

FUNZIONI

Legge che mette in relazione 2 insiemi e che associa ad ogni elemento di A uno ed un solo elemento di B.

DOMINIO

Assegnata una funzione, l'insieme dei valori reali per cui la funzione ha significato è detto dominio della funzione. Se non è specificato diversamente, il dominio di una funzione $y = f(x)$ è l'insieme costituito dai valori per cui è definita la legge analitica.

IMMAGINE

L'insieme immagine (o immagine) della funzione è costituito dai valori assunti dalla y al variare della variabile indipendente x nel dominio della funzione.

FUNZIONE INIETTIVA

Una funzione si dice **iniettiva** quando elementi distinti di un insieme A sono associati ad elementi distinti di un insieme B.

Es: $f(x) = x^3$ è iniettiva $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ con $x_1 \neq x_2$

$f(x) = x^2$ non è iniettiva $D(f) = \mathbb{R}$ ES: $x_1 = 2$ $x_2 = -2$ $x_1 \neq x_2$ $f(x_1) = 2^2 = 4$ $f(x_2) = (-2)^2 = 4$ $f(x_1) = f(x_2)$

FUNZIONE SURIETTIVA

Una funzione si dice **suriettiva** quando ogni elemento dell'insieme di arrivo è immagine di almeno un elemento del dominio.

Es: $f(x) = x^3$ è suriettiva

$f(x) = x^2$ non è iniettiva e non è suriettiva

FUNZIONE BIETTIVA

Una funzione che è sia iniettiva sia suriettiva si dice **biettiva** (o biunivoca).

Es: $f(x) = x^3$ è suriettiva e iniettiva, quindi biettiva

FUNZIONE INVERSA

Se $f: A \rightarrow B$ (funzione definita da A a B) è biettiva, è ben definita la funzione **inversa** $f^{-1}: B \rightarrow A$ che associa ad ogni $y \in B$ l'unico $x \in A$ tale che $f(x) = y$.

Es: $f(x) = x^3$ è invertibile perché è biettiva $y = f(x^3) \Rightarrow x = \sqrt[3]{y} = f^{-1}(y)$





$f(x) = x^2$ non è invertibile perché non è biettiva $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

FUNZIONI PARI E DISPARI

Assegnata una funzione $y = f(x)$ di dominio D tale che per ogni $x \in D$ anche $-x \in D$:

- \Rightarrow La funzione si dice **pari** se $f(x) = f(-x)$ per ogni $x \in D$ (la funzione è simmetrica rispetto all'asse y);
- \Rightarrow La funzione si dice **dispari** se $f(-x) = -f(x)$ per ogni $x \in D$ (la funzione è simmetrica rispetto all'origine).

FUNZIONI MONOTONESia $f: A \rightarrow R$, $A \subseteq R$

- La funzione si dice **crescente** se $\forall x_1, x_2 \in A$ con $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$; 
- La funzione si dice **non decrescente** se $\forall x_1, x_2 \in A$ con $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$; 
- La funzione si dice **decrescente** se $\forall x_1, x_2 \in A$ con $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$; 
- La funzione si dice **non crescente** se $\forall x_1, x_2 \in A$ con $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$; 

es: $f(x) = x^2$ non è una funzione monotona; $f(x) = x^3$ è una funzione monotona *SIAMO $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ con $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = x_1^3 < x_2^3 = f(x_2)$* **INSIEMI LIMITATI**Un insieme si dice **limitato superiormente** se esiste un numero $l \in R$ tale che $\forall a \in A$, $a \leq l$, allora l si dice **MAGGIORANTE DI A**.Es: $A = [-1, 3]$ è limitato superiormente, il maggiorante è qualsiasi numero ≥ 3 .Un insieme si dice **limitato inferiormente** se esiste un numero $m \in R$ tale che $\forall a \in A$, $m \leq a$ allora m si dice **MINORANTE DI A**.L'insieme A si dice **limitato** se è limitato superiormente e limitato inferiormente.Si dice **estremo superiore** di un insieme A (**supA**) un valore $s \in R$ che è il più piccolo dei maggioranti di A , cioè tale che:

1. $\forall a \in A$, $a \leq s$ (s è un maggiorante di A);
2. $\forall l$ maggiorante di A , $s \leq l$.

Oss: Se $A \neq \emptyset$ è limitato superiormente esiste $\text{sup}A \in R$

- Se esiste $\text{sup}A$, è unico;
- Se A non è superiormente limitato $\text{sup}A = +\infty$;
- Se $\text{sup}A \in A$, si dice **MASSIMO (maxA)** di A .

Si dice **estremo inferiore** di un insieme A (**infA**) un valore $i \in R$ che è il più grande dei minoranti di A , cioè tale che:

1. $\forall a \in A$, $a \geq i$ (i è un minorante di A);
2. $\forall m$ minorante di A , $m \leq i$.

Oss: Se $A \neq \emptyset$ è limitato inferiormente esiste $\text{inf}A \in R$

- Se esiste $\text{inf}A$, è unico;
- Se A non è inferiormente limitato $\text{inf}A = -\infty$;
- Se $\text{inf}A \in A$, si dice **MINIMO (minA)** di A .

FUNZIONI LIMITATEUna funzione si dice **LIMITATA SUPERIORMENTE**, **LIMITATA INFERIORMENTE** o **LIMITATA** se $f(A) = \text{cod}(f)$ (insieme immagine = codominio) è rispettivamente limitato superiormente, limitato inferiormente o limitato.

$$\inf f(x) = \inf f(A), \quad x \in A$$

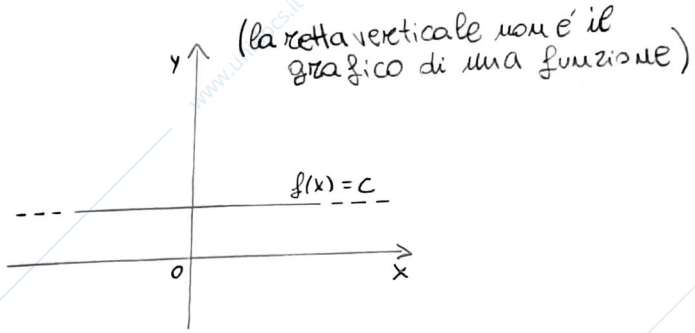
$$\max f(x) = \max f(A), \quad x \in A$$

$$\sup f(x) = \sup f(A), \quad x \in A$$

$$\min f(x) = \min f(A), \quad x \in A$$

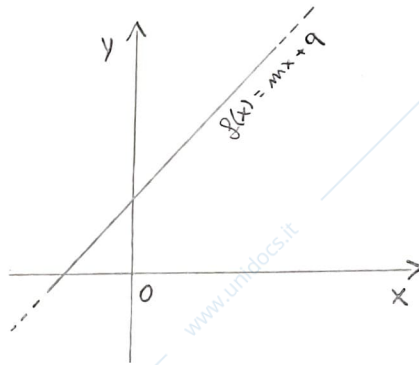
FUNZIONI ELEMENTARI

① **FUNZIONE COSTANTE**
 $f(x) = c, c \in \mathbb{R}$
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $D(f)$



$\text{Cod}(f) = \{c\}$ NON È SURIETTIVA, NON È INIETTIVA
 È PARI E LIMITATA $C = \max$ e \min

② **FUNZIONE LINEARE**
 $f(x) = mx + q$
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $D(f)$

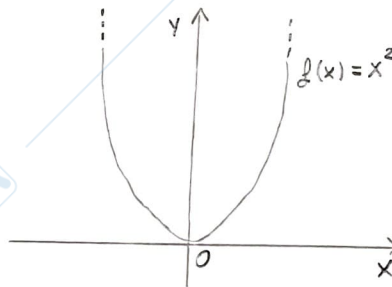


$m > 0$ PENDENZA POSITIVA
 $m < 0$ PENDENZA NEGATIVA

$\text{Cod}(f) = \mathbb{R}$

È SURIETTIVA
 È INIETTIVA } È BIETTIVA E INVERTIBILE
 NON È LIMITATA

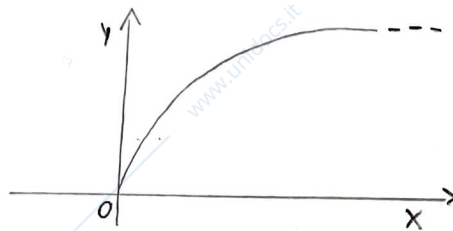
③ $f(x) = x^n, n = \text{pari}$
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $D(f)$



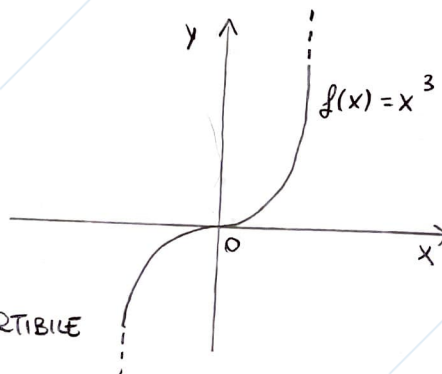
$\text{Cod}(f) = \mathbb{R}_0^+$

NON È INIETTIVA
 NON È SURIETTIVA
 È LIMITATA SOLO INFERIORMENTE, NON È MONOTONA.

④ $f(x) = \sqrt[n]{x}, x \geq 0, n = \text{pari}$
 $f: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$
 $D(f)$



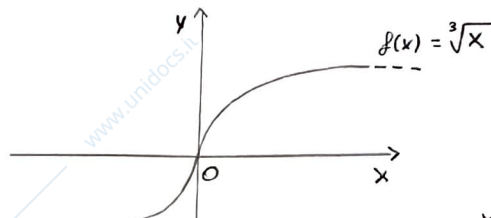
⑤ $f(x) = x^n, x \in \mathbb{R}, n = \text{dispari}$
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $D(f)$



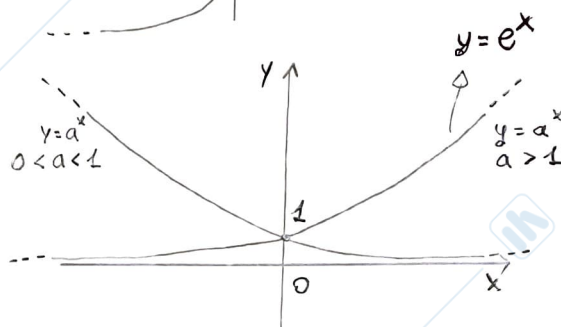
$\text{Cod}(f) = \mathbb{R}$

È INIETTIVA
 È SURIETTIVA } È BIETTIVA E INVERTIBILE
 È DISPARI
 È MONOTONA CRESCENTE
 NON È LIMITATA

⑥ $f(x) = \sqrt[n]{x}, x \in \mathbb{R} \quad n = \text{dispari}$



⑦ $f(x) = a^x, x \in \mathbb{R} \text{ e } a > 0, a \neq 1$
 ($a=1$ funzione costante)



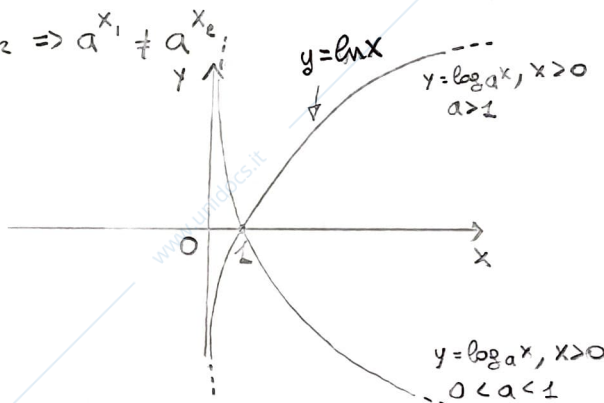
$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$
 $D(f)$

$\text{cod } f = \mathbb{R}^+ \quad (a^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R})$

NON È SURIETTIVA
 È INIETTIVA, INFATTI $x_1 \neq x_2 \Rightarrow a^{x_1} \neq a^{x_2}$

⑧ $f(x) = \log_a x, a > 0, x > 0$

$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$
 $D(f)$

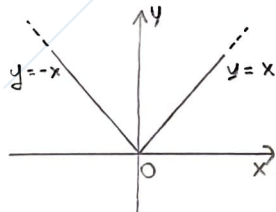


$y = \log_a x, x > 0$
 $0 < a < 1$

⑨ $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $D(f)$

$\text{cod}(f) = \mathbb{R}^+_0$

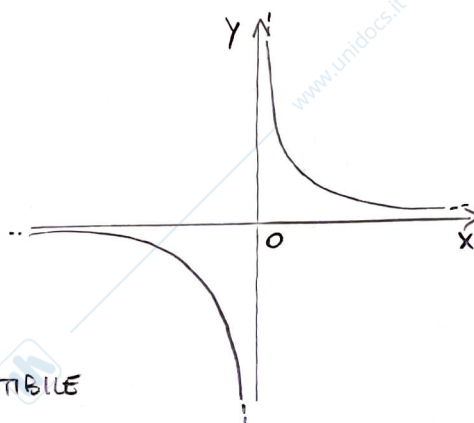


NON È INIETTIVA
 NON È SURIETTIVA
 NON È MONOTONA
 È PARI
 È LIMITATA SOLO INFERIORMENTE

⑩ $f(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$

$f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$
 $D(f)$

$\text{cod}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$



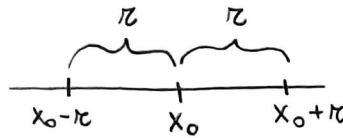
È SURIETTIVA
 È INIETTIVA > È BIETTIVA E INVERTIBILE
 NON È LIMITATA
 NON È MONOTONA

BOCCIA

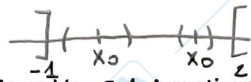
Dato $x_0 \in \mathbb{R}$ e $r > 0$, si definisce **boccia** centrata in x_0 di raggio r

B chiusa $B(x_0, r) := [x_0 - r, x_0 + r] = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| \leq r\}$

B aperta $B(x_0, r) :=]x_0 - r, x_0 + r[$



INSIEME APERTO



$A =]-1, 2[$

Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice **aperto** se $\forall x_0 \in A$, A contiene una boccia centrata in x_0 , cioè $\exists r > 0$ tale che $B(x_0, r) \subseteq A$.

INSIEME CHIUSO

Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}$ si dice **chiuso** se il suo complementare E^c è aperto. $\exists y \in E$ tale che $y \in B(x_0, \epsilon)$.

$E = [0, 6]$ è CHIUSO perché $E^c = (-\infty, 0[\cup]6, +\infty)$ è aperto.

Oss: un insieme è chiuso se e solo se contiene i suoi punti di accumulazione

INTORNO

Un insieme $U \subseteq \mathbb{R}$ si dice **intorno** di un punto $x_0 \in U$ se contiene una boccia centrata in x_0 ovvero $\exists r > 0$ tale che:

$B(x_0, r) \subseteq U$

$U =]-1, 2[$ è un intorno di tutti i numeri compresi tra -1 e 2 escluso

PUNTO DI ACCUMULAZIONE

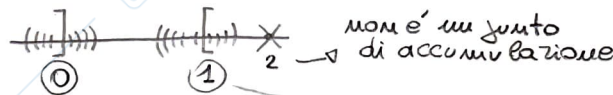
Dato un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ si dice **punto di accumulazione** per A se in ogni intorno di x_0 cade almeno un punto di A, diverso da x_0 .

$(U \cap A) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$

$A =]0, 1[$

$A' = [0, 1]$

estremo⁻ ≤ PUNTO DI ACCUMULAZIONE ≤ estremo⁺



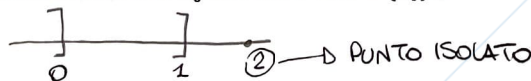
È UN PUNTO DI ACCUMULAZIONE perché qualsiasi intervallo interseca l'insieme A

PUNTO ISOLATO

Dato un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ un punto $x_0 \in A$ si dice **isolato** se $\exists r > 0$ tale che:

$B(x_0, r) \cap A = \{x_0\}$ (esiste un intorno U di x_0 tale che $U \cap A = \{x_0\}$)

Es: $A =]0, 1] \cup \{2\}$



Oss: un punto $x_0 \in A$ o è isolato o è un punto di accumulazione.

INSIEME COMPATTO

Un insieme $C \subseteq \mathbb{R}$ è un **compatto** se è un insieme **chiuso** e **limitato**

Es: $C = [0, 20]$ è CHIUSO e LIMITATO, quindi è COMPATTO

$D =]-1, +\infty)$ è CHIUSO ma non è limitato, quindi NON È COMPATTO

LIMITE DI UNA FUNZIONE

Sia $f: A \rightarrow R$, $A \subseteq R$ e x_0 punto di accumulazione per A . Dire che esiste il $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ ($l \in R$) vuol dire che $\forall U$ di l esiste un intorno V di x_0 tale che $\forall x$ appartenente all'intorno V di x_0 , eccetto al più x_0 , $f(x)$ appartiene all'intorno U di l .

Oss: il limite se esiste è unico

Esiste $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ se e solo se $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l$

TEOREMI SUI LIMITI**TEOREMA DELLA LIMITATEZZA LOCALE**

Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$, $l \in R$, allora $f(x)$ è limitata vicino al punto x_0 . Cioè esiste un intorno U di x_0 tale che f è limitata in $U \cap A$.

TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO

Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$, $l \in R$, $l \neq 0$ allora esiste un intorno U di x_0 tale che f , in $(U \cap A) \setminus \{x_0\}$, assume lo stesso segno di l .

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}$ con $l_2 \neq 0 \rightarrow$ anche $g(x) \neq 0$ (dimostrato da questo teorema)

TEOREMA DEL CONFRONTO O DEI CARABINIERI

Siano $f(x), g(x), h(x)$ tale che, in $(U \cap A) \setminus \{x_0\}$ dove U è un intorno di x_0 , risultanti $f(x) > g(x) > h(x)$.

Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l$, allora $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$.

TEOREMA DEL LIMITE DI PRODOTTO TRA FUNZIONI

Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ e $g(x)$ è limitata in $U \cap A$, dove U è un intorno di x_0 , allora $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = 0$

Es: $\lim_{x \rightarrow x_0} x \cdot \sin \frac{1}{x} = 0$

TEORIA DEGLI INFINITI

Sia f definita in $A \subseteq R$ con $x_0 \in A'$. Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$, f si dice **INFINITO**, per $x \rightarrow x_0$.

Siano $f(x)$ e $g(x)$ due infiniti, per $x \rightarrow x_0$. Se $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|}$ allora esistono 3 casi:

- $\Rightarrow 0$ se $f(x)$ ha ordine di infinito inferiore a $g(x)$ **$f(x) < g(x)$**
- $\Rightarrow +\infty$ se $f(x)$ ha ordine di infinito superiore a $g(x)$ **$f(x) > g(x)$**
- $\Rightarrow \frac{a}{b}$ se $f(x)$ e $g(x)$ hanno lo stesso ordine di infinito **$f(x) = g(x)$**

PRINCIPIO DI SOSTITUZIONE DEGLI INFINITI

Nel calcolo del limite del rapporto tra somme di infiniti si possono aggiungere e sottrarre (dunque tralasciare) infiniti di ordine inferiore rispetto ai restanti.

TEOREMA DEGLI INFINITESIMI

Sia f definita in $A \subseteq \mathbb{R}$ con $x_0 \in A'$. Se $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$, f si dice un **INFINITESIMO**, per $x \rightarrow x_0$.

Siano $f(x)$ e $g(x)$ due infinitesimi, per $x \rightarrow x_0$ (con $g(x) \neq 0$ in un intorno di x_0 , tranne al più x_0). Se

$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|}$ allora esistono 3 casi:

- $\Rightarrow 0$ se $f(x)$ ha ordine di infinitesimo superiore a $g(x)$ **$f(x) > g(x)$**
- $\Rightarrow +\infty$ se $f(x)$ ha ordine di infinitesimo inferiore a $g(x)$ **$f(x) < g(x)$**
- $\Rightarrow \frac{a}{b}$ se $f(x)$ e $g(x)$ hanno lo stesso ordine di infinitesimo **$f(x) = g(x)$**

PRINCIPIO DI SOSTITUZIONE DEGLI INFINITI

Nel calcolo del limite del rapporto tra somme di infinitesimi si possono aggiungere e sottrarre (dunque tralasciare) infinitesimi di ordine superiore rispetto ai restanti.

SUCCESSIONI

Una **successione** è una sequenza (finita o infinita) di numeri reali.

Notazione: $(a_n), n \in \mathbb{N}$

Ha senso chiedersi se $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$. Si hanno 3 casi:

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l, l \in \mathbb{R}$
Allora $(a_n)_n$ è **convergente a l**
2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \pm\infty$
Allora $(a_n)_n$ è **divergente a $\pm\infty$**
3. $\nexists \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$
Allora $(a_n)_n$ è **indeterminata**.

FUNZIONI CONTINUE

Sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}$

La funzione f si dice **continua** in $x_0 \in A$ ($x_0 \in A'$) se $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, quindi il limite destro e il limite sinistro coincidono.

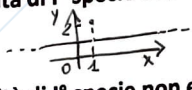
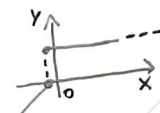
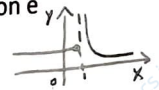
f è continua in A se è continua in ogni $x_0 \in A$.

esempi di funzioni costanti:

- Costanti
- Identità
- Potenze e radici
- Esponenziali
- Logaritmi
- Modulo
- Seno, coseno e tangente
- Se f e g sono funzioni continue in x_0 , allora:
 - $\Rightarrow f + g$ è continua in x_0
 - $\Rightarrow f \cdot g$ è continua in x_0
 - $\Rightarrow f/g$ è continua in x_0 se $g(x_0) \neq 0$

- la composizione di funzioni continue è continua. Se f è continua in x_0 e g è continua in $f(x_0)$, allora $g \circ f$ è continua in x_0 .
- L'inversa di una funzione continua e biiettiva è continua
- Se $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$ f è continua a destra in x_0 . Se $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$ f è continua a sinistra in x_0 .

PUNTI DI DISCONTINUITA'

- x_0 è un **punto di discontinuità di I° specie eliminabile** se $\exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$,
ma $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$ 
- x_0 è un **punto di discontinuità di I° specie non eliminabile** se esistono (finiti) $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$, ma sono diversi, quindi $\nexists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 
- x_0 è un **punto di discontinuità di II° specie** se non esiste o non è finito $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ oppure $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$, 

TEOREMI SULLE FUNZIONI CONTINUE

TEOREMA DI CONSERVAZIONE DELLA COMPATTEZZA

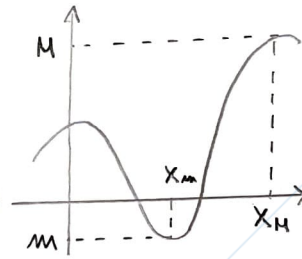
Se $f: A \rightarrow R$ è continua e $A \subseteq R$ è compatto (chiuso e limitato), allora $f(A)$ è compatto.

TEOREMA DI WEIERSTRASS

Se $f: A \rightarrow R$ è continua e $A \subseteq R$ è compatto (chiuso e limitato), allora f ammette massimo e minimo.

$x_M \in A$ tale che $f(x) \leq f(x_M), \forall x \in A$ si dice **PUNTO DI MASSIMO (assoluto)**

$x_m \in A$ tale che $f(x_m) \leq f(x), \forall x \in A$ si dice **PUNTO DI MINIMO (assoluto)**



TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI

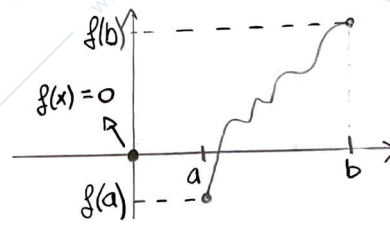
Sia $f: I \rightarrow R$ continua con I intervallo, semiretta o R .

Allora f ha la proprietà dei **VALORI INTERMEDI**, cioè se assume due valori, assume anche tutti quelli compresi tra loro

TEOREMA DEGLI ZERI

Sia $f: [a, b] \rightarrow R$ continua con $f(a) < 0, f(b) > 0$ o viceversa ($f(a) > 0, f(b) < 0$).

Allora $\exists x_0 \in]a, b[$ tale che $f(x_0) = 0$



DERIVATE

Sia $f: I \rightarrow R$, dove I è un intervallo, una semiretta o R . f si dice **derivabile** in $x_0 \in I$ se esiste il **rapporto incrementale** di f nel passare da x_0 a x , cioè:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x)$$

Rappresenta il coefficiente angolare della retta secante per $(x_0, f(x_0))$ e $(x, f(x))$.



f è derivabile in tutto I se è derivabile in ogni $x \in I$, quindi rimane definita $f'(x), \forall x \in I$ e $f': I \rightarrow R$.

TEOREMA DELLA CONTINUITA' E DELLA DERIVABILITA'

Se f è derivabile in $x_0 \in I$, allora f è continua in x_0 .

La derivabilità implica la continuità, ma la continuità non implica la derivabilità.

DIMOSTRAZIONE:

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x) \in \mathbb{R}.$$

Affinché la funzione sia continua $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - f(x_0) = 0$. Risulta dunque:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0), f \text{ è quindi continua in } x_0.$$

TEOREMI SULLE FUNZIONI DERIVABILI**TEOREMA 1**

Siano $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabili in $x \in I$. Allora:

- $f + g$ è derivabile in x e $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$;
- $f \cdot g$ è derivabile in x e $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$;
- f/g è derivabile in x se $g(x) \neq 0$ e $(f/g)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$

$$\text{in particolare } (1/g)'(x) = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}$$

TEOREMA 2 (g o f = composizione di funzioni)

Siano $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ con f derivabile in x e g derivabile in $f(x)$ [insieme immagine]. Allora $(g \circ f)$ è derivabile in x e $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$.

TEOREMA 3

Se $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, invertibile e derivabile in $x_0 \in I$ con $f'(x_0) \neq 0$, allora f^{-1} è derivabile in $y_0 = f(x_0)$ e $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$

MASSIMI E MINIMI LOCALI (O RELATIVI)

Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Un punto $x_0 \in I$ si dice punto di **massimo locale** se esiste un intorno U di x_0 tale che

$$\forall x \in U \cap I \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$$

Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Un punto $x_0 \in I$ si dice punto di **minimo locale** se esiste un intorno U di x_0 tale che

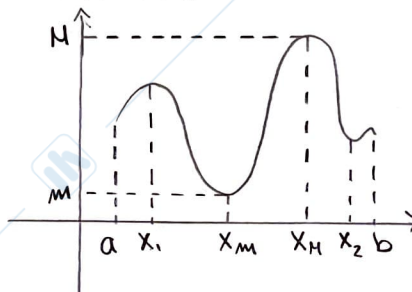
$$\forall x \in U \cap I \Rightarrow f(x) \geq f(x_0)$$

x_M = punto di massimo ASSOLUTO

x_m = punto di minimo ASSOLUTO

b e x_1 = punto di massimo LOCALE

a e x_2 = punto di minimo LOCALE



TEOREMA DI FERMAT

- Sia f derivabile in $x_0 \in I$.
- Se x_0 è interno ad I ed è un punto di massimo o di minimo locale,

allora $f'(x_0) = 0$ cioè la derivata è uguale al coefficiente angolare della retta tangente alla funzione.

$f'(x_0) = 0$ è un **PUNTO STAZIONARIO O CRITICO**

Oss: il teorema di Fermat non è invertibile

TEOREMA DI ROLLE

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ che soddisfa le seguenti condizioni:

- f è continua nell'intervallo chiuso $[a, b]$;
- f è derivabile nell'intervallo aperto $]a, b[$
- $f(a) = f(b)$

allora esiste un punto $x_0 \in]a, b[$ per cui $f'(x_0) = 0$.

Oss: il teorema ci dice che all'interno dell'intervallo $[a, b]$ c'è almeno un punto in cui la derivata prima deve annullarsi, cioè c'è almeno un punto in cui la funzione ammette delle tangenti orizzontali.

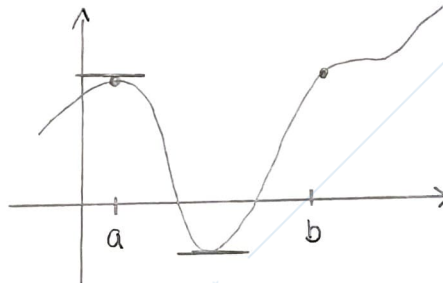
DIMOSTRAZIONE:

Per il teorema di Weierstrass, f assume, in $[a, b]$, massimo e minimo assoluti.

$$M = \max f(x), x \in [a, b] \quad e \quad m = \min f(x), x \in [a, b]$$

I casi sono 2:

- entrambi (M e m) sono assunti agli estremi dell'intervallo, ma allora essendo $f(a) = f(b)$, abbiamo $M = f(a) = f(b) = m$, da cui f è costante.
Allora $f'(x) = 0, \forall x \in]a, b[$.
- il massimo o il minimo è assunto all'interno dell'intervallo. Se ad esempio M è assunto in un punto $x_0 \in]a, b[$, x_0 è un punto di max.
Allora per il teorema di Fermat, $f'(x_0) = 0$

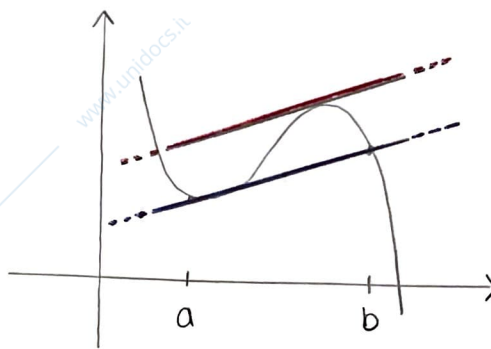


TEOREMA DI LAGRANGE

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ che soddisfa le seguenti condizioni:

- f è continua nell'intervallo chiuso $[a, b]$;
- f è derivabile nell'intervallo aperto $]a, b[$

allora esiste un punto $x_0 \in]a, b[$ per cui $f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$



Oss: il teorema ci dice che all'interno dell'intervallo $[a, b]$ deve esistere almeno un punto in cui il coefficiente angolare della retta tangente sia uguale al coefficiente angolare della retta secante passante per a e b.

CONSEGUENZE DEL TEOREMA DI LAGRANGE:

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ che soddisfa le seguenti condizioni:

- f è continua nell'intervallo chiuso $[a, b]$;
- f è derivabile nell'intervallo aperto $]a, b[$

Allora:

- se $f'(x) > 0, \forall x \in]a, b[$, f è crescente in $[a, b]$;
- se $f'(x) \geq 0, \forall x \in]a, b[$, f è non decrescente in $[a, b]$;
- se $f'(x) < 0, \forall x \in]a, b[$, f è decrescente in $[a, b]$;
- se $f'(x) \leq 0, \forall x \in]a, b[$, f è non crescente in $[a, b]$;
- se $f'(x) = 0, \forall x \in]a, b[$, f è costante in $[a, b]$;
- se $x \in I$ tale che $f'(x) = 0$ e se $f'(x) < 0$ se $x \in]x - h, x[$ e $f'(x) > 0$ se $x \in]x, x + h[$ allora x è un punto di minimo locale.
- se $x \in I$ tale che $f'(x) = 0$ e se $f'(x) > 0$ se $x \in]x - h, x[$ e $f'(x) < 0$ se $x \in]x, x + h[$ allora x è un punto di massimo locale.

ASINTOTI

Un **asintoto** è una retta tale che la distanza tra tale retta e il grafico di f tende a 0 quando x tende a x_0

$\Rightarrow x_0 \in \mathbb{R}$

se $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$ la retta di equazione $x = x_0$ è un **asintoto verticale destro** per il grafico di f .

se $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$ la retta di equazione $x = x_0$ è un **asintoto verticale sinistro** per il grafico di f .

\Rightarrow Sia I una semiretta destra (o sinistra) o \mathbb{R} .

se $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = k \in \mathbb{R}$ la retta di equazione $y = k$ è un **asintoto orizzontale** per il grafico di f

quando $x \rightarrow \pm\infty$

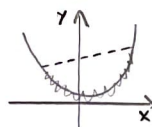
\Rightarrow se $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$:

se $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e se $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx] = q \in \mathbb{R}$

allora la retta di equazione $y = mx + q$ è un **asintoto obliquo** per il grafico di f quando $x \rightarrow \pm\infty$

FUNZIONI CONVESSE

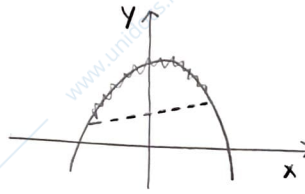
Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, dove I è un intervallo, una semiretta o \mathbb{R} .



f è **convessa** se, presi due punti qualsiasi sul grafico di f , il segmento che li congiunge lascia internamente il grafico tutto al di sotto.

FUNZIONI CONCAVE

Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, dove I è un intervallo, una semiretta o \mathbb{R} .



f è **concava** se, presi due punti qualsiasi sul grafico di f , il segmento che li congiunge lascia internamente il grafico tutto al di sopra.

PUNTO DI FLESSO

$x_0 \in I$ si dice **punto di flesso** per f se, da destra a sinistra di x_0 , f cambia concavità.

TEOREMA:

Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile. Allora:

f è **convessa** se e solo se $f'(x)$ è **non decrescente**;

f è **concava** se e solo se $f'(x)$ è **non crescente**.

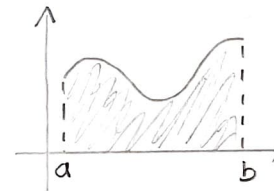
TEOREMA:

se f è derivabile due volte in I , allora è convessa (o concava) se e solo se $f''(x) \geq 0$ (o $f''(x) \leq 0$), $x \in I$.

se $f''(x)$ cambia segno da sinistra a destra di x_0 e $f''(x) = 0$, x_0 è un punto stazionario.

INTEGRALI

Vale solo per funzioni limitate e comprese in un intervallo



INTEGRALE DI RIEMANN

Alla fine del 700 si è sentita la necessità di introdurre un nuovo metodo che consentisse il calcolo dell'area di superfici che non rientrassero nella categoria di figure già note. Riemann introdusse dunque l'integrale. Una **divisione** di un intervallo $[a, b]$ è $D = \{x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_m = b\}$ tale che $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m = b$.

FUNZIONE A GRADINATA

Una funzione $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ si dice a **gradinata** se esiste una divisione $D = \{x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_m = b\}$ tale che, all'interno di ciascun intervallo D la funzione g sia costante.

- o Sia $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ a gradinata.

Definiamo **INTEGRALE** di g in $[a, b]$: $\int_a^b g(x) dx = \sum g(t_k)(x_k - x_{k-1})$ con $t_k \in]x_{k-1}, x_k[$

- o Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ *limitata*

definiamo $S_f = \{s: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ a gradinata con } s(x) \leq f(x), \forall x \in [a, b]\}$ e $T_f = \{t: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ a gradinata con } t(x) \leq f(x), \forall x \in [a, b]\}$. $S_f \neq \emptyset$ e $T_f \neq \emptyset$

poniamo:

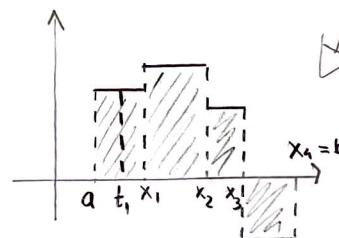
$$\int_a^b f(x) dx = \sup \int_a^b s(x) dx, \quad s \in S_f = \text{integrale inferiore}$$

$$\int_a^b f(x) dx = \inf \int_a^b t(x) dx, \quad t \in T_f = \text{integrale superiore}$$

Se la funzione è limitata allora $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx$ f è **INTEGRABILE**.

$$\text{Se } \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx \Rightarrow \text{INTEGRALE DEFINITO}$$

Oss: non tutte le funzioni hanno l'integrale di f in $[a, b]$ superiore uguale a quello inferiore, quindi non tutte le funzioni sono integrabili.



$$\int_a^b f(x) dx$$

a, b = estremi di integrazione

f = integrando

x = variabile di integrazione

dx = differenziale (incremento infinitesimo)

FUNZIONI INTEGRABILI

- Le funzioni continue in $[a, b]$;
- Le funzioni monotone in $[a, b]$;
- Le funzioni limitate in $[a, b]$ con un numero finito di punti di discontinuità.

La funzione di **DIRICHLET** non è integrabile perché ha infiniti punti di discontinuità.

TEOREMA DELLA MEDIA INTEGRALE

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

$$\text{Allora } \exists x_0 \in [a, b] \text{ tale che } f(x_0) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \Rightarrow (b-a)f(x_0) = \int_a^b f(x) dx$$

PRIMITIVE

Data $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Una funzione $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile e tale che $F'(x) = f(x), \forall x \in [a, b]$, è una **primitiva**

Oss: 1 se $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$, anche $F(x) + c, \forall c \in \mathbb{R}$, è una primitiva di $f(x)$ perché

$$D(F(x) + c) = F'(x) = f(x)$$

Oss: 2 se $F_1(x)$ e $F_2(x)$ sono primitive di $f(x)$, allora $F_1(x) - F_2(x) = c$, per qualche $c \in \mathbb{R}$.

Infatti, $F_1 - F_2$ è derivabile e $D(F_1(x) - F_2(x)) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0, \forall x \in [a, b]$

\Rightarrow come conseguenza di Lagrange

$$F_1(x) - F_2(x) = c, \quad c \in \mathbb{R}$$

In conclusione, se $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$, $F(x) + c$ è la famiglia di tutte le primitive di $f(x)$.

TEOREMA

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

Se $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$, allora

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) := F(x)|_a^b := [F(x)]_a^b$$

è la **FORMULA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE**

INTEGRALE INDEFINITO

Data $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

Si dice **integrale indefinito** di f , e si indica come $\int f(x) dx$ la famiglia di tutte le primitive di $f(x)$.

INTEGRAZIONE PER PARTI

Siano $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivabili con f' e g' continue. Allora:

- $\int_a^b f'(x)g(x) dx = f(x) \cdot g(x)|_a^b - \int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx$ per l'integrale definito
- $\int f(x)g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx$ per l'integrale indefinito

INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE

$$\int f(x) dx \quad x = g(t)$$

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua e sia $g : [c, d] \rightarrow [a, b]$ derivabile con derivata continua.

Allora $\int f(x) dx = \int f(g(t)) g'(t) dt \quad x = g(t)$

Se g è anche monotona (dunque invertibile), allora $\int f(x) dx = [\int f(g(t)) g'(t) dt] \quad t = g^{-1}(t)$

- 1) $x = g(t)$
- 2) $dx = g'(t) dt$
- 3) $\int f(x) dx = \int f(g(t)) g'(t) dt$
- 4) Tornare a x

PER INTEGRALE DEFINITO

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \int_{t_1}^{t_2} f(g(t)) \cdot g'(t) dt$$

$$x_1 = g(t_1) \quad x_2 = g(t_2)$$

DERIVATE FONDAMENTALI

- $f(x) = k$ (costante)
 $f'(x) = 0$
- $f(x) = x$
 $f'(x) = 1$
- $f(x) = x^2$
 $f'(x) = 2x$
- $f(x) = x^n$
 $f'(x) = nx^{n-1}$
- $f(x) = \sqrt{x}$
 $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- $f(x) = \sqrt[n]{x}$
 $f'(x) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
- $f(x) = \sin x$
 $f'(x) = \cos x$
- $f(x) = \cos x$
 $f'(x) = -\sin x$
- $f(x) = \ln x$
 $f'(x) = \frac{1}{x}$
- $f(x) = e^x$
 $f'(x) = e^x$
- $f(x) = \log_a x$
 $f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \log_a e$
- $f(x) = \tan x$
 $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $f(x) = \cotg(x)$
 $f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$
- $f(x) = \arcsin(x)$
 $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $f(x) = \arccos(x)$
 $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $f(x) = \arctan(x)$
 $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$
- $f(x) = \text{arccotg}(x)$
 $f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$
- $f(x) = x e^{-x+1} \Rightarrow f'(x) = (x^1 \cdot e^{-x+1}) + x(e^{-x+1})^1$

DERIVATE DI FUNZIONI COMPOSITE

- $y = [f(x)]^n$
 $y' = n f(x)^{n-1} \cdot f'(x)$
- $y = \sqrt{f(x)}$
 $y' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$
- $y = \ln f(x)$
 $y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$
- $y = e^{f(x)}$
 $y' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$
- $y = \sin f(x)$
 $y' = \cos f(x) \cdot f'(x)$
- $y = \cos f(x)$
 $y' = -\sin f(x) \cdot f'(x)$
- $y = \sqrt[n]{f(x)}$
 $y' = \frac{f'(x)}{n \sqrt[n]{f(x)^{n-1}}}$
- $y = \arcsin f(x)$
 $y' = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}$
- $y = \arctan f(x)$
 $y' = \frac{f'(x)}{1+f(x)^2}$
- $y = \tan f(x)$
 $y' = \frac{1}{\cos^2 f(x)} \cdot f'(x)$
- $y = [f(x)]^{g(x)}$
 $y' = y \cdot \left[g'(x) \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} \right]$
- $y = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow y' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

INTEGRALI IMMEDIATI

$$\int dx = x + C \quad \cdot \int e^x dx = e^x + C \quad \cdot \int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$$

$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C \quad \cdot \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C \quad \cdot \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C \quad \cdot \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 \pm x^2}} dx = \begin{cases} (+) \arcsin x + C \\ (-) \arccos x + C \end{cases} \quad \cdot \int \frac{1}{x^2 \pm 1} dx = \begin{cases} (+) \arctan x + C \\ (-) \operatorname{arccot} x + C \end{cases}$$

INTEGRALI COMPOSTI

$$\int f'(x) f(x)^d dx = \frac{f(x)^{d+1}}{d+1} + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int f'(x) e^{f(x)} dx = e^{f(x)} + C$$

$$\int f'(x) \sin f(x) dx = -\cos f(x) + C$$

$$\int f'(x) \cos f(x) dx = \sin f(x) + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)} dx = \tan f(x) + C \quad \cdot \int \frac{f'(x)}{\sin^2 f(x)} dx = -\cot f(x) + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1 - [f(x)]^2}} dx = \arcsin f(x) + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{1 + [f(x)]^2} dx = \arctan f(x) + C$$

INTEGRAZIONE DI UNA FUNZIONE FRATTA

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx \rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} \begin{array}{l} \xrightarrow{D(x)} \\ \xrightarrow{Q(x)} \end{array}$$

$$= \int Q(x) dx + \int \frac{R(x)}{D(x)} dx$$

INTEGRAZIONE PER PARTI

$$\int f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) dx$$

ES: $\int x \ln x dx$

$$f(x) = \ln x$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$g(x) = \frac{x^2}{2}$$

$$g'(x) = x$$

$$I := \left(\frac{x^2}{2}\right) - \frac{1}{4} x^2 + C$$

INTEGRAZIONE PER PARTI (MOLTIPLICAZIONE PER 1)

$$\int \ln x dx = \int \ln x \cdot 1 dx$$

$$f(x) = \ln x$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$g(x) = x$$

$$g'(x) = 1$$

$$= x \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x dx = x \ln x - x + C, C \in \mathbb{R}$$

INTEGRALI CICLICI

$$\int e^x \sin x dx$$

$$f(x) = e^x$$

$$f'(x) = e^x$$

$$g(x) = -\cos x$$

$$g'(x) = \sin x$$

$$= -e^x \cos x - \int e^x (-\cos x) dx =$$

$$= -\cos x e^x + e^x (\sin x) - \int e^x (\sin x) dx =$$

$$= 2 \int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} (-\cos x e^x + e^x (\sin x)) =$$

$$\int e^x \sin x dx = \frac{-\cos x e^x + e^x \sin(x)}{2} + C, C \in \mathbb{R}$$