EQUAZIONE ORDINARIA DEL I ORDINE

$$F(t, y, y') = 0 \qquad F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

EQUAZIONE IN FORMA NORMALE

$$y' = f(t, y)$$

$\bar{\phi} \in C^1$ è soluzione se sostituendo a $y(t)$ la funzione $\bar{\phi}(t)$ il risultato è lo stesso per ogni valore di t.

$$\to \quad F(t, \bar{\phi}(t), \bar{\phi}'(t)) = 0 \qquad \forall t$$

→ **Modello di Malthius per la dinamica della popolazione**

INCOGNITA: $N(t)$ = INDIVIDUI AL TEMPO t

DATI $\begin{cases} \lambda & \text{Tasso di natalità} \geq 0 \\ \mu & \text{Tasso di mortalità} \geq 0 \end{cases}$

$N[t, t+h]$

NATI $\cong N(t) \cdot h \cdot \lambda$

INDIVIDUI TEMPO

MORTI $\cong N(t) \cdot h \cdot \mu$

Se h è piccolo (tempi brevi) l'approssimazione è buona:

$$\frac{N(t+h) - N(t)}{h} \cong \frac{\lambda \cancel{h} N(t) - \mu \cancel{h} N(t)}{\cancel{h}}$$

Divido per h

$$\frac{N(t+h)-N(t)}{h} \cong (\lambda-\mu)N(t)$$

Faccio lim $h \to 0$

$$\lim_{h\to 0} \frac{N(t+h)-N(t)}{h} \cong (\lambda-\mu)N(t)$$

$$N'(t) = (\lambda-\mu)N(t)$$

$\lambda - \mu = K$ POTENZIALE BIOLOGICO

$$N'(t) = K\,N(t)$$

EQUAZIONE DIFFERENZIALE

$$\boxed{y' = Ky}$$

RISOLUZIONE:

Voglio trovare tutte le funzioni ϕ tali che $\forall t \in \mathbb{R}$ $\phi'(t) = K\phi(t)$.

Impongo $\phi(t) \neq 0$ sennò sarebbe banale

$\downarrow$

$>0 \quad \forall t$

$<0 \quad \forall t$

Visto che $\phi \neq 0$, divido per ϕ:

$$\frac{\phi'(t)}{\phi(t)} = K \quad ; \quad \text{INTEGRO} \quad \int \frac{\phi'(t)}{\phi(t)}\,dt = \int K\,dt$$

$$\ln|\phi(t)| = Kt + c$$

se $\phi(t) > 0$

$\ln \phi(t) = Kt + c$

se $\phi(t) < 0$

$\ln(-\phi(t)) = Kt + c$

$\ln \phi(t) = \kappa t + c$ | $-\phi(t) = \kappa t + c$

$\phi(t) = e^{\kappa t + c}$ | $\phi(t) = -e^{\kappa t + c}$

Introduco $\bar{c} = \begin{cases} e^{c} & \text{se } \phi > 0 \\ -e^{c} & \text{se } \phi < 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \quad \phi(t) = \bar{c}\, e^{\kappa t}$

Se ho che $y(0) = y_0$:

$\begin{cases} y' = \kappa y \\ y(0) = y_0 \end{cases}$

$\phi(t) = \bar{c} \cdot e^{\kappa t}$

$\phi(0) = \bar{c}\, e^{\kappa 0}$

$\phi(0) = \bar{c} \longrightarrow \bar{c} = y_0$

$\boxed{\phi(t) = y_0 e^{\kappa t}}$

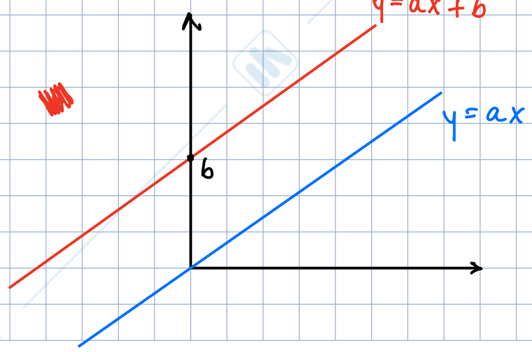
EQUAZIONI LINEARI DEL I ORDINE

$y'(t) = a(t)\, y(t) + f(t)$ $\longrightarrow$ COMPLETA, NON OMOGENEA

$z'(t) = a(t)\, z(t)$ $\longrightarrow$ OMOGENEA

Lineari perché:

- $y' = ay + f(t)$
- $z' = az$



SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE OMOGENEA

(0) $z'(t) = a(t)\, z(t)$

Allora $z(t) = c\, e^{A(t)}$ dove $A(t) = \int a(t)\, dt$

OSS

L'insieme delle soluzioni di (0) è un sottospazio vettoriale di dimensione 1.

PROBLEMA DI CAUCHY
$$\begin{cases} z'(t) = a(t)\, z(t) \\ z(t_0) = z_0 \end{cases}$$

SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE COMPLETA

(0) $z'(t) = a(t)\, z(t)$

(C) $y'(t) = a(t)\, y(t) + f(t)$

Teorema

Supponendo di conoscere una soluzione φ di (C):

1. Se z risolve (0) e φ risolve (C) allora $z + \varphi$ risolve (C).

2. Se y, φ risolvono (C) allora $y - \varphi := z$ risolve (0).

DIM

Conosciamo φ soluzione di (C)

1
$$\varphi'(t) = a(t)\, \varphi(t) + f(t) \qquad \forall t$$

z soluzione di (O) $\longrightarrow$ $z'(t) = a(t)\, z(t)$

(SOMMO)

$$\varphi'(t) + z'(t) = a(t)\left(\varphi(t) + z(t)\right) + f(t)$$

$$\varphi'(t) + z'(t) = a(t)\left(\varphi + z\right)(t) + f(t)$$

$$(\varphi + z)(t) = \varphi(t) + z(t)$$

$y := \varphi + z \rightarrow y' = ay + f \Rightarrow y$ è SOLUZIONE di (C)

2

Se y, φ risolve (C), allora $\exists z$ soluzione di (C) tale che
$y = \varphi + z$

y risolve (C) $\Rightarrow$ $y'(t) = a(t)\, y(t) + f(t)$

φ risolve (C) $\Rightarrow$ $\varphi'(t) = a(t)\, \varphi(t) + f(t)$

(DIFFERENZA)

$$y'(t) - \varphi'(t) = a(t)\left(y(t) - \varphi(t)\right)$$

$\rightarrow y'(t) = a(t)\, y(t) + f(t)$

Integrale: $y(t) = c\, e^{\int a(t)\,dt} + \varphi(t)$

Dove $\varphi(t)$ è una soluzione di (C).

Metodo di variazione delle costanti

Per trovare una soluzione di (C) la cerco nella forma:

$$y(t) = c(t)\, e^{A(t)} \quad ; \quad y(t) = \left[\int f(t)\, e^{-A(t)}\, dt\right] e^{A(t)}$$

$$\left(\text{con } A(t) = \int a(t)\, dt\right)$$

Quando $y(t) := c(t)\, e^{A(t)}$ risolve (C)?

$$\frac{d}{dt} y(t) = a(t)\, y(t) + f(t)$$

$$\downarrow$$

$$\frac{d}{dt}\left(c(t)\, e^{A(t)}\right) = a(t)\left(c(t)\, e^{A(t)}\right) + f(t)$$

$$c'(t)\, e^{A(t)} + \cancel{c(t) \cdot e^{A(t)}\, a(t)} = \cancel{a(t)\, c(t)\, e^{A(t)}} + f(t)$$

$$\Rightarrow c'(t) = f(t) \cdot e^{-A(t)} \longrightarrow c(t) = \int f(t)\, e^{-A(t)}\, dt$$

Integrale generale di (C)

$$y(t) = c\, e^{A(t)} + e^{A(t)} \int f(t)\, e^{-A(t)}\, dt$$

Problema di Cauchy per equazioni lineari del I ordine:

$$\begin{cases} y' = a(t)\, y + f(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

→ Integrale generale: $y(t) = c e^{A(t)} + e^{A(t)} \int_{t_0}^{t} f(s) e^{A(s)} ds$

Dove $A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s) ds$

$A(t_0) = 0$ perché $= \int_{t_0}^{t_0} a(s) ds = 0$

$$y(t_0) = c e^{\overset{=0}{A(t_0)}} + e^{A(t_0)} \underbrace{\int_{t_0}^{t_0} \cdots}_{\to 0} = C = y_0$$

$$y(t) = y_0 e^{A(t)} + e^{A(t)} \int_{t_0}^{t} f(s) e^{-A(s)} ds$$

EQUAZIONE DI BERNOULLI

$$\boxed{y' = a(t) y + b(t) y^{\alpha}}$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$

Cerco soluzioni tali che $y \neq 0$

Divido per y^{α}:

$$\frac{y'}{y^{\alpha}} = a(t) y^{1-\alpha} + b(t) y^{\alpha-\alpha}$$

$$\frac{d}{dt} y^{1-\alpha} = (1-\alpha) y^{-\alpha} y' = (1-\alpha) \frac{y'}{y^{\alpha}}$$

$V := y^{1-\alpha}$

$$\rightarrow \frac{1}{1-\alpha} V' = a(t) V + b(t)$$

EQUAZIONI LINEARI DEL II ORDINE

(C_2) $\quad y'' + ay' + by = f(t)$

(O_2) $\quad y'' + ay' + by = 0$

Consideriamo sempre $a, b \in \mathbb{R}$ (cioè costanti)

SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE OMOGENEA DEL II ORDINE

Teorema

Le soluzioni di (O_2) sono un sottosp. vett., cioè se y_1, y_2 risolvono (O_2), allora $\rho y_1 + \gamma y_2$ risolve (O_2).

DEF

Due funzioni $y_1, y_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sono LINEARMENTE INDIPENDENTI se:

$$\rho y_1 + \gamma y_2 = 0 \implies \rho = 0 = \gamma$$

In generale cerchiamo la soluzione di (O_2) nella forma:

$y = e^{\lambda t}$ allora $y' = \lambda e^{\lambda t}$, $y''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$

$$y'' + ay' + by = 0 \iff \lambda^2 e^{\lambda t} + a\lambda e^{\lambda t} + b e^{\lambda t} = 0$$

Divido per $\underset{\neq 0 \ \forall t}{e^{\lambda t}} \longrightarrow \lambda^2 + a\lambda + b = 0$

CASO 1

- $\Delta = a^2 - 4b > 0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \qquad y_1 = e^{\lambda_1 t} \qquad y_2 = e^{\lambda_2 t}$$

SOLUZIONI LINEARMENTE INDIPENDENTI

CASO 2

- $\Delta = a^2 - 4b = 0$

$$\lambda = -\frac{a}{2}$$

Soluzioni indipendenti: $y_1 = e^{\lambda t}$, $y_2 = te^{\lambda t}$

Soluzioni generali: $y(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}$

Verifichiamo che y_2 è soluzione:

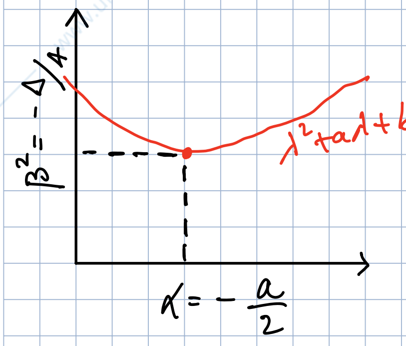
$$y_2 = te^{\lambda t} \qquad y_2' = e^{\lambda t} + t\lambda e^{\lambda t} \qquad y_2'' = \lambda e^{\lambda t} + \lambda e^{\lambda t} + t\lambda^2 e^{\lambda t}$$

$$y_2'' + ay_2' + by = 2\lambda e^{\lambda t} + ae^{\lambda t} + at\lambda e^{\lambda t} + bte^{\lambda t} + t\lambda^2 e^{\lambda t} =$$

$$= e^{\lambda t}\left(2\lambda + \lambda^2 t + a + at\lambda + bt\right) = te^{\lambda t}\underbrace{\left(\lambda^2 + a\lambda + b\right)}_{\substack{=0 \text{ perché} \\ \lambda \text{ è radice}}} + e^{\lambda t}\underbrace{(2\lambda + a)}_{\substack{\lambda = -\frac{a}{2} \\ \text{perché siamo} \\ \text{nel caso 2}}} = 0 \checkmark$$

CASO 3

$$\Delta = a^2 - 4b < 0$$



$$\mathbb{C} \ni \lambda_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} = \frac{-a \pm i\sqrt{-\Delta}}{2} =$$

$$= \alpha + i\beta$$

$$\alpha_i = -\frac{a}{2} \ ; \ \beta_i = -\sqrt{\frac{-\Delta}{4}}$$

$$y_+(t) = e^{\lambda_1 t} = e^{(\alpha + i\beta)t} = e^{\alpha t} \cdot e^{i\beta t} = e^{\alpha t}\left(\cos(\beta t) + i\,\mathrm{sen}(\beta t)\right)$$

$$y_-(t) = e^{\lambda_2 t} = e^{(\alpha - i\beta)t} = e^{\alpha t}\left(\cos(\beta t) - i\,\text{sen}(\beta t)\right)$$

$$y_1(t) = \frac{y_+ + y_-}{2} = e^{\alpha t}\cos(\beta t)$$

$$y_2(t) = \frac{y_+ - y_-}{2i} = e^{\alpha t}\,\text{sen}(\beta t)$$

SOLUZIONE GENERALE:

$$y(t) = C_1 e^{\alpha t}\cos(\beta t) + C_2 e^{\alpha t}\,\text{sen}(\beta t)$$

RIASSUNTO

(C_2) $\quad y'' + ay' + by = f(t)$

(O_2) $\quad y'' + ay' + by = 0$

Studio polinomio caratteristico

- $\Delta > 0$ 2 radici $\lambda_1 \neq \lambda_2$
- $\Delta = 0$ 1 radice λ
- $\Delta < 0$ 2 radici complesse

Soluzioni di O_2

- Se $\Delta > 0$, $\quad y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$
- Se $\Delta = 0$, $\quad y(t) = C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t}$
- Se $\Delta < 0$, $\quad y(t) = C_1 e^{\alpha t}\cos(\beta t) + C_2 e^{\alpha t}\,\text{sen}(\beta t)$ con $\alpha = -\frac{a}{2}$, $\beta = -\sqrt{\frac{\Delta}{4}}$

Teorema

L'integrale generale di (C_2) si ottiene dall'integrale generale di (O_2) aggiungendo una soluzione particolare di (C_2).