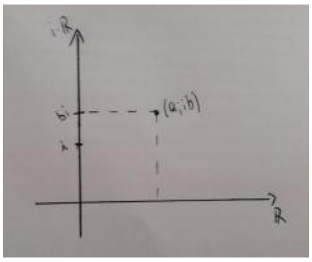
I Numeri Complessi

lunedì 28 settembre 2020 18:18

GENERALITA'

Definisco un elemento i (chiamato unità immaginaria) tale che $i^2 = -1$.



L'unità immaginaria non può essere rappresentata nella classica retta orientata su cui si rappresentavano i numeri fino ai reali, perciò viene dunque introdotta una nuova rappresentazione su piano cartesiano, dove i rappresenta l'unità di misura. Inoltre i può essere moltiplicata per i numeri reali con l'idea che se moltiplico i per un elemento $b \in \mathbb{R}$ $(ib)^2 = i^2b^2 = -b^2$. Allo stesso modo posso considerare la somma tra un numero reale e un complesso multiplo di i scritto nella forma a + ib, facendo però molta attenzione a non mischiare reali e complessi.

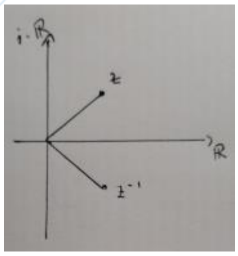
TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA: tutte le equazioni in $\mathbb{C}$ hanno soluzione in $\mathbb{C}$ ==> $\mathbb{C}$ è l'ultimo insieme numerico esistente.

REGOLE DI CALCOLO

1) **z + w** = (a + ib) + (c + id) = **(a + c) + i(b + d)**
2) **z · w** = (a + ib) · (c + id) = ac + iad + ibc + i^2 bd = **(ac - bd) + i(ad + bc)**
3) ∃ l'elemento neutro ⊕ => 0 ==> 0 + i · 0 = 0 (a + ib) + (0 + i0) = a + ib
4) ∃ l'inverso per la somma => z = a + ib -z = -a -ib
5) ∃ l'elemento neutro per il prodotto => 1 ==> 1 + i · 1 = 1 + i
6) ∃ l'inverso per il prodotto z^{-1} tale che $z \cdot z^{-1} = 1$

DEF: z = a + ib a = Re(z) **parte reale**
b = Im(z) **parte immaginaria** (è sempre comunque un numero reale)

INVERSO PER IL PRODOTTO



DEFINIZIONE: Dato un numero $z \in \mathbb{C}$

- Definisco il coniugato di z il numero $\bar{z}$, per cui se $z = a + ib$, $\bar{z} = a - ib$.
- Definisco inoltre modulo di z la quantità $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$

Osservo: se $z = a + ib$ $\bar{z} = a - ib$, $z \cdot \bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$ ===> |z| è definito nei reali.

Concludo: $z \cdot \frac{\bar{z}}{\bar{z} \cdot z} = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} = 1$ abbiamo dimostrato che se $z \in \mathbb{C}$ $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ è il suo **inverso.**

PROPRIETA' DI |Z|

1) |z| = 0 <=> z = 0 ∈ sse a = 0 b = 0

2) Se $z, w \in \mathbb{C}$ $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

Dimostrazione: z = a + ib w = c + id |(a + ib) (c + id)| = |(a + ib)| · |(c + id)| ?

Questo è equivalente a chiedersi se $|(a + ib)(c + id)|^2 = |(a + ib)|^2 \cdot |(c + id)|^2$ perché la mappa x^2 è sempre iniettiva per x positiva.

Lato sx = $|(ac - bd)+ i(ad + bc)|^2 = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = (ac)^2 + (bd)^2 - 2abcd + (ad)^2 + (bc)^2 - 2abcd = (ac)^2 + (bd)^2 + (ad)^2 + (bc)^2$

Lato dx = $(a^2 + b^2) \cdot (c^2 + d^2) = (ac)^2 + (bd)^2 + (ad)^2 + (bc)^2$

===> LS = LD

c.v.d.

3) Se $z, w \in \mathbb{C}$ $|z + w| \le |z| + |w|$ (disuguaglianza triangolare dei complessi)

Dimostrazione: $|z + w| \le |z| + |w|$ è vera sse $|z + w|^2 \le |z|^2 + |w|^2$ perché la mappa x^2 è sempre crescente per x positiva.

$|(a + c) + i(b + d)|^2 \le (\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2})^2$

$(a + c)^2 + (b + d)^2 \le a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2\sqrt{(ac)^2+(bd)^2+(ad)^2+(bc)^2}$

$a^2 + c^2 + 2ac + b^2 + d^2 + 2bd \leq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2\sqrt{(ac)^2+(bd)^2+(ad)^2+(bc)^2}$

$2(ac + bd) \leq 2\sqrt{(ac)^2+(bd)^2+(ad)^2+(bc)^2}$

$(ac + bd)^2 \leq (ac)^2+(bd)^2+(ad)^2+(bc)^2$

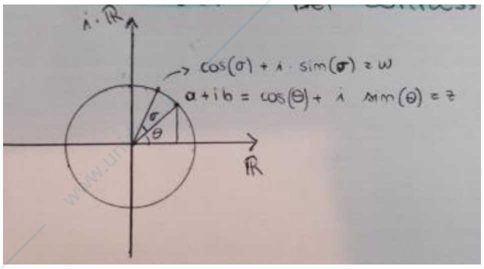
$(ac)^2 + (bd)^2 + 2abcd \leq (ac)^2+(bd)^2+(ad)^2+(bc)^2$

$2abcd \leq (ad)^2+(bc)^2$

$0 \leq (ad)^2 + (bc)^2 - 2abcd$

$(ad - bc)^2 \geq 0$ ===> sempre vera.

ALTRA NOTAZIONE DEI COMPLESSI



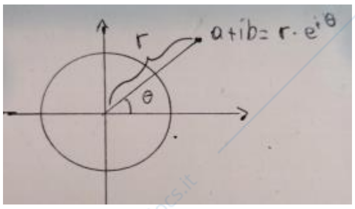
$z \cdot w = (\cos(\theta) + i\sin(\theta)) \cdot (\cos(\sigma) + i\sin(\sigma)) = [\cos(\theta)\cdot\cos(\sigma) - \sin(\theta)\cdot\sin(\sigma)] + i\,[\sin(\theta)\cdot\cos(\sigma) + \sin(\sigma)\cdot\cos(\theta)\cdot\sin(\sigma)] = \cos(\theta+\sigma) + i\sin(\theta+\sigma)$

DEFINIZIONE: dato $\theta \in R$, $e^{i\cdot\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$

Osservo che anche in questo caso valgono le proprietà delle potenze ==> $e^{i\cdot\theta}\cdot e^{i\cdot\sigma} = e^{i(\theta+\sigma)}$

==> $(e^{i\cdot\theta})^n = e^{in\theta}$ n Є Z.

REGOLA DI MOIVRE - LAPLAS (per scrivere i numeri complessi con la notazione sopra, anche se non distano 1 dall'origine)



$r = \sqrt{a^2+b^2}$

$a + ib = r\cdot\cos(\theta) + i\sin(\theta)$ ==> $\frac{a}{r} + \frac{ib}{r} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ ==> $\frac{a}{r} = \cos(\theta)$; $\frac{ib}{r} = i\sin(\theta)$

Facendo il rapporto ottengo $tg(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{b/r}{a/r} = \frac{b}{a}$ ===> $\theta = \text{arctg}(b/a)$

REMINDER: la regola vale solo per θ nel I e nel IV quadrante

ELEVAZIONE A POTENZA

Se $(a + ib) = z = r\cdot e^{i\theta}$ $z^n = ?$

$r = \sqrt{a^2+b^2}$ $\theta = \text{arctg}(b/a)$ ==> $z^n = (r\cdot e^{i\theta_1})^n = r^n\cdot e^{in\theta}$

A livello grafico i moduli si moltiplicano, gli angoli si sommano

MOLTIPLICAZIONE

Se $z = a + ib = r_1\cdot e^{i\theta_1}$ ====> $z\cdot w = r_1\cdot e^{i\theta_1}\cdot r_2\cdot e^{i\theta_2} = r_1\cdot r_2\cdot e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

$w = c + id = r_2\cdot e^{i\theta_2}$

RADICE COMPLESSA

DEFINIZIONE: Dato w Є C, chiamo radici n-esime di w, n Є N, le soluzioni dell'equazione $z^n = w$.

TEOREMA DELLE RADICI COMPLESSE

Sia w Є C, nella forma $w = r \cdot e^{i\theta}$, allora le soluzioni di $z^n = w$ sono $z_k = r^{1/n} \cdot e^{i\theta_k}$, dove $\theta_k = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}$, con k = {0, 1 … , n -1}.

Dimostrazione:

1) $z^n = w$ => $|z^n| = |w|$ ==> $|z^n| = r$ sia $z = \rho \cdot e^{i\sigma}$ cioè $\rho^n = r$ => $\rho = r^{1/n}$
2) $(r^{1/n})^n \cdot e^{i\sigma n} = r\, e^{i\theta}$ ===> 1° soluzione: $\sigma n = \theta + 2k\pi$ k Є Z
3) $\sigma_k = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}$

a. Se l Є Z \ {0, 1, … n-1} allora $\sigma_l = \frac{\theta}{n} + \frac{2l\pi}{n}$ è tc $e^{i\sigma_l} = e^{i\sigma_n}$

∃ l Є Z \ {0, 1, … n-1} => l = n · m + k con m Є N \ {0} ==> $e^{i\sigma l} = e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2l\pi}{n}\right)} = e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}+\frac{2nm\pi}{n}\right)} = e^{i\sigma k} \cdot e^{i2m\pi} = e^{i\sigma k}$

b. Le soluzioni σ_k sono tutte distinte per k {0, 1, … n-1} $0 \le k \le l \le n-1$ l, k Є N ===> $0 \le l - k \le n - 1$

Se per assurdo $e^{i\sigma l} = e^{i\sigma k}$ ==> $e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2l\pi}{n}\right)} = e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}$ ===>

$\frac{\theta}{n} + \frac{2l\pi}{n} = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} + 2m\pi$ ====> $\frac{l-k}{n} = m$ ===> l - k = m · n dove m · n è un multiplo intero di n

MA AVEVAMO DETTO CHE PER Hp $l - k \le n - 1$ ===> ASSURDO. c.v.d.