

## Introduzione Strumenti

domenica 27 settembre 2020 17:43

### LE DIMOSTRAZIONI

Una qualsiasi implicazione  $[A \Rightarrow B]$ , che sia teorema, proposizione, lemma, corollario, può essere dimostrata in diversi modi:

- **Induttivamente**: che consiste nello "spezzettare" la dimostrazione in tante affermazioni evidenti.
- **Contronominale**: data un'implicazione  $A \Rightarrow B$  [1] la negazione della tesi implica la negazione dell'ipotesi  $\neg B \Rightarrow \neg A$  [2]. Per la definizione di implicazione, [2] equivale  $\neg(\neg B) \vee \neg A$  e quindi  $B \vee \neg A \Leftrightarrow \neg A \vee B$  [3]. Ma [3] per la stessa definizione di implicazione equivale a [1].

Esempio: "Se  $n \in \mathbb{N}$  tale che  $n^2$  pari allora anche  $n$  è pari."

$$n^2 \text{ pari } [A] \Rightarrow n \text{ pari } [B]$$

Come dimostrato sopra, se  $A \Rightarrow B$  allora  $\neg B \Rightarrow \neg A$ , ovvero se " $n$  è dispari  $\Rightarrow n^2$  dispari".

$n$  dispari  $\Leftrightarrow n = 2k+1$  (con  $k \in \mathbb{N}$ ). Quindi  $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2+k) + 1$  che è sicuramente dispari.

- **Per assurdo**: data l'implicazione " $A \Rightarrow B$ " vera si suppongono le ipotesi vere e la tesi falsa [" $\neg B$  e  $A$ " falsa], si innesca così un ragionamento che porta alla negazione delle ipotesi stesse, dimostrando come la prima proposizione fosse vera.  $\neg(\neg B \wedge A) \text{ vera} \Leftrightarrow \neg(\neg B) \vee \neg A \text{ vera} \Leftrightarrow (B \vee \neg A) \text{ vera} \Leftrightarrow A \Rightarrow B \text{ vera}$ .

Esempio: "Sia  $a \geq 0$ ,  $a \in \mathbb{R}$  tale che  $\forall \varepsilon > 0$   $a < \varepsilon$  [Hp], allora  $a = 0$  [ts]."

Per assurdo suppongo che valgano Hp e  $\neg$ ts, per cui  $a > 0$ . Allora se pongo  $\varepsilon = a/2 > 0$  e allo stesso tempo  $a < \varepsilon = a/2 \Leftrightarrow a < a/2$   
 $\Leftrightarrow 1 < 1/2$  che è impossibile.

### GENERALITA' SUGLI INSIEMI

**DEFINIZIONE**: è una collezione di elementi.

**NOTAZIONE**:

- Estensiva, ovvero per elencazione:  $A = \{ 1; 34; 89; \dots \}$
- Intensiva:  $A = \{ x \in X \mid x \text{ hanno una determinata proprietà} \}$

### OPERAZIONI FRA INSIEMI

- $A \subset B \rightarrow A$  sottoinsieme di  $B$
- $A = B$  se  $A \subset B$  e  $B \subset A$
- $A \cap B = \{ x \in X \mid x \in A \text{ e } x \in B \}$
- $A \cup B = \{ x \in X \mid x \in A \text{ o } x \in B \}$
- $A \setminus B = \{ x \in X \mid x \in A \text{ e } x \notin B \}$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \rightarrow$  distributività dell'Unione

### NUMERI NATURALI

$$\mathbb{N} = \{ 0; 1; 2; \dots \}$$

**Postulato**:  $A \in \mathbb{N}$  allora  $A$  ammette minimo, ovvero un numero minore di tutti gli altri numeri  $C \in A$ .

**Proprietà**: 1) I naturali non hanno massimo  $\rightarrow$  a ogni numero esiste un successivo.

2) Sono "chiusi" per somma e prodotto:  $a+b \in \mathbb{N}$  così come  $a \cdot b \in \mathbb{N}$ .

### NUMERI INTERI

$$\mathbb{Z} = \{ -1; 0; 1; \dots \}$$

**Proprietà**: Sono "chiusi" per somma, prodotto e differenza:  $a+b \in \mathbb{Z}$ ,  $a \cdot b \in \mathbb{Z}$ ,  $a-b \in \mathbb{Z}$ .

### NUMERI RAZIONALI

$$\mathbb{Q} = \{ p/q \mid p \in \mathbb{Z} \text{ e } q \neq 0 \}$$

**LEMMA**: non esiste soluzione razionale all'equazione  $x^2 = 2$ .

**Dimostrazione**: per assurdo poniamo  $x = p/q \in \mathbb{Q}$  tale che  $x^2 = 2 \Rightarrow p^2/q^2 = 2$  [supponendo che  $p$  e  $q$  non abbiano divisori comuni]  $\Leftrightarrow p^2 = 2q^2$  che equivale a dire che  $p^2$  è pari, e quindi di conseguenza anche  $p$  sarà pari [ $p = 2k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ]  $\Leftrightarrow (2k)^2 = 2q^2 \Leftrightarrow 4k^2 = 2q^2 \Leftrightarrow$

$q^2 = 2k^2$  che è pari. MA NOI AVEVAMO SUPPOSTO CHE  $p$  E  $q$  NON DOVESSERO AVERE DIVISORI COMUNI  $\implies$  NON POSSONO ESSERE ENTRAMBI PARI.

## NUMERI REALI

**DEFINIZIONE ASSIOMATICA:** sia  $X$  un insieme munito di due operazioni, somma e prodotto e di una relazione  $\leq$  tale che:

1. La somma sia associativa:  $(a + b) + c = a + (b + c)$
2. La somma sia commutativa:  $a + b = b + a$
3. Si possa applicare la proprietà distributiva:  $a(b + c) = ab + ac$
4. Esistano elementi neutri in somma e prodotto:  
 $\exists 0 \in X \text{ t.c. } a + 0 = 0 + a = a$   
 $\exists 1 \in X \text{ t.c. } a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
5. Esista l'opposto nella somma t.c.  $\forall a \in X \exists b \in X \quad a + b = b + a = 0$
6. Esista l'opposto nel prodotto t.c.  $\forall a \in X \exists b \in X \quad a \cdot b = b \cdot a = 1$
7.  $\forall a, b \in X \quad a \leq b \quad \vee \quad b \leq a$
8. Se  $a \leq b \quad \wedge \quad b \leq a \implies b = a$
9.  $a \leq b \implies \forall c \in X \quad a + c \leq b + c$
10.  $0 \leq a \quad \wedge \quad 0 \leq b \implies 0 \leq a \cdot b$

### 11. ASSIOMA DI COMPLETEZZA:

Siano  $A$  e  $B$  sottoinsiemi di  $X$  t.c.  $\forall a \in A \quad \forall b \in B, \quad a \leq b$  allora esiste un  $c \in X$  t.c.  $\forall a \in A \quad a \leq c$  e  $\forall b \in B \quad c \leq b$

**COPPIA DI DEDEKIND:** è una coppia che gode delle proprietà dell'assioma di completezza e l'elemento  $c$  che separa la coppia si chiama **elemento separatore**.

**LEMMA:** Siano  $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid \forall x \geq 0 \quad x^2 < 2\}$  e  $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid \forall x \geq 0 \quad x^2 \geq 2\}$  allora non esiste un numero  $c \in \mathbb{Q}$  t.c.  $\forall a \in A \quad c \leq a$  e  $\forall b \in B \quad c \leq b$ .

Dimostrazione per assurdo: supponiamo dunque che esista un tale  $c \implies$  se esiste tale  $c$  deve appartenere o ad  $A$  o a  $B \implies$  noi consideriamo il caso  $c \in A$ . Consideriamo dunque un  $n \in \mathbb{N}$  t.c.  $c' = c + 1/n \in A$  MA se tale  $n$  esiste  $c' \in A$  e  $c' > c$  per cui non è vero che  $c \geq a \quad \forall a \in A$  (Hp).

Troviamo allora  $n$ :  $(c + 1/n)^2 < 2$  che è vero se e solo se  $c^2 + 1/n^2 + 2c/n < 2$  osservo dunque che:  $1/n^2 \leq 1/n \implies$  sostituisco  $1/n$  a  $1/n^2 \implies$

$$c^2 + (2c + 1)/n < 2 \quad \text{sse} \quad (2c + 1)/n < 2 - c^2 \quad 2 - c^2 > 0 \quad \text{sse} \quad \frac{2c+1}{2-c^2} \leq n \quad \text{ma tale } n \text{ non può esistere perché } n \text{ non hanno massimo.} \quad \text{c.v.d.}$$

## ESTREMI

**DEFINIZIONE:** dato un insieme  $A$  contenuto in  $\mathbb{R}$

1.  $A$  è **superiormente limitato** se esiste  $\alpha \in \mathbb{R}$  t.c.  $\alpha \geq a \quad \forall a \in A$  t.c.  $\alpha$  si chiama **maggiorante** di  $A$ .
2.  $A$  è **inferiormente limitato** se  $\alpha \in \mathbb{R}$  t.c.  $\alpha \leq a \quad \forall a \in A$  t.c.  $\alpha$  si chiama **minorante** di  $A$ .
3.  $A$  è **limitato** se è tale sia inferiormente sia superiormente.

Gli estremi superiori e inferiori possono essere anche maggioranti, minoranti e minimi.

### TEOREMA DI ESISTENZA DI SUP E INF:

- a) sia  $A$  un insieme contenuto in  $\mathbb{R}$  superiormente limitato, allora esiste in  $\mathbb{R}$  il minimo (l'elemento più piccolo) dell'insieme dei maggioranti. Tale elemento si definisce **sup** $A$ , caratterizzato da

$$\alpha = \sup A \iff \begin{cases} \forall a \in A & \alpha \geq a \\ \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A \text{ t.c.} & -\varepsilon + \alpha \leq a \end{cases}$$

- a) sia  $A$  un insieme contenuto in  $\mathbb{R}$  inferiormente limitato, allora esiste in  $\mathbb{R}$  il massimo (l'elemento più grande) dell'insieme dei minoranti. Tale elemento si definisce **inf** $A$ , caratterizzato da

$$\beta = \inf A \iff \begin{cases} \forall a \in A & \beta \leq a \\ \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A \text{ t.c.} & \beta \geq a - \varepsilon \end{cases}$$

Dimostrazione: suppongo di avere  $A \subset \mathbb{R}$ , superiormente limitato  $\implies \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha \text{ è maggiorante di } A\}$

$$x \in M(A) \quad | \quad M(A) \neq \emptyset$$

Scopo: dimostrare che  $\exists c \in \mathbb{R} : c \leq n \quad \forall m \in M(A)$

Considero:  $A = \mathbb{R} / M(A) \quad | \quad$  la coppia  $(A, M(A))$  è una coppia di Dedekind. Se  $a \in A$  e  $b \in M(A) \quad a \leq b$ , dunque per l'assioma di completezza:

- 1)  $\exists c : c \geq a \quad \forall a \in A$  MAGGIORANTE

2)  $c \in b \quad \forall b \in M(A)$  MINORANTE

**ASSIOMA DI COMPLETEZZA DELL'ESISTENZA DEL SUP:** Se  $A$  è limitato superiormente  $\forall a \in A \quad a \geq a$ ; sia  $\alpha = \sup A$  1)  $\Leftrightarrow \forall a \in A \quad a \geq a \quad \forall \epsilon > 0 \exists \alpha < \epsilon$  2)

**Dimostrazione:** ( $\Rightarrow$ ) 1)  $\alpha$  è un maggiorante  $\Rightarrow$  questo deriva dalla definizione stessa di maggiorante.

1) Per assurdo suppongo che  $\exists \epsilon_0 > 0 \quad \forall a \in A \quad a - \epsilon_0 > a \Rightarrow a - \epsilon_0$  è maggiorante  $\Rightarrow a - \epsilon_0 < \alpha$  MA CIO' E' IMPOSSIBILE PERCHE' PER  $H_p \alpha$  ERA IL MINORE DEI MAGGIORANTI.

( $\Leftarrow$ ) "Se  $\alpha \in \mathbb{R}$  che soddisfa 1) e 2) allora  $\alpha = \sup A$ ."

1) Mi dice subito che  $\alpha$  è maggiorante; se non fosse il più piccolo  $\exists \beta < \alpha$  maggiorante, ma  $\beta = \alpha - \epsilon$ .

2)  $\exists a \in A \quad a > \alpha - \epsilon = \beta \Rightarrow \beta$  non è maggiorante.

## INTERVALLI

**DEFINIZIONE:** Sia  $I$  contenuto in  $\mathbb{R}$ , diremo che  $I$  è un intervallo se  $\forall x, y \in I$  con  $x < y, \forall a \in \mathbb{R} \quad x < a < y, a \in I$  [intervallo = sottoinsieme connesso].

**Esempi:**

1)  $I = \{ x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1 \} \Rightarrow$  è un intervallo perché  $\forall a \quad 0 < a < 1$  essa appartiene  $\mathbb{R} \Rightarrow$  **I continuo.**

2)  $I = \mathbb{Z} \Rightarrow$  non è un intervallo perché per esempio se  $a = \pi$  non appartiene a  $\mathbb{Z} \Rightarrow$  **I non è continuo.**

## CLASSIFICAZIONE DEGLI INTERVALLI

1) **Intervallo aperto:**  $a < x < b \Rightarrow (a, b)$  oppure  $]a, b[$

2) **Intervallo aperto a destra:**  $a \leq x < b \Rightarrow [a, b)$  oppure  $]a, b[$

3) **Intervallo aperto:**  $x \geq a \Rightarrow [a, +\infty)$  oppure  $]a, +\infty[$

4) **Intervallo aperto a sinistra:**  $x < a \Rightarrow ]-\infty, a[$  oppure  $(-\infty, a]$

5) **Intervallo chiuso:**  $a \leq x \leq b \Rightarrow [a, b]$

## PRINCIPIO DI INDUZIONE

**IDEA:**  $P_1$  sono proposizioni tali che  $P_1$  è vera  $P_1 \Rightarrow P_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow P_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ , allora  $P_n$  è vera sempre.

**PROPOSIZIONE:** Se  $P_n$  sono proposizioni  $n \in \mathbb{N}$  tali che 1)  $P_1$  è vera  
2)  $P_n \Rightarrow P_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \mid$  allora  $P_n$  è vera  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

**Dimostrazione:** sia  $S = \{ n \in \mathbb{N} \mid P_n \text{ falsa} \} \Rightarrow S = \emptyset$  oppure  $S \neq \emptyset$

$S = \emptyset$ : significa che non esistono  $P_n$  false  $\Rightarrow$  è già dimostrato

$S \neq \emptyset \Rightarrow$  essendo  $S$  un sottoinsieme dei Naturali  $\Rightarrow$  ci deve necessariamente essere un minimo. Se  $n$  è il minimo di  $S \Rightarrow n > 1$ . Osservo che  $P_{n-1}$  è vera  $\Rightarrow P_{n-1+1} = P_n$  vera, MA  $P_n$  ERA FALSA PER  $H_p$  QUINDI ASSURDO!

c.v.d.

**Osservazioni a posteriori:** la dimostrazione può essere generalizzata dicendo che se 1)  $P_k$  è vera e 2)  $P_k \Rightarrow P_{k+1} \quad \forall k \in \mathbb{K}$ .

**SOMMATORIA E PRODUTTORIA:** Se  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  allora

**Sommatoria:**  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$

**Produttoria:**  $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = \prod_{k=1}^n a_k$

**SOMMATORIA TEOREMA 1:**  $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$

**Dimostrazione:** uso dunque il principio di induzione tale che  $P_1: \sum_{k=1}^1 k = 1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1$

Se  $P_n$  è vera  $\Rightarrow P_{n+1}$  è vera  $\mid \sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^n k + (n+1)$

Per  $H_p$  induttiva  $\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)+2n+2}{2} = \frac{n^2+3n+2}{2}$  che deve essere uguale a  $P_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{n^2+3n+2}{2}$

MA ROSA E AZZURRO SONO EFFETTIVAMENTE UGUALI.

c.v.d.

**SOMMATORIA TEOREMA 2:**  $q \in \mathbb{R} - \{1\} \implies \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

### DISUGUAGLIANZA DI BERNOULLI

Sia  $x \geq -1$ , allora  $(1+x)^n \leq 1 + nx \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

Dimostrazione:  $(P_0)$  è vera perché  $(1+x)^0 \geq 1 + 0x \implies 1 \geq 1$  che è vera

$P_n$  la considero vera per ipotesi  $\implies$  devo allora dimostrare che  $P_n \implies P_{n+1}$

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n (1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1 + x + nx + nx^2 \geq 1 + (n+1)x.$$

### BINOMIO DI NEWTON

Considero  $a, b$  due numeri reali e  $n$  un numero naturale tali che  $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

Esempi:  $(a+b)^0 = 1 \quad (a+b)^1 = a+b \quad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Idea: moltiplico  $(a+b)$  per se stesso  $n$  volte  $\implies (a+b)(a+b) \dots (a+b) = a^n + n \cdot a^{n-1}b + \dots + (a^k b^{n-k}) + b^n$

Dove  $*$  è uguale a  $\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} = \text{binomio di Newton}$ .

### FUNZIONI

**DEFINIZIONE:** Dati due insiemi  $A$  e  $B$ , si chiama funzione una coppia costituita da un sottoinsieme  $A'$  di  $A$  ed una legge che  $\forall a \in A'$  associa **uno e uno solo** elemento di  $B$ .

Esempio:  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (funzione descritta dall'insieme di partenza  $\mathbb{R}$  all'insieme finale  $\mathbb{R}$ )

$$x \mapsto x^2$$

### DEFINIZIONI VARIE:

1. L'insieme su cui  $f$  è definita viene detto **dominio** di  $f$ .

2. L'insieme di "arrivo" è il **codominio**.

3. L'immagine di  $f$  è l'insieme  $tc$

$$f: A \rightarrow B \quad Im(f) = \{ b \in B \mid \exists a \in A \text{ tc } f(a) = b \}$$

4. La retro immagine di un insieme  $B' \subset B$  è

$$f^{-1}(B') = \{ a \in A \mid f(a) \in B' \}$$

5. Una funzione si dice **iniettiva** quando

$$f: A \rightarrow B \quad \forall a_1, a_2 \in A \text{ se } a_1 \neq a_2 \implies f(a_1) \neq f(a_2)$$

6. Una funzione si dice **suriettiva** quando l'immagine della funzione corrisponde all'intero codominio, ovvero a tutto  $B$

$$\text{Se } Im(f) = B$$

$$\text{Ma anche se } \forall b \in B, \exists a \in A \text{ tc } f(a) = b$$

7. Una funzione si dice **biettiva** o **biunivoca** se è sia suriettiva che iniettiva.

8. Se la funzione è biettiva, allora è invertibile.

$$\text{Data } f: A \rightarrow B, \text{ si dice che } g: B \rightarrow A \text{ è l'inversa di } f \text{ se } f(g(b)) = b \quad \forall b \in B \text{ e } g(f(a)) = a \quad \forall a \in A.$$

9. **FUNZIONI COMPOSTE**  $A \rightarrow B \rightarrow C$

$$f: A \rightarrow B \quad | \quad g: B \rightarrow C$$

$$h = g \circ f \text{ la funzione composizione di } f \text{ e } g \implies h(x) = g(f(x)) \text{ dove } h(x) \text{ è un elemento di } C.$$

### FUNZIONI REALI

Le funzioni reali sono funzioni definite su  $\mathbb{R}$  con valori in  $\mathbb{R} \implies f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

### PROPRIETA' DI BASE

1. Grafico di  $f = G(f) = \{ (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = f(x) \}$

2. **Parità**  $f$  si definisce pari se  $f(x) = f(-x)$  e il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse  $y$ .

Esempio:  $f(x) = x^{2k}$   $k \in \mathbb{N}$

3. **Disparità**  $f$  si dice dispari se  $f(-x) = -f(x)$  e il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine.  $\hat{U}$

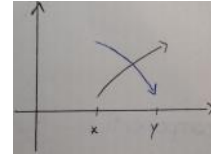
Esempio:  $f(x) = x^{2k+1}$   $k \in \mathbb{N}$

4. **Periodicità**  $f$  si dice periodica, di periodo  $T$ , se  $\exists T > 0$  tale che  $f(x) = f(x + T) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ .

5. **Monotonia**  $f$  si dice monotona crescente se  $\forall x, y \in \mathbb{R}$  con  $y \geq x \quad f(y) \geq f(x)$   
 $f$  si dice monotona decrescente se  $\forall x, y \in \mathbb{R}$  con  $y \geq x \quad f(y) \leq f(x)$

Esempi:  $f(x) = 1$  è sia crescente che decrescente.

$f(x) = x$  è strettamente crescente.



**TEOREMA SULLA MONOTONIA**

Sia  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  strettamente monotona (per esempio crescente) allora  $f$  è **invertibile**, ossia  $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $f^{-1}(f(x)) = x$  e che la  $f^{-1}$  ha la stessa monotonia di  $f$ .

Dimostrazione:

- 1) Se  $f$  è strettamente crescente  $\Rightarrow$  è sicuramente iniettiva, infatti se  $x_1 \neq x_2$  oppure  $y > x$  oppure  $y < x$ . Se  $x_2 > x_1$  allora  $f(x_2) > f(x_1) \Rightarrow f(y) \neq f(x)$ .  
 Inoltre se considero come codominio l'immagine di  $f \Rightarrow f$  è suriettiva per definizione, quindi  $f: \mathbb{R} \rightarrow \text{Im}(f)$  è **biiettiva**, dunque **invertibile**.
- 2) Se  $f$  è strettamente crescente, allora lo è anche  $f^{-1} \Rightarrow$  siano  $x < y$ , se per assurdo  $f^{-1}(x) > f^{-1}(y) \Rightarrow$  visto che  $f(a) = x$  e che  $f(b) = y$  (per suriettività) ottengo che  $a = f^{-1}(f(a)) = f^{-1}(x) \geq f^{-1}(y) = f^{-1}(f(b)) = b > a$  perché  $f$  è crescente; **MA SIGNIFICHEREBBE CHE  $a > a$  CHE E' UN ASSURDO.**  
 c.v.d.

Red Alert! Se  $f$  è strettamente monotona crescente allora è invertibile **MA NON E' VERO IL CONTRARIO.**

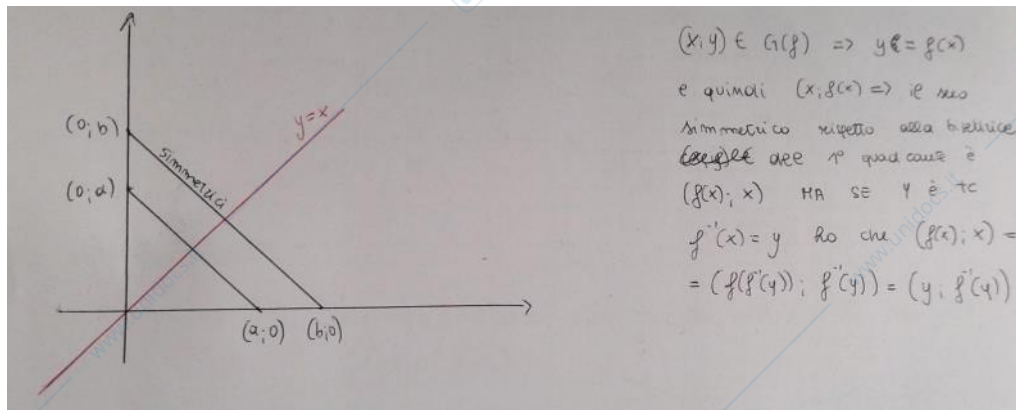
**GRAFICO DELL'INVERSA**

Quasi sempre data una funzione invertibile è molto difficile esplicitarne l'inversa, però posso facilmente disegnare il grafico di  $f^{-1}$  se conosco già il grafico di  $f$ .

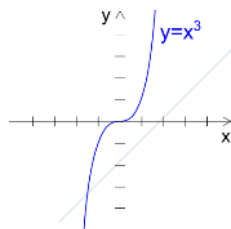
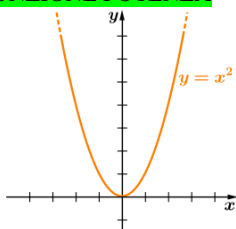
Esempio facile:  $f(x) = 2x + 1 \quad f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2} \Rightarrow 2f^{-1}(x) + 1 = x \Leftrightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$

Esempio difficile:  $f(x) = x + e^x \Rightarrow$  disegna il grafico di  $f(x)$  e poi quello di  $f^{-1}(x)$

"Dimostrazione":



**FUNZIONE POTENZA**



$f(x) = x^n \quad n \in \mathbb{N}$

Dalla funzione con potenza intera è possibile passare alla funzione con potenza razionale in due step

- 1) Definisco l'inversa della funzione potenza intera  $:= f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{n}}$ . Bisogna però fare attenzione perché se  $n$  è **dispari** allora la funzione è **invertibile** visto che sono monotone, se  $n$  è **pari non è invertibile**, perché per diversi valori di  $x$  (esempio 1 e -1) ottengo lo stesso valore in  $y$  (1)  $\Rightarrow$  le funzioni a potenza pari non sono iniettive. La funzione pari, e in particolare  $y = x^2$ , diventa invertibile se considero valori di  $x \geq 0$  perché lì è monotona.

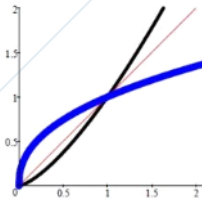
2) Componendo ho che se  $a = m/n \in \mathbb{Q}$   $f(x) = x^{\frac{m}{n}} = (x^m)^{\frac{1}{n}} = (x^{\frac{1}{n}})^m$

**DEFINIZIONE:** per  $a \in \mathbb{R}$   $f(x) = x^a$  [ := sup degli  $n/m$  razionali tali che  $m/n < a$  di  $x^{\frac{m}{n}}$  ]

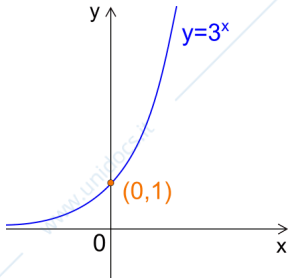
Domínio: solo per  $x \geq 0$

Linea sottile nera:  $a > 1$

Linea spessa blu:  $a < 1$



**FUNZIONE ESPONENZIALE**



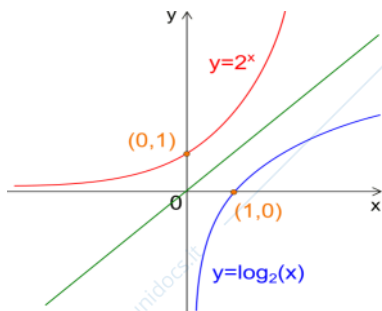
$a > 1 \quad f(x) = a^x$

Proprietà:  $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$

$(e^x)^y = e^{xy}$

Essendo una funzione monotona crescente esiste la sua funzione inversa che si chiama logaritmo in base a:  $\log_a$ .

**FUNZIONE LOGARITMICA**



$A^{\log_a x} = x = \log_a(A^x)$

Esiste un numero usato convenzionalmente come base del logaritmo che si chiama **numero di Nepero** indicato con la  $e$ .

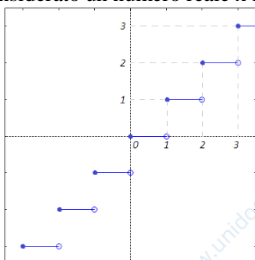
Proprietà:  $\log(a \cdot b) = \log a + \log b$

$\log(a)^b = b \cdot \log a$

$e^{\log(ab)} = ab$

**PARTE INTERA (INFERIORE)**

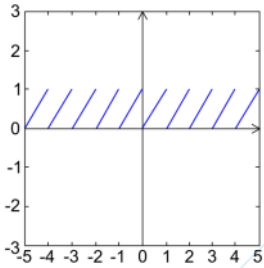
Considerato un numero reale  $x$  la sua parte intera inferiore è il massimo degli interi più vicini a  $x$ :



$f(x) = \lfloor x \rfloor := \max\{ n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x \}$

**PARTE FRAZIONARIA**

E' data da x meno la sua parte intera:



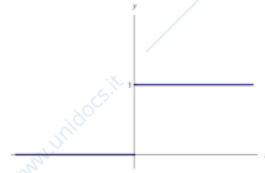
$$f(x) = \{x\} = x - \lfloor x \rfloor$$

È una funzione periodica di periodo 1.

**FUNZIONI DEFINITE A TRATTI**

Si definisce tramite intervalli.

Esempio: funzione di Heaviside  $\implies H(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$



(per le funzioni trigonometriche vedi scan di appunti a mano)

**FUNZIONI IPERBOLICHE**

- 1) **Seno iperbolico:**  $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
- 2) **Coseno iperbolico:**  $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
- 3) **Tangente iperbolica:**  $tgh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$

Il valore assoluto è una **distanza**.

Relazione Fondamentale:  $\cosh^2(x) = 1 + \sinh^2(x)$

**FUNZIONE VALORE ASSOLUTO**



$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

**LEMMA:** Se  $r > 0$  allora  $|x| < r \iff -r < x < r$

Dimostrazione: ( $\implies$ ) se  $|x| < r$  allora o 1)  $x \geq 0 \implies -r < x = |x| < r \implies -r < x < r$   
 2)  $x < 0 \implies r > |x| = -x > -r \implies -r < -x < r \implies$  invertendo ho  $-r < x < r$   
 ( $\impliedby$ ) se  $-r < x < r$  allora o 1)  $x \geq 0 \implies |x| = x < r \implies |x| < r$   
 2)  $x < 0 \implies r > -x = |x| \implies |x| < r$

**PROPOSIZIONE 1:**  $|x| \geq 0$  dove  $|x| = 0$  sse  $x = 0$ .

**PROPOSIZIONE 2:**  $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

**Dimostrazione:** se  $x > 0$  e  $y > 0$   $x \cdot y = |x \cdot y|$  MA  $x \cdot y = |x| \cdot |y|$  QUINDI  $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

se  $x < 0$  e  $y < 0$   $|x| \cdot |y| = (-x) \cdot (-y) = xy$  MA  $xy = |x \cdot y|$  QUINDI  $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

se  $x > 0$  e  $y < 0$   $|x| \cdot |y| = x \cdot y$  MA  $|x \cdot (-y)| = |-xy| = x \cdot y$  QUINDI  $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

se  $x < 0$  e  $y > 0$   $|x| \cdot |y| = x \cdot y$  MA  $|-x \cdot y| = |-xy| = x \cdot y$  QUINDI  $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

**PROPOSIZIONE 3 O DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE:**  $|x + y| \leq |x| + |y|$

**Dimostrazione:**  $x \leq |x|$   $y \leq |y|$

Per il lemma sopra:  $-|x| \leq x \leq |x|$  e  $-|y| \leq y \leq |y|$

Sommando i due ottengo:  $-(|x| + |y|) \leq x + y \leq (|x| + |y|) \implies$  è esattamente ciò che diceva il lemma sopra  $\implies$

Se un certo oggetto è compreso tra due altri allora il valore assoluto dell'oggetto è minore dell'altro positivo  $\implies |x + y| \leq |x| + |y|$ .