Successioni

lunedì 2 novembre 2020 18:49

DEFINIZIONE: Una successione numerica è una funzione f: N ---> R
n |---> f(n) oppure n |---> a_n.

NOTAZIONE: una successione si indica $\{a_n\}_{n \in N}$ oppure con $(a_n)_{n \in N}$
$\{a_n\}$ (a_n)

LIMITE FINITO

IDEA Una successione {an} tende ad a Є R, se per ogni intervallo aperto contenente a, tutti i termini della successione an, a partire da un certo n, vi stanno dentro.

DEFINIZIONE

$\lim_{n \to +\infty} a_n = a \quad se \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad se \quad n \geq N, \quad a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |a_n - a| < \varepsilon$

DEFINIZIONE 2

$\lim_{n \to +\infty} a_n = a \quad se \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists N > 0 \quad se \quad n \geq N, \quad a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |a_n - a| < \varepsilon$

DEFINIZIONE 3

$\lim_{n \to +\infty} a_n = a \quad a \in R \quad \Leftrightarrow \quad se \quad \exists c > 0 \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists N > 0 \quad se \quad n \geq N, \quad a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |a_n - a| < \varepsilon \cdot c$

Dimostrazione:

1) [=>] è ovvia, basta prendere c = 1
2) [<=] devo dimostrare che data la tesi della definizione sopra, vale $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N = N\varepsilon$ tale che $n > N\varepsilon$ $|a_n - a| < \varepsilon$.

Fissato ε, chiamo $\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{c} > 0$ so grazie alla tesi che $\exists N\varepsilon$ tale che se $n \geq N\varepsilon$ allora $|a_n - a| < c \cdot \tilde{\varepsilon} = c \cdot \frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon$ ==> l'ipotesi è sempre vera.

TEOREMA DI UNICITA' DEL LIMITE

Se a_n tende ad a Є R, e a_n tende a b Є R ==> a = b.

Dimostrazione:

$|a - b| = |a - a_n + a_n - b| \leq |a - a_n| + |a_n - b|$ [disuguaglianza triangolare]

So che dato a $\varepsilon > 0$ $\exists N_1 > 0 \quad tc \quad n \geq N_1 \quad \Rightarrow \quad |a_n - a| < \varepsilon$

$\exists N_2 > 0 \quad tc \quad n \geq N_2 \quad \Rightarrow \quad |a_n - b| < \varepsilon$

Scelgo N il massimo di $\{N_1, N_2\} > 0$ se n > N, $|a_n - a| < \varepsilon$ e $|a_n - b| < \varepsilon$ ==> grazie a D.T. $|a - b| \leq |a_n - a| + |b - a_n| < \varepsilon + \varepsilon$ ==>

==> $\forall \varepsilon > 0$ $|a - b| < 2\varepsilon$ ==> visto che $|a - b| \geq 0$ e che $|a - b| \leq 2\varepsilon$ ALLORA $|a - b| = 0$ <==> a = b.

INFINITESIMA

Se $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$ la successione è definita **infinitesima**.

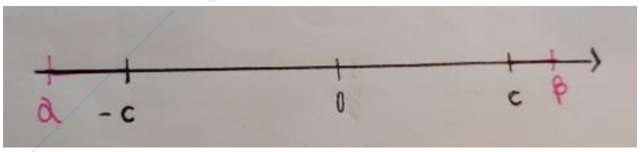
SUCCESSIONE LIMITATA

1) $\{a_n\}$ si definisce una successione limitata se $\exists c > 0$ tale che $|a_n| \leq c$
2) $\{a_n\}$ si definisce una successione limitata se $\exists \alpha, \beta \in R$ tale che $\alpha \leq a_n \leq \beta$.

Significato:

Data una successione $\{a_n\}$ dire che $|a_n| \leq c$ significa dire che la distanza dall'origine di a_n è c e quindi che $\{a_n\}$ è contenuta nell'intervallo [-c , c].

In realtà, secondo la definizione 2) non è necessario che l'intervallo sia simmetrico, ma basta trovare due numeri α e β, diversi, tali che comunque essi comprendano a_n nell'intervallo.



Detto ciò, α e β, o c, non sono necessariamente unici, ma ne possono esistere diversi. Gli estremi ideali sono il sup e l'inf di a_n, ma ovviamente numeri più grandi del sup o più piccoli dell'inf non appartenenti alla successione possono comunque limitarla.

TEOREMA SUCCESSIONI LIMITATE

Sia a Є R, $a_n \to a$ allora $\{a_n\}$ è **limitata** e quindi esiste c > 0 tc $|a_n| \leq c$ $\forall n \in N$.

Dimostrazione:

So che $\forall\varepsilon > 0$ $\exists N > 0$ tale che $n \geq N$ $|a_n - a| < \varepsilon$ allora scelgo $\varepsilon = 1$ $\exists N_1 \in N$ tale che se $n > N_1$ ==> $|a_n - a| < 1$ ==> $a - 1 < a_n < a + 1$.

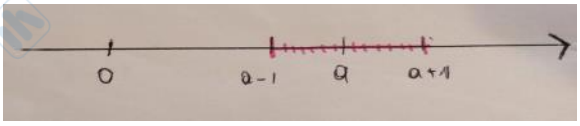
Chiamo $c = \max \{|a_0| , |a_1| , \dots , |a_{N1}|, |a - 1| , |a + 1|\}$ allora $|a_n| \leq c$ $\forall n \in N$

Infatti se $n \leq N_1$ $|a_n| \leq c$ perché $c \geq a_k$ $\forall k = 0, \dots N_1$

Se $n > N_1$ so che $a_n < a + 1$ ===> $a_n < |a + 1| \leq c$ e che $a_n > a - 1$ ==> $a_n \geq |a - 1| \geq - c$

E dunque $- c \leq a_n \leq c$ ====> $|a_n| \leq c$.

<u>Idea della dimostrazione:</u> Noi non conosciamo l'andamento di $\{a_n\}$, conosciamo però il suo andamento al limite (a). Secondo la definizione dato un qualsiasi ε a partire da un determinato elemento della successione, essa convergerà tutta dentro l'intervallo $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ ==> se scegliamo $\varepsilon = 1$



Prendo dunque c come il massimo N tra tutti gli elementi della successione e anche tra (a - 1) e (a + 1) ===> dati questi presupposti è ovvio che la distanza dalla origine della successione sarà minore del massimo dei termini.

ALGEBRA DEI LIMITI FINITI

PROPOSIZIONE

Siano a_n e b_n due successioni tali che $a_n \to a \in R$ $b_n \to b \in R$, allora
1) $a_n \pm b_n \to a \pm b$
2) $a_n \cdot b_n \to a \cdot b$
3) $a_n : b_n \to a : b$

REMINDER La seguente uguaglianza vale **soltanto** se sappiamo a priori che a_n e b_n ammettono limite.
$$\lim_{n\to+\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to+\infty} a_n + \lim_{n\to+\infty} b_n$$

<u>Dimostrazione:</u>

1) $a_n \pm b_n \to a \pm b$

$$Hp = \begin{cases} a_n \to a \iff \forall\varepsilon \ \exists N_1 \ \ se \ n \geq N_1 \quad |a_n - a| < \varepsilon \\ b_n \to b \iff \forall\varepsilon \ \exists N_2 \ \ se \ n \geq N_2 \quad |b_n - b| < \varepsilon \end{cases}$$

Dunque se $N = \max \{N_1, N_2\}$ allora valgono entrambe le definizione ==> $|(a_n \pm b_n) - (a \pm b)| = |(a_n \cdot a) + (\pm b_n \mp b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$ se $n > N$.

Ho dimostrato dunque che $(a_n + b_n) - (a + b) < \varepsilon$ ogni volta che N esiste.

c.v.d.

2) $a_n \cdot b_n \to a \cdot b$

Con le stesse ipotesi di prima, considerando sempre $N = \max \{N_1, N_2\}$, voglio dimostrare che

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a b_n + a b_n - ab| = |b_n(a_n - a) + a(b_n - b)| \leq |b_n| \cdot |a_n - a| + |a||b_n - b|$$

Osservo che i) $|a_n - a| < \varepsilon$ e $|b_n - b| < \varepsilon$ se $n \geq N$

ii) visto che $b_n \to b$, b_n è limitata (per il teorema delle successioni limitate) ==> $\exists c > 0$ $|b_n| \leq c$ ==>

$|b_n| \cdot |a_n - a| + |a||b_n - b| \leq c \cdot \varepsilon + |a| \cdot \varepsilon = (c + |a|)\varepsilon$ [che è una costante per ε] ==> soddisfa la definizione di limite.

c.v.d.

3) $a_n : b_n \to a : b$

Con le stesse ipotesi di prima, considerando sempre $N = \max \{N_1, N_2\}$, voglio dimostrare che $\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| < c$

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{a_n b - a b_n}{b_n b}\right| = \frac{1}{b_n b} \cdot |a_n b - ab|$$

Analizzo il numeratore il denominatore separatamente:

N) $|a_n b - ab| = |a_n b - a_n b_n + a_n b_n - ab| = |a_n(b - b_n) + b_n(a_n - b)| \leq |a_n||b - b_n| + |b_n||a_n - a|$

Dove $|a_n| \leq c \ (limitata)$ $\quad |b_n| \leq c \ (limitata)$
$|b - b_n| \leq \varepsilon$ $\quad |a_n - a| \leq \varepsilon$

$$|a_n||b - b_n| + |b_n||a_n - a| \leq 2c\varepsilon$$

O) Sia $b > 0$ (se $b < 0$ il procedimento è analogo) se considero un intervallo di lunghezza $\varepsilon = b/2$ so che $|b_n - b| < \varepsilon = b/2$ se $n \geq N_b$ <==> $b/2 = b - b/2 < b_n < b + b/2 = 3/2b$ considerando dunque solo la prima parte della disuguaglianza, ho che $1/b_n > 2/b$ ===> $1/(b \cdot b_n) > 2/ b^2$

Dunque $\frac{1}{|b_n \cdot b|} < \frac{2}{b^2}$

==> grazie a N) e D) ottengo che $\left|\frac{a_n}{b_n}-\frac{a}{b}\right| \leq \left(\frac{2}{b^2}\cdot 2c\right)\varepsilon$ [che è una costante per ε] ==> soddisfa la definizione di limite.

c.v.d.

LIMITE ALL'INFINITO

DEFINIZIONE:

$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \quad se \quad \forall M > 0 \quad \exists N > 0 \quad se\ n \geq N \quad a_n \geq M$

$\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty \quad se \quad \forall M < 0 \quad \exists N > 0 \quad se\ n \geq N \quad a_n \leq M$ *oppure* $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \quad se \quad \forall M > 0 \quad \exists N > 0 \quad se\ n \geq N \quad a_n < -M$

ALGEBRA DEI LIMITI INFINITI

L'algebra dei limiti infiniti con a_n e/o b_n divergenti funziona come l'algebra dei limiti finiti, tolti però quattro casi, definiti **forme indeterminate**:

1) Dati $a_n \to +\infty$ $b_n \to -\infty$, $a_n + b_n \to +\infty - \infty$
2) Dati $a_n \to \pm\infty$ $b_n \to 0$ $a_n \cdot b_n \to 0\ (\pm\infty)$
3) Dati $a_n \to \pm\infty$ $b_n \to \pm\infty$ $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$
4) Dati $a_n \to 0$ $b_n \to 0$ $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{0}{0}$

Per le forme non indeterminate vd pag. 70 del Marcellini.

TEOREMA DEL CONFRONTO

Se $a_n \to a$, dove $a > 0$, allora $\exists N > 0$ tale che $\forall n > N$ $a_n > 0$.

Idea: se la successione si accumula ad **a** a partire da un certo N, e **a** è positivo, evidentemente la successione a partire da quel N sarà positiva.

Dimostrazione: data la definizione di limite di successione, se scelgo $\varepsilon = a/2 > 0$ so che $\exists N > 0$ tali che se $n > N$ ==> $|a_n - a| < a/2$ ==> $-a/2 < a_n - a < a/2$.

Considero solo la prima disequazione, $a_n > a - a/2 = a/2 > 0$ ===> da un certo punto N in poi la successione si mantiene strettamente positiva. c.v.d.

COROLLARIO 1

Se $a_n \to a$ e $a_n \geq 0$ per ogni n allora $a \geq 0$.

Dimostrazione: per assurdo suppongo che $a < 0$ ==> $-a_n = b_n$ $b_n \to -a$ ==> a partire da un certo punto N, ossia per $n \geq N$, $b_n > 0$ (per la permanenza del segno) ==> $a_n = -b_n < 0$ ASSURDO perché per ipotesi $b_n \geq 0$.

Osservo: se $a_n > 0$ per ogni n allora non sempre $a > 0$ ==> infatti basta vedere come $1/n > 0$ sempre ma $1/n \to 0$ e quindi $a = 0$.

COROLLARIO 2

Dati $a_n \to a$ e $b_n \to b$, e $a_n \geq b_n$ $\forall n \in N$ allora $a \geq b$.

Dimostrazione: considero una terza successione, $c_n = a_n - b_n \geq 0$, so che $c_n \to a - b = c \geq 0$ per il corollario precedente ==> $a - b \geq 0$ ==> $a \geq b$.

TEOREMA DEI CARABINIERI

Siano a_n, b_n due successioni tali che $a_n \to a$ e $b_n \to a$, con $a \in R$, e sia c_n una successione tale che $a_n \leq c_n \leq b_n$, allora $c_n \to a$.

Dimostrazione: voglio dimostrare che vale questa definizione $\forall\varepsilon > 0$ $\exists N > 0$ tc se $n > N$ $|c_n - a| < \varepsilon$.

So che $a_n \leq c_n$, e dato che $\varepsilon > 0$ $\exists N_1$ $tc\ se\ n > N_1$ $|a_n - a| < \varepsilon$, so che $-\varepsilon < a_n - a \leq c_n - a$.

Inoltre, so che $b_n \geq c_n$, e dato che $\varepsilon > 0$ $\exists N_2$ $tc\ se\ n > N_2$ $-\varepsilon < b_n - a < \varepsilon$, so che $c_n - a \leq b_n - a < \varepsilon$.

Infine, posso concludere che se $n > N = \max\{N_1, N_2\}$ ==> $-\varepsilon < c_n - a < \varepsilon$. c.v.d.

LEMMA (Carabinieri Applicato agli infiniti)

Se $a_n \to +\infty$ e $b_n \geq a_n$ allora $b_n \to +\infty$.

Dimostrazione: so che $\forall M > 0$ $\exists N$: $n > N$ $a_n > M$ ==> $\forall M > 0$ $\exists N$: $n > N$ $b_n (\geq a_n) \geq M$. c.v.d.

LEMMA

Se $a_n \to 0$ <==> $|a_n| \to 0$.

Dimostrazione: [=>] $\forall\varepsilon > 0$ $\exists N$ se $n > N$ $|a_n| < \varepsilon$

[<=] $\forall\varepsilon > 0$ $\exists N$ se $n > N$ $||a_n|| < \varepsilon$ => $|a_n| < \varepsilon$.

TEOREMA

Sia $\{a_n\}$ una successione limitata e $\{\varepsilon_n\}$ una successione infinitesima (ovvero che tende a 0), allora il loro prodotto tende a zero [$a_n \cdot \varepsilon_n \to 0$].

Dimostrazione:

a_n limitata => $|a_n| < C$ per qualche $C > 0$ [$a_n \in (-c, c)$] dunque $0 \le |a_n \cdot \varepsilon_n| = |a_n| \cdot |\varepsilon_n| \le C\cdot |\varepsilon_n| \to 0$ (perché è una costante per un'infinitesima).

==> $a_n \cdot \varepsilon_n \to 0$ per il teorema dei carabinieri c.v.d.

LIMITI NOTEVOLI

LEMMA: Sia $\{a_n\} = a^n$, $a \in R$ allora $a_n \to \begin{cases} +\infty & a > 1 \\ 1 & a = 1 \\ 0 & -1 < a < 1 \\ non\ esiste & a \le -1 \end{cases}$

Dimostrazione:

a > 1 $a = 1 + \delta$ $[a - 1 > 0]$ ==> $a^n = (1 + \delta)^n \ge 1 + n\delta$ [dis. di Bernoulli] $1 + n\delta \to +\infty$ ==> $a^n \to +\infty$ [per i carabinieri con gli infiniti].

a € (-1, 1) $|a| \in [0,1)$ e $|a|^n = \frac{1}{(1/|a|)^n}$ ma $1/|a| > 1$ ==> $1/|a|^n \to +\infty$ ==> $|a|^n \to 0$.

LEMMA

1) Se $a > 0$ allora $a^{1/n} \to 1$
2) Se $a > 0$ allora $(n^a)^{1/n} \to 1$

Dimostrazione:

1) a > 1 chiamo $b_n = a^{1/n} - 1 \ge 0$ ==> $a^{1/n} = b_n + 1$ ==> $a = (b_n + 1)^n \ge 1 + n\, b_n$ [dis Bernulli] ==> $0 \le b_n \le \frac{a-1}{n} \to 0$

==> $b_n \to 0$ ==> $a^{1/n} - 1 \to 0$ ==> $a^{1/n} \to 1$.

0 < a < 1 $a = \frac{1}{1/a}$ $1/a > 1$ ==> $a^{1/n} = \frac{1}{(1/a)^{1/n}}$ ma se $(1/a)^{1/n} \to 1$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{(1/a)^{1/n}} \to 1$.

2) Passo 1: se $a = 1/2$ | $b_n = (n^{1/2})^{1/n} - 1 \ge 0$ ==> $(b_n + 1)^n = \sqrt{n} \ge 1 + n\, b_n$ ==> $0 \le b_n \le \frac{\sqrt{n}}{n} - \frac{1}{n}$

$-\frac{1}{n} \to 0$ $\frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ ==> $\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} \to 0$

Passo 2: se $a \in N$ | $(n^a)^{1/n} = (n^{2a})^{1/2n} = (n^{1/2n})^{2a} \to 1$ perché $n^{1/2n} \to 1$ e l'algebra dei limiti sostiene che se $c \to 1$ allora $c^a \to 1$.

Passo 3: se $a > 0$ | considero la parte intera di a ==> $\lfloor a \rfloor = \max\{ n \in Z \mid n \le a\}$ ==> $\lfloor a \rfloor \le a \le \lfloor a \rfloor + 1$

$(n^{\lfloor a \rfloor})^{1/n} \le (n^a)^{1/n} \le (n^{\lfloor a \rfloor + 1})^{1/n}$ ma per lo stesso motivo che nel passo 2 ==> $(n^{\lfloor a \rfloor})^{1/n} \to 1$ e $(n^{\lfloor a \rfloor + 1})^{1/n} \to 1$

quindi per il teorema dei carabinieri $(n^a)^{1/n} \to 1$ c.v.d.

COROLLARIO

In realtà $(n^a)^{1/2} \to 1$ vale per ogni a appartenente ai reali.

Dimostrazione: infatti per $a \le 0$ $(-n^{-|a|})^{1/n} = (-n^{-|a|})^{1/n} = \left(\frac{1}{-n^{-|a|}}\right)^{1/n} \to 1$ ___ c.v.d.

CRITERIO DELLA RADICE

Sia $\{a_n\}$ una successione a termini non negativi ($a_n \ge 0$) tale che $\sqrt[n]{a_n} \to L \in R$, allora se $L > 1$ $a_n \to +\infty$, se $L < 1$ $a_n \to 0$.

Dimostrazione: se $L > 1$ $\exists N : n \ge N$ $\sqrt[n]{a_n} > L - \varepsilon = q$ dove ε è tale che $q = L - \varepsilon > 1$ ==> $a_n > q^n$ ==> visto che $q > 1$ ==> se $n \to +\infty$ $q^n \to +\infty$

Se $0 < L < 1$ $\exists\varepsilon$ tc $p = L + \varepsilon < 1$ ==> se $n > N$ $\sqrt[n]{a_n} \le p$ ==> $a_n \le p^n$ $p < 1$ ==> se $n \to +\infty$ $p^n \to 0$.

CRITERIO DEL RAPPORTO

Sia $\{a_n\}$ una successione a termini positivi tale che $\frac{a_n+1}{a_n} \to L \in R$, allora se $L > 1$ $a_n \to +\infty$, se $0 \le L < 1$ $a_n \to 0$.

Osservo: se L = 1 il limite di successione non ci dice nulla.

Dimostrazione:

So per ipotesi che $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N$: $n > N$ $\left|\frac{a_n+1}{a_n} - L\right| < \varepsilon$ scelgo ε tale che $q = L - \varepsilon > 1$ ==> $q = L - \varepsilon < \frac{a_n+1}{a_n} < L + \varepsilon$

Se **L > 1** ==> Considero solo $\frac{a_n+1}{a_n} > q$ ==> $a_{n+1} > q \cdot a_n$ se $n \geq N$ ==> $a_{n+1} \geq q \cdot a_n \geq q\,(q \cdot a_{n-1}) \geq \cdots \geq q^{n-N} \cdot a_N$

Se $n \to +\infty$ N è fissato ==> $q^{n-N} \cdot a_N = q^n \cdot \left(\frac{a_N}{q^N}\right) \to +\infty$ ==> $a_n \to +\infty$.

Se **L < 1** ==> considero l'altra parte della disequazione ==> $\frac{a_n+1}{a_n} < L + \varepsilon = p < 1$ ==> $a_{n+1} \geq p \cdot a_n \geq p\,(p \cdot a_{n-1}) \geq \cdots \geq p^{n-N} \cdot a_N = p^n \cdot \left(\frac{a_N}{p^N}\right)$

Se $n \to +\infty$ ==> $p < 1$ ==> $p^n \cdot \left(\frac{a_N}{p^N}\right) \to 0$ ==> $a_n \to 0$.

CRITERIO DI STOLTZ - CESARO

Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ successioni tali che $a_n \geq 0$, b_n è crescente ($b_{n+1} > b_n$) e divergente ($b_n \to +\infty$). Supponendo che $\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} \to L \in R$ allora $\frac{a_n}{b_n} \to L$.

Dimostrazione:

So che $\forall \mathcal{E} > 0$ $\exists N > 0$ tc se $n > N$ $L - \mathcal{E} < \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} < L - \mathcal{E}$ ===> moltiplico e divido per ($b_{n+1} - b_n$) cosa che posso fare perché so che è positivo

moltiplico e divido per ($b_{n+1} - b_n$) cosa che posso fare perché so che è positivo ==> $(L - \mathcal{E})(b_{n+1} - b_n) < (a_{n+1} - a_n) < (L + \mathcal{E})(b_{n+1} - b_n)$ ==>

se K > N ==> $\sum_{k=N}^{K}(L - \mathcal{E})(b_{n+1} - b_n) < \sum_{k=N}^{K}(a_{n+1} - a_n) < \sum_{k=N}^{K}(L + \mathcal{E})(b_{n+1} - b_n)$

==> $(L - \mathcal{E})(b_{k+1} - b_N) < (a_{k+1} - a_N) < (L + \mathcal{E})(b_{k+1} - b_N)$

[perché $\sum_{k=N}^{K}(a_{n+1} - a_n) = (a_{N+1} - a_N) + (a_{N+2} - a_{N+1}) + \cdots + (a_{K+1} - a_K) = a_{K+1} - a_N$]

==> divido per b_{k+1} ==> $(L - \mathcal{E})\left(1 - \frac{b_N}{b_{k+1}}\right) < \left(\frac{a_{k+1}}{b_{k+1}} - \frac{a_N}{b_{k+1}}\right) < (L + \mathcal{E})\left(1 - \frac{b_N}{b_{k+1}}\right)$ ma $\frac{b_N}{b_{k+1}} \to 0$

Mando $k \to +\infty$ (lo posso fare perché K > N e il limite esiste a parire da N) e ho che $(L - \mathcal{E}) < \frac{a_{K+1}}{b_{K+1}} - \frac{a_N}{b_{K+1}} < L + \mathcal{E}$

vero $\forall \varepsilon > 0$ ==> $\lim_{k\to+\infty} \frac{a_{K+1}}{a_{K+1}} = L$.

COROLLARIO 1: Se $a_n \geq 0$ e $a_{n+1} - a_n \to L$ allora $a_n \to L$.

Dimostrazione:

Nel criterio di Stoltz - Cesaro scelgo $b_n = n$ crescente e tendente a più infinito ==> $\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \frac{a_{n+1}-a_n}{n+1-n} = a_{n+1} - a_n \to L$ $per\ Hp$ ==> so che $\frac{a_n}{b_n} = \frac{a_n}{n} \to L$.

COROLLARIO 2: Se $a_n \geq 0$ e $a_n \to L$ allora $\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n} \to L$.

Dimostrazione:

Se $A_n = \sum_{k=1}^{n} k$ e $B_n = n$ allora $\frac{A_{n+1}-A_n}{B_{n+1}-B_n} = \frac{a_n}{1} \to L$ ==> (per Stoltz - Cesaro) $\frac{A_n}{B_n} \to L$.

COROLLARIO 3: Se $a_n \to L$ allora [senza dimostrazione].

COROLLARIO 4: Se $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to L$ allora $\sqrt[n]{a_n} \to L$. [senza dimostrazione].

GERARCHIA DEGLI INFINITI

"$\log(n) \ll n^a \ll b^n$ V $e^n \ll n! \ll n^n$ " dove $a > 0$, $b > 1$ e dove "$\alpha_n \ll \beta_n \iff \frac{\alpha_n}{\beta_n} \to 0$"

Dimostrazioni:

1) Voglio dimostrare che $\alpha_n = \frac{\log(n)}{n^a}$ $\alpha_n \to 0$ ==> uso il *criterio di Stoltz - Cèsaro* ==> innanzitutto dimostro che $\frac{\log(n)}{n} \to 0$.

Infatti se chiamo $a_n = \log(n)$ e $b_n = n$ ==> $\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \frac{\log(n+1) - \log(n)}{n+1-n} = \log(n+1) - \log(n) = \log\left(n\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) - \log(n) =$

$= \log(n) + \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \log(n) = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

Assumo allora che se $A_k \to A$ allora $\log(A_k) \to \log(A)$ ==> $\log\left(1+\frac{1}{n}\right) \to \log(1) = 0$.

Osservo inoltre che: se $\frac{\log(n)}{n} \to 0$ ===> anche $\frac{\log(n)}{n^a} \to 0$ per $b > 1$ [ma in realtà anche per $0 < b < 1$].

2) Voglio dimostrare che $\alpha_n = \frac{n^a}{b^n}$ $\alpha_n \to 0$ ==> uso il *criterio del rapporto* ==> $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^a}{b^{n+1}} \cdot \frac{b^n}{n^a} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^a \cdot \frac{1}{b} \to \frac{1}{b} < 1 \Rightarrow \alpha_n \to 0$.

3) Voglio dimostrare che $\alpha_n = \frac{b^n}{n!}$ $\alpha_n \to 0$ ==> uso il *criterio del rapporto* ==> $\frac{b^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{b^n} = \frac{b}{n+1} < 1 \Rightarrow \alpha_n \to 0$.

4) Voglio dimostrare che $\alpha_n = \frac{n!}{n^n}$ $\alpha_n \to 0$ **non mi è possibile dimostrarlo per ora.**

SUCCESSIONI MONOTONE

DEFINIZIONE

- $\{a_n\}$ è una successione monotona crescente se $a_{n+1} \geq a_n$.
- $\{a_n\}$ è una successione monotona strettamente crescente se $a_{n+1} > a_n$.
- $\{a_n\}$ è una successione monotona decrescente se $a_{n+1} \leq a_n$.
- $\{a_n\}$ è una successione monotona strettamente decrescente se $a_{n+1} < a_n$.

TEOREMA

Sia $\{a_n\}$ una successione monotona allora $\{a_n\}$ ammette limite. - Se $\{a_n\}$ è crescente allora $a_n \to \sup\{a_n \mid n \in N\} = \sup\{a_n\}$
- Se $\{a_n\}$ è decrescente allora $a_n \to \inf\{a_n\}$.

Dimostrazione: Dimostro solo se $\{a_n\}$ è crescente, perché se è decrescente 1) la dimostrazione è analoga
2) se $\{a_n\}$ è decrescente ==> $b_n = -a_n$ è crescente ==> se $-a_n \to \alpha$ allora $b_n \to -\alpha$.

Caso 1: $\{a_n\}$ è limitata ==> $\exists c > 0$ tc $|a_n| \leq c$.

Sia $\sup\{a_n\} = \alpha \in R$ perché una successione $\{a_n\}$ limitata ammette maggiorante α che soddisfa: $\begin{cases} \alpha \geq a_n \ \forall n \\ \forall \mathcal{E} > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}: a_n > \alpha - \mathcal{E} \end{cases}$

Dunque $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n' \in N$ tc $\forall n > n'$ $\alpha - \varepsilon < a_n \leq \alpha < \alpha + \varepsilon$

Dove - $a_n > \alpha - \varepsilon$ è vera per n' ma allora sarà vera pure per n perché n > n' perché la successione è crescente
- $a_n \geq \alpha$ sempre vera

Caso 2: $\{a_n\}$ è illimitata ==> $a_n = +\infty$ $\sup\{a_n\} = +\infty$ ==> $\forall M > 0$ $\exists n' > 0$ tc $\forall n \geq n'$ $a_n [\geq a_{n'}] > M$

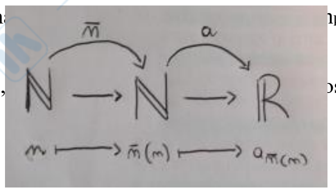
Dove $a_n \geq a_{n'}$ è vera perché a_n è crescente.

SOTTOSUCCESSIONI

DEFINIZIONE

Data una successione $\{a_n\}_n$, una sua sottosuccessione $\{b_k\}_k$ è un[…] n_k è una successione di naturali strettamente crescente [$n_{k+1} > n_k$].

Formalizzazione: Sia n: N → N crescente, se $\{a_n\}$ successione, […]osizione $a_{\bar{n}(n)}$



Osservazione: $a_n = (-1)^n$ successione limitata ma che non ammette limite MA se n = 2k ===> $a_n = (-1)^{2k} = 1$ ==> successione che converge.

TEOREMA DI BOLZANO - WEIERSTRASS

Sia $\{a_n\}$ una successione limitata, allora esiste una sua sottosuccessione convergente.

Dimostrazione:

Definisco picco di $\{a_n\}$ un naturale n tc $\forall m \geq n \quad a_m \leq a_n$ si prospettano due casi 1) Esistono infiniti picchi

2) Esiste un numero finito di picchi

Caso 1: chiamo n_1 il primo picco, n_2 il secondo, …, n_k il k-esimo picco e osservo che $a_{n1} \geq a_{n2} \ldots a_{nk} \geq a_{nk+1}$ ==> a_{nk} è *monotona decresente.*

Caso 2: Esistono $\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$ picchi. Allora se n_N è picco ma n_{N+1} ha almeno un valore più alto sopra di lui ==> se pongo $m_n = n_{N+1}$

==> $\exists m_{n+1} > m_n$ tc $a_{m_{N+1}} > a_{m_N}$ (altrimenti m_N non sarebbe picco)

Ma $m_N > n_N$ che era l'ultimo picco ==> non è possibile ==> $\exists m_{N+2} > m_{N+1}$ tc $a_{m_{N+2}} > a_{m_{N+1}}$ e continuando otterrò che a_{m_k} è (strettamente) crescente

DUNQUE sia che valga il primo o il secondo caso, ∃ una sottosuccessione di a_n **monotona**, ma allora tali sottosuccessioni ammettono limite per il teorema precedente.

Infine, tale limite è finito in quanto le sottosuccessioni sono limitate.

SUCCESSIONI DI CAUCHY

DEFINIZIONE

$\{a_n\}$ è una successione di Cauchy se $\forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists N > 0 \;\; tc \;\; se \;\; n, m > N \;\; |a_n - a_m| < \mathcal{E}.$

TEOREMA

Sia $\{a_n\}$ successione, $\exists a \in R$ tc $a_n \to a$ <==> a_n è una successione di Cauchy.

<u>Dimostrazione:</u>

[=>] uso la disuguaglianza triangolare => $|a_n - a_m| \leq |a_n - 1| + |a - a_n|$ ma entrambi i due addendi sono minori di $\mathcal{E}/2$ se n, m > N

==> $|a_n - a_m| \leq |a_n - 1| + |a - a_n| < \mathcal{E}/2 + \mathcal{E}/2 = \mathcal{E}$.

[<=] Non conosco il punto limite a, ma so che:

1) Se $\{a_n\}$ è di Cauchy ==> a_n è limitata, infatti se $\mathcal{E} = 1$ ∃N tc n > N $|a_n - a_m| < 1$. In particolare fisso che m = N +1 e ho che $a_{N+1} - 1 < a_n < a_{N+1} + 1 \quad \forall n \in N$ ==> $\{a_n\}$ è limitata per $n \geq N$ ==> $|a_n| < \max\{|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_N|, |a_{N-1}|, |a_{N+1}|\} \quad \forall n \in N$.
2) $\{a_n\}$ è limitata ==> ∃ sottosuccessione $\{a_{n_k}\}$ convergente (per Bolzano - Weierstrass) ==> $\exists a \in R$ $b_k = a_{n_k} \to a$.

<u>Conclusione:</u> so che $\forall \mathcal{E} > 0$ ∃k' tc k > k' $|a_{n_k} - a| < \mathcal{E}$ ma allora se m > k' $|a_m - a| \leq |a_m - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a|$ [dis. triangolare] MA $|a_m - a_{n_k}| < \mathcal{E}$ perché $\{a_n\}$ è di Cauchy e $|a_{n_k} - a| < \mathcal{E}$ per la definizione di limite ==> $|a_m - a| \leq |a_m - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < 2\mathcal{E}$

che è la definizione di limite. c.v.d.

IL NUMERO *e*

LEMMA: Data $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ allora a_n è crescente e $1 \leq a_n \leq 4$. $\{a_n\}$ è limitata e crescente dunque ammette limite (è convergente).

<u>Idea:</u>

1) a_n è crescente ==> $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}$
2) a_n è limitata ==> definisco una successione $b_n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = a_n\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ ==> anche b_n è crescente.
3) Conclusione: se b_n significa che $b_n \leq b_1 = 4$ ==> $b_n \geq a_n \geq 1$

DEFINIZIONE

$$e = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

COROLLARIO 1

Sia $a_n \to +\infty$ allora $e = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n}$

<u>Dimostrazione:</u>

Io so che qualunque sia a_n varrà sempre la seguente: $\lfloor a_n \rfloor \leq a_n \leq \lfloor a_n \rfloor + 1$ ma questo significa che $\frac{1}{a_n} \leq \frac{1}{\lfloor a_n \rfloor}$ quindi

$$b_n = \left(1+\frac{1}{\lfloor a_n\rfloor+1}\right)^{\lfloor a_n\rfloor} \leq \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \leq \left(1+\frac{1}{\lfloor a_n\rfloor}\right)^{\lfloor a_n\rfloor+1} = c_n$$

Nel lato sinistro ho che $b_n = \frac{\left(1+\frac{1}{\lfloor a_n\rfloor+1}\right)^{\lfloor a_n\rfloor+1}}{\left(1+\frac{1}{\lfloor a_n\rfloor+1}\right)} \to e$ perché il numeratore tende a e e il denominatore tende a 1 e la stessa cosa succede a destra

==> per il teorema dei carabinieri posso dire che $\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \to e.$

COROLLARIO 2

Se $a_n \to +\infty$ allora $\left(1-\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \to \frac{1}{e}$

Dimostrazione:

Se io scrivo $\left(1+\frac{1}{-a_n}\right)^{-a_n-1}$ so che $\left(1+\frac{1}{-a_n}\right)^{-a_n} \to e$ quindi $\left(1+\frac{1}{-a_n}\right)^{-a_n-1} \to \frac{1}{e}.$

LEMMA

Sia $a_n \to a$, $a \in R$ allora $\forall\{a_{n_k}\}$ sottosuccessione $a_{n_k} \to a$

Dimostrazione:

Per definizione di limite so che $\forall\mathcal{E}>0$ $\exists N$ se $n>N$ $\Rightarrow$ $|a_n - a| < \mathcal{E}$ osservo inoltre che $\forall k \in N$ $n_k \geq k$.

Infatti $n > 0$ se $n_k \geq k$ ==> $n_{k+1} \geq n_k \geq k$ ==> $n_{k+1} \geq k+1$ ==> $n_k \geq k$ $\forall k$ grazie al principio di induzione.

Dunque $\forall\mathcal{E}>0$ $\exists N>0$ se $(n_k \geq)\, k \geq N$ $\Rightarrow$ $n_k \geq N$ $\Rightarrow$ $|a_{n_k} - a| < \mathcal{E}.$

GERARCHIA DEGLI INFINITI

Con questi nuovi strumenti mi è possibile dimostrare il punto 4 della gerarchia degli infiniti: $\alpha_n = \frac{n!}{n^n}$ $\alpha_n \to 0$ $oppure$ $\alpha_n = \frac{n^n}{n!}$ $\alpha_n \to +\infty.$

Dimostrazione:

Uso il criterio del rapporto: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e > 1$

NOTAZIONE UTILE E PROPRIETA'

Date a_n e b_n successione si può scrivere che $a_n \sim b_n$ se $\frac{a_n}{b_n} \to 1.$

Osservazione: se $a_n \to a \in R$ allora $a_n \sim a.$

LEMMA

$a_n \sim \alpha_n \iff a_n = \alpha_n(1+\delta_n) \quad \exists\delta_n \to 0.$

Dimostrazione:

(<=) se $a_n = \alpha_n(1+\delta_n)$ allora $\frac{a_n}{\alpha_n} = (1+\delta_n) \to 1+0=1$

(=>) se $a_n \sim \alpha_n$ allora $\frac{a_n}{\alpha_n} = (1+\delta_n) \to 1+0=1$ cosa che posso fare sempre a patto di scegliere $\delta_n = \frac{a_n}{\alpha_n} - 1 \to 0.$

PROPOSIZIONE

Date $a_n \sim \alpha_n$ $b_n \sim \beta_n$

1) $a_n \pm b_n \sim \alpha_n \pm \beta_n$
2) $a_n \cdot b_n \sim \alpha_n \cdot \beta_n$
3) $a_n : b_n \sim \alpha_n : \beta_n$

Dimostrazione:

1) $a_n = \alpha_n(1+\delta_n)$ $b_n = \beta_n(1+\varepsilon_n)$ δ_n , $\varepsilon_n \to 0$ ==> $a_n + b_n = \alpha_n + \beta_n + [\alpha_n\delta_n + \beta_n\varepsilon_n] = (\alpha_n+\beta_n)(1+\gamma_n)$ $\gamma_n \to 0$

se divido tutto per $\alpha_n + \beta_n$ ==> $\frac{a_n+b_n}{\alpha_n+\beta_n} = 1 + \left[\frac{\alpha_n}{\alpha_n+\beta_n}\right]\delta_n + \left[\frac{\beta_n}{\alpha_n+\beta_n}\right]\varepsilon_n$ $\left[\frac{\alpha_n}{\alpha_n+\beta_n}\right], \left[\frac{\beta_n}{\alpha_n+\beta_n}\right] \leq 1$ δ_n , $\varepsilon_n \to 0.$

2) $a_n \cdot b_n = \alpha_n(1+\delta_n) \cdot \beta_n(1+\varepsilon_n) = \alpha_n \cdot \beta_n \cdot (1+\delta_n+\varepsilon_n+\delta_n\varepsilon_n)$ ma $\delta_n + \varepsilon_n + \delta_n\varepsilon_n$ $lo\ posso\ chiamare\ \gamma_n$ c.v.d.

<u>Osservazione:</u>

$n \sim n + \sqrt{n}$ vale perché posso scrivere $n = \left(1 + \frac{\sqrt{n}}{n}\right)$

però non vale $e^{n+\sqrt{n}} \sim e^{n}$ infatti $\frac{e^{n+\sqrt{n}}}{e^{n}} = \frac{e^{n} \cdot e^{\sqrt{n}}}{e^{n}} = e^{\sqrt{n}} \to +\infty.$