SERIE

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ CONVERGE SE LA SUCCESSIONE $\{s_n\} = \left\{ \sum_{n=1}^{k} a_k \right\}$ DETTA SUCCESSIONE DELLE SOMME PARZIALI CONVERGE. $\lim_{n\to+\infty} s_n = s \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$

SERIE GEOMETRICA $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ CONVERGE PER $-1<x<1$ E LA SOMMA È $\frac{1}{1-x}$, SE $x \leq -1$ È IRREGOLARE, SE $x \geq 1$ DIVERGE POSITIVAMENTE

CONDIZIONE DI CAUCHY: SE $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ È CONVERGENTE $\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

PER IPOTESI SI HA CHE $\lim_{n\to+\infty} s_n = s$, $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to+\infty} s_n - \lim_{n\to+\infty} s_{n-1} = s - s = 0$

SIA DATA UNA SERIE A TERMINI NON NEGATIVI $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \Rightarrow$ LA SERIE O CONVERGE O DIVERGE (+). SICCOME $a_n \geq 0 \Rightarrow$ LA SUCCESSIONE DELLE SOMME PARZIALI È NON DECRESCENTE. QUINDI SE È SUPERIORMENTE LIMITATA SI HA $\lim_{n\to+\infty} s_n = s$ SE NON È SUPERIORMENTE LIMITATA SI HA CHE $\lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty$

CRITERIO DEL CONFRONTO: DATE LE SERIE $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ E $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ t.c. $0 \leq a_n \leq b_n \ \forall n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow$ SE $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ CONVERGE ANCHE $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ CONVERGE. SE $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ DIVERGE ANCHE $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ DIVERGE.

SIA $\{s_n\}$ LA SUCCESSIONE DELLE SOMME DI a_n E $\{\delta_n\}$ LA SUCCESSIONE DELLE SOMME DI b_n.

SE $\sum b_n$ CONVERGE $\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \delta_n = \delta$ CON $\delta > \delta_n$, ESSENDO $s_n \leq \delta_n \leq \delta \Rightarrow a_n$ CONVERGE

CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO: SE $a_n \geq 0$ E $b_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ SE $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = k \neq 0, +\infty$
$\Rightarrow$ LE DUE SERIE HANNO LO STESSO CARATTERE. SE $k = 0$ E b_n CONVERGE $\Rightarrow$ CONVERGE ANCHE a_n. SE $k = +\infty$ E b_n DIVERGE $\Rightarrow$ DIVERGE ANCHE a_n.

CRITERIO DELLA CONVERGENZA ASSOLUTA: SE $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ CONVERGE $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ CONVERGE.

POSTO $b_n = \max\{a_n, 0\}$ E $c_n = \max\{-a_n, 0\}$ SI HA CHE $0 \leq b_n \leq |a_n|$ E $0 \leq c_n \leq |a_n|$ QUINDI PER IL CRITERIO DEL CONFRONTO b_n E c_n CONVERGONO

INOLTRE $a_n = b_n - c_n$ QUINDI $\sum a_n$ CONVERGE.

CRITERIO DEL RAPPORTO: $\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$ SE $L < 1$ a_n È ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE SE $L > 1$ NON È CONVERGENTE SE $L = 1$ NON SI PUÒ DIRE NULLA.

CRITERIO DELLA RADICE: $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$ COME PRIMA

CRITERIO DI LEIBNITZ: $a_n \geq 0$, $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, $a_{n+1} \leq a_n \ \forall n \geq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ CONVERGE

CRITERIO DELL' INTEGRALE: SE f È UNA FUNZIONE CONTINUA, POSITIVA, DECRESCENTE IN $[1, +\infty)$
$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ E $\int_{1}^{+\infty} f(x)\,dx$ HANNO LO STESSO CARATTERE. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$