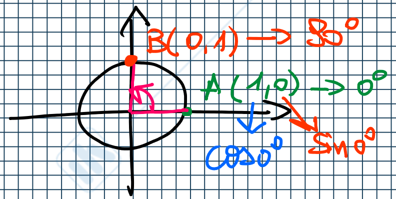
(6) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1-\cos\left(\frac{1}{x+1}\right)}{2x\sin\left(\frac{1}{4x^3+1}\right)}$ $\quad \frac{0}{0}$

$\frac{\text{numero}}{\pm\infty} \to 0$



$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\downarrow$

$\lim_{x\to x_0} \frac{\sin(f(x))}{f(x)} = 1$

a patto che

$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$

cioè $f(x)$ è un infinitesimo per $x\to x_0$

$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

$\downarrow$

$\lim_{x\to x_0} \frac{1-\cos(f(x))}{[f(x)]^2} = \frac{1}{2}$

a patto che

$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x+1} = 0$ ✓ $\quad \frac{1}{2}$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{4x^3+1} = 0$ ✓

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{1-\cos\left(\frac{1}{x+1}\right)}{\left(\frac{1}{x+1}\right)^2}\cdot\left(\frac{1}{x+1}\right)^2}{2x\cdot\dfrac{\sin\left(\frac{1}{4x^3+1}\right)}{\frac{1}{4x^3+1}}\cdot\frac{1}{4x^3+1}} =$$

$\to 1$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{1-\cos\left(\frac{1}{x+1}\right)}{\left(\frac{1}{x+1}\right)^2}}{\dfrac{\sin\left(\frac{1}{4x^3+1}\right)}{\frac{1}{4x^3+1}}}\cdot\frac{\frac{1}{(x+1)^2}}{\frac{2x}{4x^3+1}} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1-\cos\left(\frac{1}{x+1}\right)}{\left(\frac{1}{x+1}\right)^2}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}\cdot\frac{4x^3+1}{2x}$$

$(x+1)^2$: $x \to A$, $1 \to B$

$(A+B)^2 = A^2+2AB+B^2$

$$\frac{\left(\frac{1}{x+1}\right)}{\frac{\sin\left(\frac{1}{4x^3+1}\right)}{\frac{1}{4x^3+1}}}$$

$(\ \ )$ → A, B

$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

$$\lim_{x\to+\infty} \ // \ \frac{4x^3+1}{2x\cdot(x^2+1+2x)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1-\cos\left(\frac{1}{x+1}\right)}{\left(\frac{1}{x+1}\right)^2} \to \frac{1}{2}}{\frac{\sin\left(\frac{1}{4x^3+1}\right)}{\frac{1}{4x^3+1}} \to 1} \cdot \frac{4x^3+1}{2x^3+2x+4x^2} \to \frac{4}{2} = 2$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{1}\cdot 2 = \frac{1}{\cancel{2}_1}\cdot\cancel{2}^1 = 1$$

$$\int \sin x \cdot \ln(\cos x + 1)\,dx$$

INTEGRAZIONE PER PARTI

$\int \underbrace{f(x)}_{\text{funzione integranda}}\,dx$ INTEGRALE INDEFINITO → famiglia di PRIMITIVE di $f(x)$ cioè tutte quelle funzioni la cui derivata è proprio $f(x)$

$g(x)$ si dice primitiva di $f(x)$ se $g'(x) = f(x)\ \forall x \in D_f$

$\int f(x)\,dx = \{ g(x) + c,\ c \in \mathbb{R} \}$ due primitive della stessa funzione differiscono per una costante

$$\int \sin(x) \cdot \ln(\cos x + 1)\,dx$$

PRODOTTO DI DUE FUNZIONI → INTEGRAZIONE PER PARTI

$$\int f(x)\,\underbrace{g'(x)}_{\text{derivata di } g}\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx$$

derivata di g

$g'(x) \longrightarrow g(x) = \int g'(x)\,dx$

$$\int \underbrace{\sin x}_{g'(x)} \underbrace{\ln(\cos x + 1)}_{f(x)}\,dx$$

poiché è la più semplice da integrare

$f(x) = \ln(\cos x + 1)$

$g'(x) = \sin x$

$f'(x) = D[\ln(\cos x + 1)] = \frac{1}{\cos x + 1} D(\cos x + 1)$

$f'(x) = \frac{-\sin x}{\cos x + 1}$

$D(\ln x) = \frac{1}{x}$ $\qquad D(\ln(f(x))) = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$

$D(\cos x) + D(1) = -\sin x + 0 = -\sin x$

$g'(x) = \sin x \qquad g(x) = \int \sin x\,dx = -\cos x$

$\sin x \xrightarrow{D} \cos x \qquad \int$

$\cos x \xrightarrow{D} -\sin x \qquad \int$

$\int \sin x\,dx = -\cos x$

$$I = \ln(\cos x + 1)(-\cos x) - \int \frac{-\sin x}{\cos x + 1} \cdot (-\cos x)\,dx =$$

$$= -\cos(x)\ln(\cos x + 1) - \underbrace{\int \frac{\sin x \cdot \cos x}{\cos x + 1}\,dx}_{:= J}$$

riscrivo l'integrale nella variabile t

$$J = \int \frac{\cos x}{\cos x + 1} \cdot \sin x\,dx = -\int \frac{\cos x}{\cos x + 1} \underbrace{(-\sin x)\,dx}_{dt} = -\int \frac{t}{t+1} \cdot dt$$

INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE

OSSERVO $D(\cos x) = -\sin x$

SOSTITUZIONE

$t := \cos x$

calcolo del differenziale cioè dt

$D(t) = D(\cos x)$

il primo membro va derivato rispetto t

il secondo membro va derivato rispetto x

$f(t) = g(x)$

Ripetizioni Pagina 3

$$f'(t)dt = g'(x)dx$$ il differenziale

$D(x) = 1$

$$1 \cdot dt = -\sin x \cdot dx$$
$$-\sin x\, dx = dt$$

$$= -\int \frac{t}{t+1}\,dt = -\int \frac{t+1-1}{t+1}\,dt = -\int \left(\frac{\cancel{t+1}}{\cancel{t+1}} + \frac{-1}{t+1}\right)dt =$$

a numeratore aggiungo e tolgo 1

Spezzo la frazione

$$= -\int \left(1 - \frac{1}{t+1}\right)dt = -\left(\int 1\,dt - \int \frac{1}{t+1}\,dt\right) = -\left(t - \ln|t+1|\right) + c$$

$$\int f(x)+g(x) = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$D(t+1) = D(t) + D(1) = 1 + 0 = 1$$

$$= -\left(\cos x - \ln|\cos x + 1|\right) + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

sopra ho la derivata di quello che sta sotto

$$I = -\cos x \cdot \ln(\cos x + 1) - \left[-\cos x + \ln|\cos x + 1|\right] + c$$
$$= -\cos x\,\ln(\cos x + 1) + \cos x - \ln|\cos x + 1| + c$$