Limiti a due variabili (di campi scalari)

Procedimento risolutivo:

1. Ricavare (condizioni di esistenza) e rappresentare il ***dominio*** della f(x,y);
2. Verificare che il punto (x_0,y_0) sia di ***accumulazione*** per il dominio (altrimenti non ha senso parlare di limite);
3. Provare con delle ***restrizione*** facili (NB: attenzioni che tali restrizioni devono rientrare nel dominio);
   a. Se si trovano due restrizioni tali che il limite tenda a due valori ***diversi***, si può concludere che il ***limite non esiste***;
   b. Se si suppone che il limite possa esistere, si risolve il limite o tramite ragionamenti di analisi 1 (limiti notevoli, ***teorema dei due carabinieri***), oppure si passa in coordinate polari in R^3 ovvero:

$$x = x_0 + \rho\cos\theta$$
$$y = y_0 + \rho sen\theta$$

dove $\rho = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ (quantità sempre non negativa) e nota:

$\hat{f}(\rho,\vartheta) = f(x_0 + \rho\cos\theta, y_0 + \rho sen\theta)$ si risolve il limite:

$\lim_{\rho\to 0} \hat{f}(\rho,\vartheta)$. Da notare che esso deve essere ***indipendente*** da ϑ .

Osservazioni utili:

1. $f(\rho,\vartheta) = g(\rho)h(\rho,\vartheta)$ dove h(x) è limitata (per ogni teta) con $\rho \to 0$ e $\lim_{\rho\to 0} g(\rho) = 0$ allora $\lim_{\rho\to 0} f(\rho,\vartheta) = 0$
2. Come in analisi 1 quando ho espressioni del tipo:
   $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)^{g(x,y)}$ Studio $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)\ln(f(x,y))$ dopo di che bisogna ricordarsi che il limite di partenza è uguale a:
   $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)^{g(x,y)} = e^{\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)\ln(f(x,y))}$$
3. In generale, non esiste $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f\left(\frac{y}{x}\right)$ dove f è una funzione continua di una variabile reale. Questo perché ponendo $y = mx$ con $x \neq 0$ e calcolando il limite in tale restrizione si ottiene:
   $$\lim_{x\to 0} f\left(\frac{mx}{x}\right) = f(m) \text{ ovvero } \textbf{\textit{dipende da m.}}$$

Autore: Samuele Sandrini

Continuità di campi scalari

Sia $f : A \subseteq R^n \to R$ e $\vec{x}_0 \in A$

f $continua \Leftrightarrow \forall$ intorno J di $f(\vec{x}_0)$ $\exists$ un intorno I di $\vec{x}_0$ tale che $\forall \vec{x}_0 \in I \cap A$ si ha che $f(\vec{x}_0) \in J$.

1. Se $\vec{x}_0$ è un punto di accumulazione per A allora: f $continua\ in\ \vec{x}_0 \Leftrightarrow \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0)$
2. Se $\vec{x}_0$ è un punto isolato di A allora f è continua in $\vec{x}_0$. Poiché esiste un intorno di $\vec{x}_0$ tale che $I \cap A = \{\vec{x}_0\}$

*Una **funzione** si dice **continua** se lo è in ogni suo punto.*

Calcolo differenziale di campi scalari

$f : A \subseteq R^n \to R$ con A ***insieme aperto*** e $\vec{x}_0 \in A$. Fissata la direzione (versore) $\vec{v} = (v_x, v_y) \in R^2$, considerando la $f(\vec{x}_0)$ lungo quella direzione. Si chiama derivata di f in $\vec{x}_0$ nella direzione di $\vec{v}$ (***derivata direzionale***):

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{x}_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\vec{x}_0 + t\vec{v}) - f(\vec{x}_0)}{t}$$

Derivata parziale:

- Fissato $\vec{v} = (1,0)$ $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$
- Fissato $\vec{v} = (0,1)$ $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}$

Operatività: Si verificano due casi:

1. Se il punto in cui calcolare la derivata sta tutto in una espressione, oppure la funzione è costituita da una sola espressione, allora basta ricavare la derivata usando le regole del calcolo (o la definizione) e sostituire per le coordinate del punto;
2. Se la funzione è costituita da più espressioni e il punto in cui calcolare la derivata sta a cavallo delle due espressioni, allora è necessario: usare la definizione per il calcolo della derivata e scomporla nel limite destro e sinistro, sostituendogli opportunamente le due espressioni:

$$\lim_{h\to o} \frac{f(x,y) - f(x_0 y_0)}{h} \Leftrightarrow \lim_{h\to o^-} \frac{f_1(x,y) - f(x_0 y_0)}{h} = \lim_{h\to o^+} \frac{f_2(x,y) - f(x_0 y_0)}{h}$$

Da notare che la derivata in n=2 da ***informazione della funzione solamente lungo la direzione considerata***, non per nulla si chiamano direzionali in quanto si considera la restrizione della funzione lungo quella direzione.
Per questo fatto, a differenza di n=1, ***a n>1 la derivabilità non implica la continuità***.

$$f\ \ derivabile \not\Rightarrow continuità$$

Derivate parziali seconde:

- ***PURE***

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x,y)\ \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x,y)$$

- ***MISTE***

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$$

Autore: Samuele Sandrini

Teorema di Schwarz:

Se una funzione ***f(x,y) ammette*** entrambe le ***derivate secondo miste*** ed esse sono continue nel punto (x_0,y_0) allora esse sono uguali.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$$

Procedimento risolutivo utili:

Quando una funzione è definita a tratti e si richiede la derivata parziali in uno specifico punto è necessario:

1. Determinare le porzioni di piano in cui valgono le singole espressioni della funzione;
2. Se il punto è completamente interno all'area di una particolare espressione si possono usare le normali regole di calcolo usando quella espressione;
3. Se il punto si trova come frontiera tra due aree allora bisogna usare la definizione e all'occorrenza scomporre il limite come destro e sinistro per esprimere l'area in cui operare (f(h,0) ma quale delle due espressioni?).
4. I limiti destro e sinistro devono essere uguali affinché sia derivabile.

Differenziabilità

Condizioni:

1. $\exists\ \nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)$ Dovrebbero anche esistere le $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0)$
2. $f\ \ diff \Leftrightarrow \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - \nabla f(x_0, y_0)(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0 \quad \begin{cases} h = x - x_0 \\ y = x - x_0 \end{cases}$

Classificazione dei punti stazionari

$P = (x_0, y_0)$ è un punto stazionario se:

1. f(x,y) è differenziabile in (x_0, y_0)
2. $\nabla f(x_0, y_0) = 0$

Procedimento risolutivo utile:

1. Ricerca dei punti stazionari
   a. Calcolo delle derivate parziali (deve essere differenziabile (c1))
   b. Annullo le derivate parziali.
2. Test del determinante Hessiano:
   a. Per i punti in cui posso concludere concludo
   b. Per i punti in cui il determinante fa 0 non posso concludere nulla e ricorro allo ***studio del segno dell'incremento.*** Uso tale metodo anche qualora risulti complesso il calcolo delle derivate seconde.

$$\Delta f(x, y) = f(x, y) - f(x_0, y_0)$$

Studio la funzione incremento in un intorno di (x_0,y_0) per verificare come cambia il segno. In particolare, cerco delle restrizioni in cui la funzione è tutta positiva e tutta negativa in modo tale poi da concludere che è un ***punto di sella*** ovvero non è un punto di estremo. ***Tale metodo funziona solo se vi sono 2 restrizioni per la quale il segno è diverso (non di estremo)*** mentre non permette di concludere nulla in positivo. Lo studio della funzione incremento ricorre alla definizione di massimo e minimo, infatti se:

1. $\Delta f \geq 0$ nell'intorno vuol dire che P(x_0,y_0) è un punto di minimo;
2. $\Delta f \leq 0$ nell'intorno vuol dire che P(x_0,y_0) è un punto di massimo;
3. Se all'interno dell'intorno vi sono due restrizioni tali che in una $\Delta f \geq 0$ e nell'altra $\Delta f \leq 0$ allora è un punto di sella.

3. Se viene richiesto di classificare i punti di un insieme dipendente da un parametro alfa, esempio $C = \{(\alpha, \alpha^2) : \alpha \in R\}$, basta studiare la funzione incremento. Studiarne il segno e fare il grafico della funzione del parametro ($y = \alpha^2$) e quella della funzione incremento e studiare i punti al variare di alfa.

Ossevazione:

Se $f(x,y) = g(x) + h(y)$ allora (x_0,y_0) è di massimo / minimo per f se e solo se:

1. x_0 è punto di max/min relativo per g(x);
2. y_0 è punto di max/min relativo per h(y).

Dunque:

- (x_0, y_0) è di massimo quando entrambi sono di massimo;
- (x_0, y_0) è di minimo quando entrambi sono di minimo;
- (x_0, y_0) è di sella quando sono una è di massimo e l'altro è di minimo.

Massimi e minimi vincolati

Ricerca di punti di massimo e minimo non su tutto il dominio ma sui punti del dominio che soddisfano l'equazione di un vincolo g(x,y), ovvero i punti dell'insieme:

$$\{(x,y) \in A : g(x,y) = 0\}$$

Procedimento risolutivo utile:

1. Dal vincolo isolare una variabile e sostituirla in f(x,y) e studiare la monotonia per la nuova funzione ottenuta in una sola variabile;
2. Esplicitare il vincola in forma parametrica e sostituire ai valori di x,y quelli della forma parametrica x(t),y(t) e studiare la nuova funzione;
3. Metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Se g(x,y)= e il gradiente di di g in quel punto è diverso da zero basta studiare i punti di estremo libero di tale funzione: $L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$. Ovvero $\nabla L(x,y,\lambda) = 0$.
4. Metodo delle curve di livello, quando è facile disegnare il vincolo:
$$\begin{cases} f(x,y) = k \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

Osservazioni:

1. Se $h : R \to R$ è ***monotona crescente*** allora: $f(x,y)$ e $(h \ o \ f)(x,y) = h(f(x,y))$ hanno gli ***stessi punti di massimo e minimo***, perciò basta studiare la funzione f(x,y);
2. Se $h : R \to R$ è ***monotona decrescente*** allora: $f(x,y)$ e $(h \ o \ f)(x,y) = h(f(x,y))$ ***massimi e minimi di f e h si scambiano***.

Massimi e minimi assoluti

Procedimento risolutivo utile:

1. Studio di massimi/minimi liberi all'interno del bordo;
2. Studio di massimi/minimi vincolati al bordo usando i metodi precedenti;

Autore: Samuele Sandrini

3. Confronto delle quote per determinare il max/min assoluto.

Osservazioni:

- Simmetrie:
  - Se $f(x,y)=f(-x,-y)$ basta studiare il primo e il secondo quadrante, successivamente per simmetria si ricava i punti del terzo e quarto;
  - Se $f(x,y)=f(-x,-y)=f(x,-y)=f(-x,y)$ basta studiare il primo quadrante, successivamente per simmetria si ricavano quelli degli altri quadranti;

Prerequisiti:

$$\cosh^2(x)-\sinh^2(x)=1$$

$$\cosh^2(x)=\frac{1}{2}(\cosh(2x)+1)$$

$$\sinh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2} \quad \cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

Lunghezza di una curva ed integrali curvilinei

Lunghezza di una curva

- Γ una curva regolare, rettificabile,

$$L(\Gamma)=\int_a^b \|\vec{r}\,'(t)\|dt$$

Ascissa curvilinea:

$$s(t)=\int_a^t \|\vec{r}\,'(\tau)\|d\tau$$

Integrali curvilinei di prima specie

- Campo scalare continuo
- Curva regolare a tratti

$$\int_\Gamma \varphi(\vec{x})ds=\int_a^b \varphi(\vec{r}(t))s'(t)dt=\int_a^b \varphi(\vec{r}(t))\|\vec{r}\,'(t)\|dt$$

Nel caso in cui venga data una curva particolare (come un triangolo, quadrato):

1. Parametrizzare ogni singolo tratto;
2. Sfruttare l'additività e scomporre l'integrale in ogni singolo tratto;
3. Calcolare l'integrale in ciascun tratto.

Nel caso in cui la curva si trova a metà tra due espressioni della funzione è necessario spezzare l'integrale in due pezzi ma sulla stessa curva.

NB: NON dipendono dal verso di percorrenza

Integrali curvilinei di seconda specie

- Campo vettoriale continuo
- Curva regolare a tratti

Autore: Samuele Sandrini

$$\int_\Gamma \vec{F} d\vec{r} = \int_\Gamma \vec{F} d\Gamma = \int_a^b F(\vec{r}(t)) \bullet \vec{r}(t) dt$$

NB: dipendono dal verso di percorrenza:

$$\int_{\tilde{\Gamma}=-\Gamma} \vec{F} d\tilde{\Gamma} = -\int_\Gamma \vec{F} d\Gamma$$

Gradienti e potenziali

1. Il campo vettoriale è conservativo?

a. $\vec{F} \in C^1 (dove\ devo\ calcolare\ il\ \ potenziale)$

b. $dom(\vec{F})$ o almeno l'insieme in cui devo calcolare il potenziale è ***APERTO SEMPLICEMENTE CONNESSO*** (senza buchi o divisorie);

c. $\frac{\partial F_i}{\partial x_k} = \frac{\partial F_k}{\partial x_i}$ (***Uguaglianza delle derivate in croce***)

d. $\Rightarrow \vec{F}$ è ***conservativo*** e dunque ammette potenziale.

2. Calcolo il potenziale:

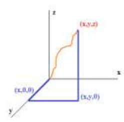
a. $$\vec{F} = \nabla \vec{\varphi} \Leftrightarrow \begin{cases} F_1(x,y,z) = \dfrac{\partial \varphi_1(x,y,z)}{\partial x} \Leftrightarrow \varphi_1(x,y,z) = \int F_1(x,y,z) dx \Leftrightarrow \varphi_1(x,y,z) = ... + \Phi_1(y,z) \\ F_2(x,y,z) = \dfrac{\partial \varphi_2(x,y,z)}{\partial y} \\ F_3(x,y,z) = \dfrac{\partial \varphi_3(x,y,z)}{\partial z} \end{cases}$$

Proseguendo fino a quando $\Phi(z) = ..$ (all'ultimo integrare ricordarsi + k);

b. $\int_\Gamma \nabla \vec{\varphi} d\Gamma = \varphi(x,y,z) - \vec{\varphi}(x_0, y_0, z_0) \qquad \Rightarrow \varphi(x,y,z) = \varphi(x_0,y_0,z_0) + \int_\Gamma \nabla \vec{\varphi} d\Gamma$

Solitamente si usa quando viene dato un particolare come "cercare potenziale tale che $\varphi(0,0,0) = ...$".

Da notare che la curva gamma è una qualsiasi curva che va da x_0 ad x (vettori). Dato che il campo vettoriale è un campo conservativo, l'integrale è indipendente dalla traiettoria perciò scelgo una curva facile (parallela agli assi) e scompongo l'integrale per additività alle singole curve.



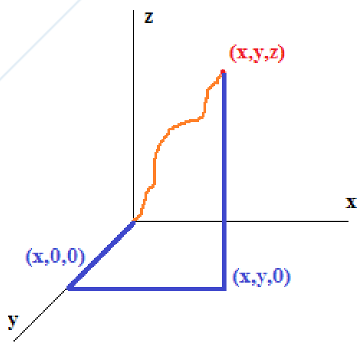
Integrali di seconda specie (gradienti e potenziali).

Si può sfruttare il fatto che un campo scalare è un potenziale per il calcolo di integrali di seconda specie. In particolare, quando risulta complesso sfruttare la definizione, si può procedere a verificare che F sia effettivamente conservativo, ed a questo punto ho due possibilità:

- Calcolo il potenziale e successivamente:

$$\int \vec{F} d\Gamma = \varphi(\vec{x}_B) - \varphi(\vec{x}_A)$$

- Dato che il campo vettoriale è conservativo, vuol dire che l'integrale è indipendente dalla traiettoria, perciò ne scelgo un'altra più facile (parallela agli assi). Successivamente sfruttando la proprietà di additività sommo i singoli integrali.



Autore: Samuele Sandrini

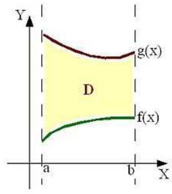
- Nel caso che la traiettoria parallela agli assi risulti sconveniente, bisogna guardare quale espressione risulta sconveniente all'interno dell'espressione del campo vettoriale e successivamente porla uguale al numero cui farebbe comodo. Successivamente parametrizzarla e usarla come traiettoria.

Nel caso in cui l'integrale curvilineo da calcolare risulti complesso e la curva su cui deve essere calcolato è una curva chiusa, può essere utile ricorrere al teorema di Gauss-Green:

$$\iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dxdy = \oint_{\Gamma = \partial^+ D} \vec{F} d\vec{\Gamma}$$

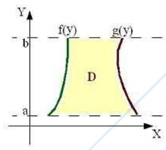
Integrali doppi (volumi di campi scalari)

1. Dominio normale rispetto la x:



$T = \{(x,y) \in R^2 : a \le x \le b, \alpha(x) \le y \le \beta(x)\}$ Allora: $\iint f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)dy$

2. Dominio normale rispetto la y:



$T = \{(x,y) \in R^2 : a \le y \le b, \alpha(y) \le x \le \beta(y)\}$ Allora: $\iint f(x,y)dxdy = \int_a^b dy \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx$

3. Quando il dominio non risulta normale ne rispetto x ne y è possibile vedere il dominio T come somma o differenza di più domini e calcolare l'integrale come sommo o differenza degli integrali su ciascun dominio sfruttando la proprietà di additività

4. Quando l'integrale è somma di più espressioni è possibile scomporlo.

Simmetrie (da verificare quando il dominio presenta delle simmetrie):

- Pari rispetto la x $f(-x,y) = f(x,y)$ e T è simmetrico rispetto all'asse delle y si ha:

$$\iint_T f(x,y)dxdy = 2\iint_{T_1} f(x,y)dxdy$$

- Dispari rispetto la x $f(-x,y) = -f(x,y)$ e T è simmetrico rispetto all'asse y, si ha:

$$\iint_T f(x,y)dxdy = 0$$

- Pari rispetto la y, T simmetrico rispetto x, si ha:

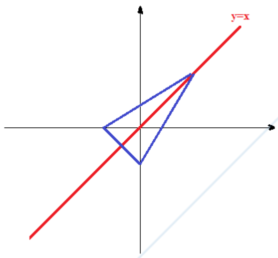
$$\iint_T f(x,y)dxdy = 2\iint_{T_1} f(x,y)dxdy$$

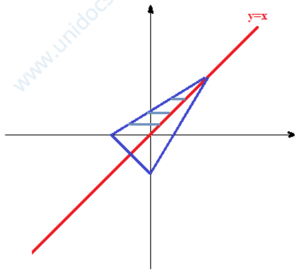
- Dispari rispetto la y, T simmetrico rispetto la x, si ha:

$$\iint_T f(x,y)dxdy = 0$$

- $(x,y) \in T \Leftrightarrow (y,x) \in T$ se:

Autore: Samuele Sandrini





- $f(x,y) = f(y,x) \quad \forall (x,y) \in T$ Allora: $\iint_T f(x,y)dxdy = 2\int\int_{T\cap\{y\geq x\}} f(x,y)dxdy$
- $f(x,y) = -f(y,x) \quad \forall (x,y) \in T$ Allora: $\iint_T f(x,y)dxdy = 0$

$$Vol(a) = \iint f(x,y)dxdy$$

Volume tra due grafici: $\iint (g(x,y) - f(x,y))dxdy$

Integrali doppi con modulo: sciogliere il modulo guardando quando è non negativo è quando negativo e dividere il dominio in cui calcolare l'integrale nelle due aree e per additività scomporre l'integrale nella somma dei due.

Cambiamento di variabili:

- $\vec{F}: A \subseteq R^2 \to T$ con $F \in C^1$
- $\vec{\varphi}(u,v) = \varphi_1(u,v)\vec{i}_1 + \varphi_2(u,v)\vec{i}_2$ dove $\varphi: S \to T$ con $\vec{\varphi} \in C^1$

$$\iint_T f(x,y)dxdy = \iint_S f(\varphi_1(u,v), \varphi_2(u,v))|J(u,v)|dudv$$

Cambiamento di variabili utile: coordinate polari:

- $\vec{\varphi}(u,v) = \rho\cos\theta\vec{i}_1 + \rho\sin\theta\vec{i}_2$
- Riscrivere il nuovo dominio in S dipendente da teta e ro.

$$|J(u,v)| = \begin{vmatrix} \cos\vartheta & -\rho\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \rho\cos\vartheta \end{vmatrix} = \rho\cos^2\vartheta + \rho\sin^2\vartheta = \rho$$

$$\iint_T f(x,y)dxdy = \iint_S f(\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta)\rho dudv$$

1. Tale cambiamento di variabili è conveniente nel caso di domini con simmetria circolare.
2. Se il dominio con simmetria circolare non è centrato in (0,0) ricordarsi che:

$$x = x_0 + \rho\cos\theta$$
$$y = y_0 + \rho sen\theta$$

3. Coordinate polari ellittiche:

$\vec{\varphi}(u,v) = a\rho\cos\theta\vec{i}_1 + b\rho\sin\theta\vec{i}_2$

$|J(u,v)| = ab\rho$

Quando si riscrive il dominio si ha sempre che : $0 \leq \rho \leq 1$

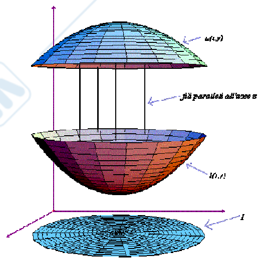
Autore: Samuele Sandrini

4. Quando ricorre più volte una stessa espressione nell'integrale è possibile effettuare un cambiamento di variabili in questo modo:

$$\vec{\varphi}(u,v) = \varphi_1(u,v)i_1 + \varphi_2(u,v)i_2 \qquad J(u,v) = \begin{vmatrix} \nabla\varphi_1 \\ \nabla\varphi_1 \end{vmatrix} \qquad \iint_S f(x,y)dxdy = \iint f(\varphi_1,\varphi_2)|J(u,v)|dudv$$

Integrali tripli

1. Formula di riduzione per fili:

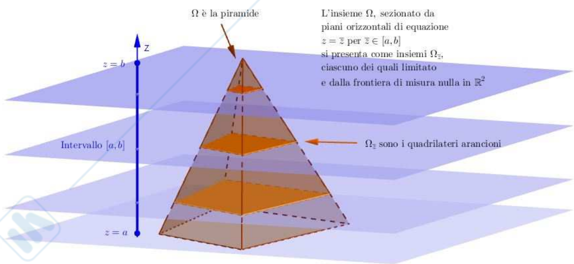


$$T = \{(x,y,z) \in R^3 : (x,y) \in D, \alpha(x,y) \le z \le \beta(x,y)\}$$ Allora:

$$\iiint_T f(x,y,z)dxdydz = \iint_D \left\{ \int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)dz \right\} dxdy$$

2. Formula di riduzione per strati:

$$T = \{(x,y,z) \in R^3 : h_1 \le z \le h_2,\ (x,y) \in T_z\}$$ Allora: $$\iiint_T f(x,y,z)dxdydz = \int_{h_1}^{h_2} \left\{ \iint_{T_z} \{f(x,y,z)\} dxdy \right\} dz$$



Cambiamento di variabili:

1. Coordinate polari cilindriche, comode per simmetrie rispetto l'asse z:

$$\begin{cases} x = r\cos\vartheta \\ y = r\sin\vartheta \\ z = z \end{cases} \qquad |J| = r$$

NB: ruotando y attorno z si ottiene: $\sqrt{x^2 + y^2}$

2. Coordinate polari sferiche, comode per simmetrie sferiche o parti di sfere rispetto l'origine:

$$\begin{cases} x = r\sin\phi\cos\vartheta \\ y = r\sin\phi\sin\vartheta \\ z = r\cos\phi \end{cases} \qquad |J| = r^2\sin\phi$$

3. Coordinate ellissoidali, comode per sole ellissoidi:

$$\begin{cases} x = ar\sin\phi\cos\vartheta \\ y = br\sin\phi\sin\vartheta \\ z = cr\cos\phi \end{cases} \qquad |J| = abcr^2\sin\phi$$ Si ha sempre che: $0 \le r \le 1$

Autore: Samuele Sandrini

Quadriche

- **Ellissoide**

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

  Se $a=b=c=r$ allora si ottiene la ***sfera*** di centro (0,0,0) di raggio r: $x^2+y^2+z^2=r^2$

- ***Sfera*** di centro (x_0,y_0,z_0):

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$$

- **Iperboloide:**
  - **A una falda (rette secanti rotanti asse fisso):** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$
  - **A due falde:** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$
- **Paraboloide:**
  - **Ellittico (generalizzazione parabola):** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$
  - **Iperbolico (sella - pringols):** $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$

Integrali tripli (normali e sostituzioni)
Integrali di superficie
Integrali con green e stokes

Autore: Samuele Sandrini

Successione di funzioni

$\{f_n(x)\}_{n\in N}$

CONVERGENZA PUNTUALE

$\{f_n(x)\}_{n\in N}$ converge puntualmente a f in $I \Leftrightarrow \forall x\in I$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$$

Modalità di esecuzione:

1. Fissare casi possibili di x o di argomenti particolari di sen, cos, arcsin e per ciascuno mandare al limite per verificare a cosa tende. Il risultato deve dipendere solo dalla variabile x, o deve essere una costante.

CONVERGENZA UNIFORME

$\{f_n(x)\}_{n\in N}$ converge uniformemente a f in $I \Leftrightarrow \forall x\in I$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|=0$$

Modalità di esecuzione:

1. Calcolare il sup (dipendente solo da n) e successivamente mandarlo al limite.
2. Sfruttare proprietà quali:
   a. $lin_{n\to\infty}\arctan(n)=\dfrac{\pi}{2}$
   b. $lin_{n\to\infty}\tanh(n)=1$
3. Verificare se all'interno dell'insieme di convergenza il modulo può essere tolto (parità, intervallo positivo, funzione sempre positiva..).
4. Nei casi in cui si ottengono funzioni complesse si può ricorrere al calcolo della derivata per ricavare il sup.
5. Quando il sup da calcolare è molto difficile si può cercare di maggiorarlo ad un'altra funzione la quale mandata al limite valga a zero, in questo caso anche quella a sinistra converge zero nel caso contrario non si può affermare nulla. Maggiorazioni esemplari:
   a. $|u+v|\le|u|+|v|$
   b. $|uv|\le|u||v|$
   c. $\left|\sqrt{u}-\sqrt{v}\right|\le\sqrt{|u-v|}$
   d. $\sqrt{u+v}\le\sqrt{u}+\sqrt{v}$
   e. $\sin(\alpha)\le\alpha$
   f. $\sup\dfrac{x}{x+1}\le 1$
   g. $\sup|\sin(f_n)|$ fa uno se esiste un x tale per cui vale 1 allora vale 1 (in generale vale <= 1). In particolare per il teorema dei valori intermedi delle funzioni continue basta che $g(x_1)=0$ e $\lim_{x\to\infty} g(x)=\infty$ allora assume tutti i valori tra i due.
6. Se la funzione è discontinua allora non converge uniformemente.
7. In alcuni casi in cui la successione ha varie espressioni dipendenti da n al variare di x:

$$f_n(x)=\begin{cases} n & se\ \ x\ldots \\ ..n & \end{cases}$$

   Convergenza puntiforme: nel grafico fisso una x a caso e mandando a più infinito n vedrò che l'espressioni scavalcano x e farà zero..si spera.
   Il sup sarà una successione numerica che dipende da n (e la x è fissata). Si determinano a1, a2, a3 per verificare il valore del sup. In particolare capiterà che per n>> l'espressione scavalcherà a.
8. $A\le B\Rightarrow \sup_A g\le\sup_B g$

Autore: Samuele Sandrini

9. Funzione caratteristica:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

Autore: Samuele Sandrini

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Serie di funzioni

$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ su $I \subseteq R$

CONVERGENZA PUNTUALE

$$\lim_{k\to\infty} S_k(x) = S(x) \qquad \forall x \in I$$

Per ogni x appartenente ad I la serie numerica associata converge.

Modalità di esecuzione (convergenza puntale e insieme di convergenza p.):

1. Fissare casi possibili di x o di argomenti particolari di sen, cos, arcsin e per ciascuno studiare la serie numerica associata (sostituire x -> x0). Per ogni x fissato è possibile ricorrere ai metodi di studio delle serie (in particolare criterio della radice e criterio del rapporto)
2. Portare molta attenzione se la serie non è a termini positivo. Verificare per quali x vale la condizione necessaria e ricorrere alla serie dei moduli (convergenza assoluta). La quale è a termini positivi e si possono applicare i criteri. Se la serie dei moduli converge allora la serie converge.

Modalità di esecuzione (convergenza uniforme):

1. Ricorrere alla convergenza totale . E ricordare che la convergenza totale implica quella uniforme che implica quella puntuale. Per maggiorare il modulo di fn ricordare che bisogna: aumentare il numeratore, diminuire il denominatore. e^-x<1.
2. Quando non si riesce a maggiorare o rimane la x allora si calcola il sup studiando la derivata.
3. Attenzione alle serie telescopiche: xn – xn-1. Calcolare Sk o poi calcolare le convergenze usando le definizioni.
4. Se il sup è più infinito perché la funzione cresce sempre posso limitare l'insieme di convergenza ad un b appartenente ad R. e il sup sarà il valore di f in b.

Serie di potenze

È possibile ricorrere alle serie di potenze anche se vi sono espressioni non tipiche come $\sum a_n x^n$, ma in cui compare una funzione semplice elevata alla n e tutto il resto dipende solo da n. $\sum a_n (espressione)^n$

Per esempio $\sum a_n e^{nx}$ oppure $\sum a_n x^{3n}$. In questi casi è possibile associare all'espressione una nuova variabile ausiliaria $y = espressione$ e studiare la serie nella nuova variabile. Ricordare che l'insieme di convergenza è espresso in $-R \leq y \leq R$ il quale va studiato nella espressione sostituita $-R \leq espressione \leq R$.

Nel caso si ha un espressione tipo: $\sum x a_n x^{3n} = x \sum a_n x^{3n}$ x esce dalla sommatoria perché è una costante.

Serie di Taylor

Nel caso in cui venga chiesto la somma della serie (o serie geometrica, o telescopica, o Taylor).
Si cerca di esprimere come derivate o integrali successivamente si porta fuori il segno di derivata/integrale e rimarrà una serie di Taylor di cui si conosce la convergenza.

Autore: Samuele Sandrini

Equazioni differenziali

$$\begin{cases} y'(t) = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

1. Ricavare il ***dominio*** di $f(t,y)$. In particolare se $t \neq valore$ poiché dato che la soluzione è sempre data in un intervallo bisogna confrontarlo con il valore della condizione iniziale t_0 per capire l'intervallo (dx o sx).
2. Verificare che $\frac{\partial f(t,y)}{\partial y}$ si continua, se lo è vale il ***teorema di esistenza ed unicità locale*** :
   $\exists \delta > 0 t.c \exists! y : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \to R$
3. ***Teorema di esistenza globale:*** Se $|f(t,y)| \le k_1 + k_2|y|$ allora la soluzione è definita $\forall (t_0, y_0) \in [a,b] \times R$.
   Se a,b non hanno vincoli allora è definita in tutto R, intervallo massimale di esistenza: $[T_{\min}, T_{\max}] = R$.
   In particolare per ricavare la disuguaglianza, i moduli in t non danno problemi perché $t \in [a,b]$ (è costante) e si può approssimare in due modi: $\max_{[a,b]} |a| + |b|$.
   Se la funzione in y è una cubica o quadrica non si riesce a fare una stima di sub linearità e si può ricorrere all'espressione di tale teorema in termini di soluzione.
4. ***Teorema di esistenza globale in termini di soluzione:*** Se $|f(t, y(t))| \le k_1 + k_2|y(t)|$ allora la soluzione è definita $\forall (t_0, y_0) \in [a,b] \times R$. Per far questo è necessario:
   a. Calcolare le soluzioni stazionarie in y; $f(t,y) = 0$. Sapendo che la nostra soluzione (in t_0, data nel problema di cauchy) non può intersecare quelle stazionarie, possiamo dire che è limita e conosciamo a cosa è minore.
5. Studio della ***monotonia***: Studio il segno di: $y'(t)$ dato nel problema di cauchy.
6. Studio delle ***simmetrie*** di y(t):
   a. ***Disparità***. Iniziamo tale studio se $y(t_0) = 0$ (condizione iniziale). In questo caso chiamiamo $v(t) = -y(-t)$ quindi $v'(t) = -y'(-t)(-1) = +y'(-t)$. Sostituiamo e risostituiamo se necessario per verificare che risolve lo stesso problema di Cauchy. Ricordarsi di verificare la condizione iniziale che $v(t_0) = -y(-t_0) = y_0$
   b. ***Parità***. In questo caso chiamiamo $v(t) = y(-t)$ quindi $v'(t) = y'(-t)(-1) = -y'(-t)$. Sostituiamo e risostituiamo se necessario per verificare che risolve lo stesso problema di Cauchy. Ricordarsi di verificare la condizione iniziale che $v(t_0) = y(-t_0) = y_0$
7. ***Teorema dell'asintoto:***
   a. Nel caso in cui la soluzione si trova tra due soluzioni stazionarie il teorema si usa in tale modo:
   $\lim_{t\to\infty} y(t) = b$ ***(Richiesta la monotonia)*** $\lim_{t\to\infty} y'(t) = \lim_{t\to\infty} f(t,b) = 0 \Leftrightarrow b = val_1, val_2 \ldots$
   $\lim_{t\to-\infty} y(t) = a$ $\lim_{t\to-\infty} y'(t) = \lim_{t\to-\infty} f(t,a) = 0 \Leftrightarrow a = val_1, val_2 \ldots$
   $SolStazInf \le a < b \le SolStazSup$ e si determinano i valori di a e b.
   b. Nel caso in cui la soluzione si trova sopra una soluzione stazionaria senza vincoli, oppure senza vincoli completamente, il teorema si usa in questo modo:
   Si suppone per assurdo che $\exists finito \lim_{t\to\infty} y(t) = b$ si calcola $\lim_{t\to\infty} y'(t)$ e si noterà che non sarà uguale a 0 e perciò siamo giunti ad una contraddizione. $b = +\infty$
8. ***Concavità / convessità.*** Studio la derivata seconda, portando attenzione alla derivata di y(t), in quanto la derivata seconda può essere composizione e magari devo moltiplicare per la derivata prima della quale ho l'espressione.

Autore: Samuele Sandrini