 0$ ($\varphi_n \longrightarrow f$ in $L^2(\mathbb{R})$)

Enunciare e dimostrare il Teorema di Riemann-Lebesgue.

Sia $u \in L^1(\mathbb{R})$. Allora:

1. $\hat{u} \in L^\infty(\mathbb{R})$ ($\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to L^\infty(\mathbb{R})$)
2. $\hat{u}$ è continua
3. $\hat{u}$ è "infinitesima all'infinito" ($\lim_{\xi\to\pm\infty} \hat{u}(\xi) = 0$)

Dim.:

1. $$|\hat{u}(\xi)| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} u(x)e^{-\imath\xi x}dx\right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)| = \|u\|_{L^1},\ \|\hat{u}\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{\xi\in\mathbb{R}} |\hat{u}(\xi)| \leq \|u\|_{L^1},\ \|\mathcal{F}\| = 1$$

2. $$\forall \xi \in \mathbb{R},\ \xi_n \longrightarrow \xi \Longrightarrow \hat{u}(\xi_n) \longrightarrow \hat{u}(\xi),\ \hat{u}(\xi_n) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x)e^{-\imath\xi_n x}dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} u(x)e^{-\imath\xi n}dx$$
$$\|f_n(x)\| = \|u(x)\| \in L^1(\mathbb{R}) \text{ per convergenza dominata}$$

Fornire la definizione di sistema ortonormale completo in uno spazio di Hilbert.

Sia H spazio di Hilbert, e sia $\{u_n\}$ sistema ortonormale. Si dice che $\{u_n\}$ è completo se è massimale rispetto all'inclusione, ovvero: non esiste $\{v_n\}$ sistema ortonormale che contenga propriamente $\{u_n\}$.

Enunciare e dimostrare la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz in uno spazio di Hilbert.

$$|(x, y)| \le \|x\| \cdot \|y\|$$

con l'uguale se solo se $x = \lambda y, \ \lambda \in \mathbb{R}$
<u>Dim.:</u>

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ 0 \le (x - ty, x - ty) = (x, x) - 2t(x, y) + t^2(y, y) = \|x\|^2 - 2t(x, y) + t^2\|y\|^2$$

$$\Longrightarrow \Delta \le 0 \ (x, y)^2 - \|x\|^2 \cdot \|y\|^2 \le 0 \Longrightarrow |(x, y)| \le \|x\| \cdot \|y\|$$

Se vale l'uguale, $\Delta = 0 \Longrightarrow \exists \bar{t} \in \mathbb{R} : (x - \bar{t}y, x - \bar{t}y) = 0 \Longrightarrow x - \bar{t}y = 0$
Viceversa se $x = \bar{t}y$, allora $|(x, y)| = |(\bar{t}y, y)| = |\bar{t}|\|y\|^2$

Enunciare il teorema di rappresentazione di Riesz in uno spazio di Hilbert.

Sia H spazio di Hilbert, e sia $\varphi \in H^1$. Allora:

$$\exists! \ u \mid \varphi = \varphi_n \text{ ovvero } \varphi(v) = (u, v) \ \forall \in H$$

Inoltre: $\|\varphi\|_{H^1} = \|u\|_H$. Ovvero $H^1 \subseteq H \ \varphi \longmapsto u : \varphi = \varphi_n$
In conclusione: $H = H^1$

Enunciare e dimostrare il teorema di invertibilità locale per funzioni di variabile complessa.

Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ olomorfa su Ω e sia $z_0 \in \Omega \mid f'(z_0) \neq 0$. Allora f è localmente invertibile in z_0 ($\exists \ U(z_0) \mid f|_{U(z_0)}$ invertibile) e l'inversa f^{-1} è derivabile in senso complesso e soddisfa:

$$(f^{-1})'(f(z_0)) = \frac{1}{f'(z_0)}$$

<u>Dim.:</u> Consideriamo:
$\Phi = (x, y)$ campo vettoriale su $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, $z_0 = x_0 + \imath y_0$, $(x_0, y_0) \in \Omega$

$$J\Phi(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

, dove $\alpha = u_x = v_y, \ \beta = v_x = -u_y$ $\det J\Phi = \alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, perchè $f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) - \imath u_y(x_0, y_0) =$ $= \alpha + \imath\beta \neq 0 \Longleftrightarrow |\alpha + \imath\beta| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \neq 0$
Applicando il teorema di invertibilità locale per campi vettoriale, allora Φ è "localmente invertibile in (x_0, y_0)" e il campo inverso Φ^{-1} soddisfa:

$$J\Phi^{-1}|_{\Phi(x_0, y_0)} = (J\Phi(x_0, y_0))^{-1} = \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

$$(f^{-1})'|_{f(z_0)} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} - \imath \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{1}{\alpha + \imath\beta} = \frac{1}{f'(z_0)}$$

Enunciare il teorema di proiezione su un convesso chiuso in uno spazio di Hilbert.

Sia H spazio di Hilbert, sia $K \subseteq H$ convesso e chiuso. (K convesso: $\forall x, y, \in K, \ \forall \lambda \in (0, 1), \ x + (1 - \lambda)y \in K$)($K$ chiuso: $\{x_n\} \subseteq K, \ x_n \longrightarrow x \in H \Longrightarrow x \in K$) Allora:

$$\forall f \in H \ \exists! \ u \in K \mid d(f, u) = \|f - u\| = \min_{v \in K} \|f - v\| = \min_{v \in K} d(f, v)$$

Tale u si dice proiezione di f su k ($u = P_k f$). Inoltre, $u = P_k f \Longleftrightarrow (f - u, v - u) \le 0 \ \forall v \in K$.

Enunciare il corollario per la proiezione su un sottospazio chiuso

Sia H uno spazio di Hilbert, e sia $M \subseteq H$ sottospazio (M è convesso). Allora:

$$\forall f \in H \ \exists! \ u \in M \mid d(f, u) = \|f - u\| = \min_{v \in K} \|f - v\| = \min_{J \in K} d(f, v)$$

Enunciare e dimostrare il teorema di unicità del prolungamento analitico.

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ connesso, e sia $S \subseteq \Omega$ tale che $\Omega \cap acc(S) \neq \emptyset$.
Data $f : S \longrightarrow \mathbb{C}$, esiste al più una funzione $\tilde{f} : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ olomorfa (quindi analitica), tale che $\tilde{f}\big|_S = f$.
Dim.: Prendiamo due prolungamenti $\tilde{f}_1$ e $\tilde{f}_2$ e consideriamo $g = \tilde{f}_1 - \tilde{f}_2$, olomorfe in $Z(g) \supseteq S$, perchè $g\big|_S = (\tilde{f}_1 - \tilde{f}_2)\big|_S = f - f = 0$. Allora, per il principio di identità, $Z(g) \equiv \Omega$, essenod che S contiene punti di accomulazione. Dunque $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$.

Enunciare il teorema di Fubini.

Sia f integrabile su $I = I_1 \times I_2$, con $I_1 \subseteq \mathbb{R}^m$ e $I_2 \subseteq \mathbb{R}^n$. Allora:

1. per q.o. $x_1 \in I_1,\ x_2 \longmapsto f(x_1, x_2)$ integrabile su I_2.
2. $x_1 \longrightarrow \int_{I_2} f(x_1, x_2)dx_2$ integrabile su I_1.
3. $$\int_I y(x_1, x_2)dx_1dx_2 = \int_{I_1} dx_1 \int_{I_2} f(x_1, x_2)dx_2 = \int_{I_2} dx_2 \int_{I_1} f(x_1, x_2)dx_1$$
   dove dx_1dx_2 è la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$

Enunciare e dimostrare la disuguaglianza di Bessel per serie di Fourier in spazi di Hilbert.

Sia H spazio di Hilbert, e sia $\{u_n\}$ sistema ortonormale. Per ogni $u \in H$,

$$\sum_n (u, u_n)^2 \leq \|u\|^2$$

Dim.: Fisso N e considero: $\sum_{n\leq N} (u, u_n)^2$. Se dimostro: $\sum_{n\leq N} (u, u_n)^2 \leq \|u\|^2\ \forall N \in \mathbb{N}$ (*), passando al limite per $N \longrightarrow +\infty$, ottengo Bessel. Per dimostrare (*) osservo:

$$0 \leq \|u - \sum_{n\leq N} (u, u_n)u_n\|^2 = \left(u - \sum_{n\leq N} (u, u_n)u_n, u - \sum_{n\leq N} (u, u_n)u_n\right) =$$

$$= \|u\|^2 - 2\sum_{n\leq N} (u, u_n)^2 + \left(\sum_{n\leq N} (u, u_n)u_n, \sum_{n\leq N} (u, u_n)u_n\right)$$

Con $N = 2 : ((u_1, u_1)u_1 + (u_2, u_2)u_2, (u_1, u_1)u_1 + (u_1, u_2)u_2) = (u_1, u_1)^2 + (u_1, u_2)^2$

$$= \|u\|^2 - 2\sum_{n\leq N} (u, u_n)^2 + \sum_{n\leq N} (u, u_n)^2 = \|u\|^2 - \sum_{n\leq N} (u, u_n)^2 \Longrightarrow \sum_{n\leq N} (u, u_n)^2 \leq \|u\|^2$$

Abbiamo ottenuto (*).

Fornire la definizione di funzione assolutamente continua.

Si dice che $F : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ è assolutamente continua se esiste $f \in L^1(a, b)$ tale che

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + c,\ \ c \in \mathbb{R}$$

($\Longrightarrow F' = f$ q.o.)

Enunciare la formula di Cauchy per la derivata n-esima di una funzione di variabile complessa.

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi\imath} \int_{\mathcal{C}_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Enunciare una formula di inversione per la trasformata di Fourier.

In $L^1(\mathbb{R}^n)$:
Sia $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tale che $\hat{u} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Allora: $\check{u}(x) = u(-x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\hat{\hat{u}}(x),\ x \in \mathbb{R}^n$

In $L^2(\mathbb{R}^n)$:
Sia $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tale che $\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Allora: $\check{u}(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\hat{\hat{u}}(x),\ x \in \mathbb{R}^n$

In $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:
Sia $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tale che $\hat{u} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Allora: $\check{u}(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\hat{\hat{u}}(x),\ x \in \mathbb{R}^n$

Si dia la definizione di operatore lineare limitato tra spazi vettoriali normati e la definizione di norma per un tale operatore.

Sia $T : V \longrightarrow W$ è un operatore lineare tra spazi vettoriali normati. Si dice che T è limitato se:

$$\exists M > 0 \mid \|T(v)\|_W \leq M\|v\|_V\ \forall v \in V\ (\forall v \in V\backslash\{0\},\ \text{sempre valida in } 0)$$

ovvero:

$$\exists M > 0 \mid \frac{\|T(v)\|_W}{\|v\|_V} \leq M\ \forall v \in V\backslash\{0\}$$

Si defisce la norma di $\|T\|_{\mathcal{L}(V,W)}$:= la più piccola costante $M \geq 0$ tale che $\frac{\|T(v)\|_W}{\|v\|_V} \leq M\ \forall v \in V\backslash\{0\}$
Formalmente:

$$\|T\|_{\mathcal{L}(V,W)} := \sup_{v\in V\backslash\{0\}} \frac{\|T(v)\|_W}{\|v\|_V} = \sup_{v\in V\backslash\{0\}} \left\| T\left(\frac{v}{\|v\|_V}\right)\right\|_W$$

Enunciare l'identità di Parseval.

$$\sum_n (u, u_n)(v, u_n) = (u, v)\ \forall u, v \in H$$

Fornire la definizione dello spazio di Sobolev

Fissiamo $p \in [1, +\infty]$, Ω aperto $\subseteq \mathbb{R}^n$, $W^{1,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) \mid \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega),\ \forall i = 1, \ldots, n\}$

Dimostrare la completezza del sistema ortonormale dei polinomi trigonometrici in $L^2\left(\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]\right)$

Il sistema ortonormale dei polinomi trigonometrici (p_0, p_k, q_k) è completo in $L^2(I)$.
<u>Dim.:</u>
Basta dimostrare, per la proprietà 3) del teorema sulla caratterizzazione dei sistemi ortonormali completi (posto $M = \overline{< u_n >}$, si ha $M = H$), che il $< p_0, p_k, q_k >$ è denso in $L^2(I)$, ovvero che data $f \in L^2(I)$ posso approssimarla con una successione che appartiene $< p_0, p_k, q_k >$.

- Passo 1: data $f \in L^2(I)$, approssimo f con una successione $\varphi_h \subseteq \mathcal{C}_0^\infty(I)(\varphi_n \longrightarrow f$ in $L^2)$.
- Passo 2: Basta, data $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(I)$, approssimabile con una successione in $< p_0, p_k, q_l >$. Estendiamo $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(I)$ a una funzione $\tilde{\varphi} \in \mathcal{C}^1_{per}(\mathbb{R})$. La serie di Fourier di $\tilde{\varphi}$ converge a $\tilde{\varphi}$ uniformemente su $\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$ allora, anche, in $L^2\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$.

Dunque, la successione delle somme parziali della serie di Fourier di $\tilde{\varphi}$ fornisce una successione in $< p_0, p_k, q_k >$ che converge a φ in $L^2(I)$.

Enunciare la definizione di funzione a decrescenza rapida e la definizione di successione temperata.

$$\mathcal{S} := \{u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)\} \mid \forall \alpha, \beta \text{ multindici } \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta u(x)| < +\infty$$

La successione $C_k r^{|k|}$ è temperata, cioè:

$$\exists M, n > 0 \mid |C_k r^{|k|}| \leq M(1 + |k|^m)$$

Fornire le definizioni di convergenza di f_k in $L^p(E)$ e di convergenza puntuale di f_k quasi ovunque.

$$f_n \longrightarrow 0 \text{ in } L^p(E) \text{ se } \left(\int_E |f_n|^p\right)^{1/p} = \|f_n\|_p \longrightarrow 0, \text{ ovvero } \int_E |f_n|^p \longrightarrow 0$$

f_k converge puntualmente quasi ovunque in E se $\forall x \in E$, tranne per x appartenenti a un insieme di misura nulla, $\int_E f_n \longrightarrow 0$.

Scrivere la formula risolutiva per il problema di Cauchy per l'equazione delle onde in una variabile spaziale.

Il problema di Cauchy per l'equazione delle onde in una variabile spaziale è:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \quad x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = u_1(x) \quad x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

La formula risolutiva è la formula di D'Alambert:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[u_0(x+t) + u_0(x-t)\right] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} u_1(y)dy$$