

**Laurea in Informatica e Tecnologie per la  
Produzione del Software  
Corso di Analisi Matematica**

**Stime asintotiche nel calcolo di limiti di funzioni**

Docente: Anna Valeria Germinario

Università di Bari

A.V.Germinario (Università di Bari)

Analisi Matematica – ITPS

Navigation icons: back, forward, search, refresh, and page indicator **1 / 10**

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

# Outline

- 1 Definizione di asintoticità
- 2 Proprietà delle funzioni asintotiche

A.V.Germinario (Università di Bari)

Analisi Matematica – ITPS

Navigation icons: back, forward, search, refresh, and page number 2 / 10.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

# Stime asintotiche

## Definizione

Date due funzioni  $f$  e  $g$  entrambe definite in un intorno di  $c \in \mathbb{R}^*$ , si dice che  $f(x)$  è **asintotica a**  $g(x)$  per  $x \rightarrow c$  se

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

In tal caso si scrive

$$f(x) \sim g(x) \quad \text{per } x \rightarrow c.$$

**Teorema**

Se  $f(x) \sim g(x)$  per  $x \rightarrow c$ , o sia  $f$  che  $g$  non hanno limite per  $x \rightarrow c$

oppure

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x).$$

Come verificare che  $f$  e  $g$  sono tra loro asintotiche: se esiste una funzione

$h$  tale che

$$f(x) = g(x) \cdot h(x)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow c} h(x) = 1$$

allora  $f(x) \sim g(x)$  per  $x \rightarrow c$ .

## Esempi

Per  $x \rightarrow 0$

- $\sin x \sim x$
- $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$
- $\operatorname{tg} x \sim x$
- $\arcsin x \sim x$
- $\operatorname{arctg} x \sim x$
- $e^x - 1 \sim x$
- $\log(1 + x) \sim x$
- $(1 + x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$

A.V.Germinario (Università di Bari)

Analisi Matematica – ITPS

5 / 10

## Proprietà dell'asintoticità

- **Proprietà riflessiva.** Se per  $x \rightarrow c$   $f(x) \sim g(x)$  allora anche  $g(x) \sim f(x)$ .  
Si può semplicemente dire che “due funzioni sono asintotiche tra loro” invece che “la prima è asintotica alla seconda”.
- **Proprietà transitiva.** Se per  $x \rightarrow c$   $f(x) \sim g(x)$  e  $g(x) \sim h(x)$  allora anche  $f(x) \sim h(x)$ .  
Si può procedere mediante catene di relazioni asintotiche.
- **Funzione asintotica ad una costante.** Per  $x \rightarrow c$ ,  $f(x) \rightarrow l$  ( $l$  numero reale diverso da 0) se e solo se  $f(x) \sim l$ .  
Spesso l'ultimo termine di una catena di stime asintotiche è una costante. In tal caso coincide con il limite.



## Proprietà dell'asintoticità

- **Asintoticità e prodotti/quotienti.** Se per  $x \rightarrow c$

$$f_1(x) \sim g_1(x) \quad f_2(x) \sim g_2(x)$$

allora anche

$$f_1(x) \cdot f_2(x) \sim g_1(x) \cdot g_2(x);$$

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} \sim \frac{g_1(x)}{g_2(x)};$$

$$(f_1(x))^p \sim (g_1(x))^p;$$

per ogni  $p > 0$ .



## Proprietà dell'asintoticità

In generale l'operazione di **composizione** tra funzioni non mantiene l'asintoticità: per  $x \rightarrow +\infty$ ,  $x \sim x + 1$  ma non è vero che  $e^x \sim e^{x+1}$ . Il teorema del limite della funzione composta permette di applicare le stime precedenti in modo più flessibile.

- Se  $c \in \mathbb{R}^*$ ,  $\varepsilon(x) \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow c$  e inoltre la funzione  $\varepsilon(x)$  è definitivamente diversa da 0 per  $x \rightarrow c$ , allora per  $x \rightarrow c$

$$\sin \varepsilon(x) \sim \varepsilon(x);$$

$$e^{\varepsilon(x)} - 1 \sim \varepsilon(x);$$

$$\log(1 + \varepsilon(x)) \sim \varepsilon(x)$$

e così via per gli altri limiti notevoli.



## Proprietà dell'asintoticità

Bisogna fare attenzione a:

- **Precisare sempre il punto  $c$ .**

È vero che  $\sin x \sim x$  per  $x \rightarrow 0$  ma non che  $\sin x \sim x$  per  $x \rightarrow +\infty$ .

- **Non usare “asintotico” come “uguale”.**

Dalla relazione

$$e^x \sim 1 \sim 1 + x^2 \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

non si può dedurre la relazione

$$e^x - 1 \sim x^2 \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

(che è falsa).



## Proprietà dell'asintoticità

Anche l'operazione di **somma** tra funzioni in generale non mantiene l'asintoticità: per  $x \rightarrow 0$ ,  $\sin x \sim x$  e  $-x \sim -x$  ma non è vero che  $\sin x - x \sim 0$ .

In casi particolari l'asintoticità si conserva.

- Sia  $c = 0$  oppure  $c = \pm\infty$ . Se per  $x \rightarrow c$ ,  $f(x) \sim C_1x^p$  e  $g(x) \sim C_2x^q$  (ove  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$  e  $p, q > 0$ ) e inoltre

$$C_1x^p + C_2x^q \neq 0 \quad \text{definitivamente per } x \rightarrow c$$

allora

$$f(x) + g(x) \sim C_1x^p + C_2x^q \quad \text{per } x \rightarrow c.$$

