CORSO DI STUDI IN INGEGNERIA CIVILE

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI NICCOLÒ CUSANO

Anno Accademico 2013/2014

Dispense di

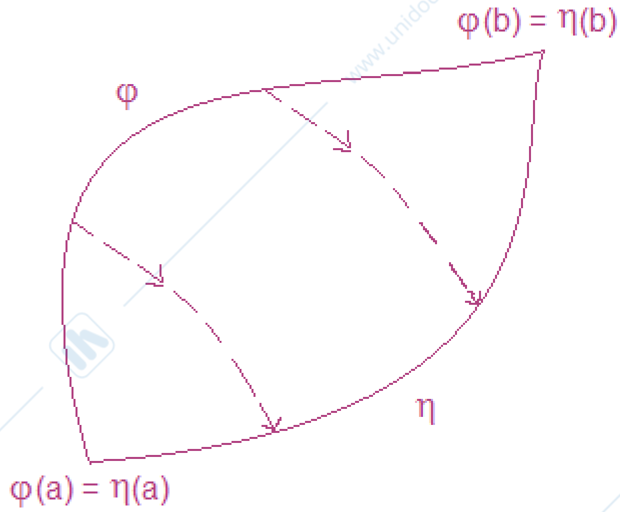
ANALISI MATEMATICA II
Modulo 26

Docente: Dott. Valerio Marchisio

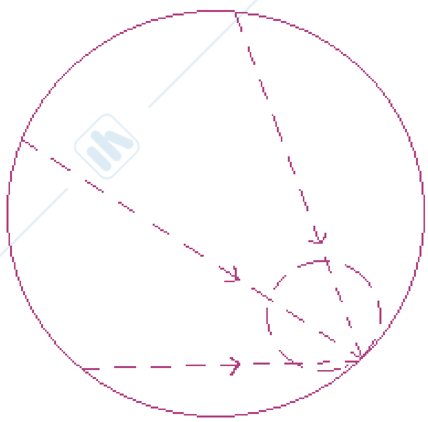
Campi conservativi

Abbiamo visto nel precedente modulo la condizione integrale sufficiente affinché una campo vettoriale sia conservativo. Consideriamo ora una condizione analoga di più facile verifica. Abbiamo però bisogno di alcune nozioni preliminari.

Definizione 26.1 (Curve omotope) Siano $A \subset \boldsymbol{R}^n$ aperto, $\varphi: [a, b] \to \boldsymbol{R}^n$ e $\eta: [a, b] \to \boldsymbol{R}^n$ due curve regolari a tratti in A con gli stessi estremi, cioè tali che $\varphi(a) = \eta(a)$ e $\varphi(b) = \eta(b)$. Diciamo che φ e η sono *omotope* in A se esiste una deformazione continua in A della curva φ nella curva η che tenga fissi gli estremi.

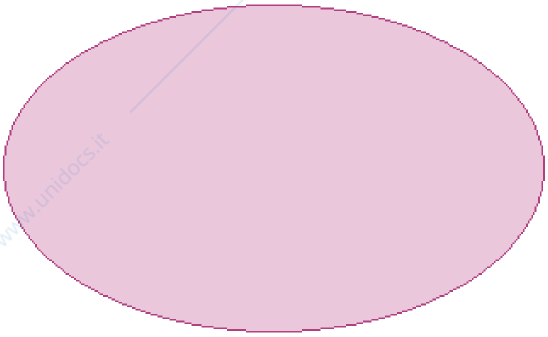


In particolare, data una curva chiusa $\varphi: [a, b] \to \boldsymbol{R}^n$ a valori in A diciamo che φ è *contrattile* in A se φ è omotopa in A alla curva banale che si riduce ad un solo punto $a \in A$.

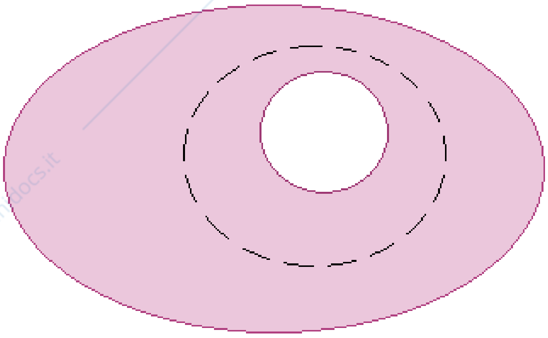


Definizione 26.2 (Aperti semplicemente connessi) Diciamo che un aperto $A \subset \boldsymbol{R}^n$ connesso per poligonali è *semplicemente connesso* se ogni curva chiusa regolare a tratti $\varphi: [a, b] \to \boldsymbol{R}^n$ a valori in A è contrattile in A.

Osserviamo che in dimensione 2 un insieme semplicemente connesso è un insieme che non ha "buchi" al suo interno. Si vedano le due figure seguenti:



Aperto semplicemente connesso



Aperto non semplicemente connesso

Nello spazio tridimensionale non tutti i "buchi" provocano la perdita della semplice connessione di un aperto. Ad esempio, una palla a cui è tolta una palla concentrica di raggio minore è ancora semplicemente connessa.

Possiamo enunciare a questo punto il secondo Teorema che ci dà una condizione sufficiente affinché una campo vettoriale sia conservativo.

Teorema 26.3 (Condizione differenziale sufficiente affinché un campo sia conservativo) Sia $A \subset \boldsymbol{R}^n$ un aperto semplicemente connesso e sia $\vec{F}: A \to \boldsymbol{R}^n$ un campo vettoriale $C^1(A)$ irrotazionale. Allora $\vec{F}$ è conservativo.

Non dimostriamo questo risultato. Osserviamo però come la verifica delle ipotesi del Teorema 26.3 sia piuttosto agevole in quanto richiede il calcolo delle derivate seconde del campo vettoriale e la verifica della semplice connessione dell'aperto su cui è definito.
Nell'Osservazione 25.8 abbiamo fornito un controesempio di un campo irrotazionale non conservativo. In quel caso, abbiamo definito l'insieme $A = \boldsymbol{R}^2 \setminus \{0\}$ che non è semplicemente connesso e che quindi non consente l'applicazione del Teorema 26.3.

Cerchiamo ora di rispondere al problema della determinazione del potenziale una volta assegnato un campo conservativo. Consideriamo due metodi che sfruttano ovviamente la relazione tra potenziale e campo vettoriale.
In entrambi i casi, per semplicità, consideriamo il caso bidimensionale.

1. **Metodo degli integrali curvilinei**. Siano $A = (x_0, y_0)$ e $B = (x, y)$ due punti nell'insieme A e φ una curva che congiunge A e B. Sappiamo che

$$\int_{\varphi} \vec{F} = \Phi(x, y) - \Phi(x_0, y_0)$$

Se cerchiamo il potenziale che vale 0 in $A = (x_0, y_0)$ (il potenziale è definito a meno di una costante additiva) allora

$$\Phi(x, y) = \int_{\varphi} \vec{F}$$

2. **Metodo degli integrali indefiniti.** Questo metodo si basa sulle relazioni differenziali

$$\begin{cases} \partial_x \Phi(x, y) = F_1(x, y) \\ \partial_y \Phi(x, y) = F_2(x, y) \end{cases}$$

Possiamo integrare una delle due relazioni rispetto alla variabile che compare nella derivata, ad esempio la prima. Otteniamo

$$\Phi(x, y) = \int F_1(x, y) dx + \alpha(y)$$

dove $\alpha(y)$ è la costante di integrazione che può dipendere da y in quanto abbiamo integrato rispetto alla sola variabile x. A questo punto, sostituendo nella seconda equazione del sistema

$$\frac{\partial}{\partial_y} \int F_1(x, y) dx + \alpha'(y) = F_2(x, y)$$

possiamo ricavare la funzione $\alpha(y)$ e determinare (a meno di una costante additiva) il potenziale del campo vettoriale.

Esempi 26.4 Vediamo due esempi che chiariscano i due metodi appena introdotti per il calcolo di un potenziale di campo vettoriale in dimensione 2. In entrambi i casi sono verificate le ipotesi del Teorema 26.3.

1. Dato il campo conservativo $\vec{F}(x,y) = 2xy\,\boldsymbol{i} + x^2\,\boldsymbol{j}$, possiamo calcolare un suo potenziale come

$$\Phi(x,y) = \int_\varphi \vec{F}$$

dove φ è una qualsiasi curva che congiunge l'origine con il punto (x,y). Scegliamo per semplicità il segmento

$$\varphi(t) = (tx,ty) \qquad t \in [0,1]$$

Abbiamo che

$$\varphi'^{(t)} = (x,y)$$

e

$$\Phi(x,y) = \int_0^1 (2t^2xy\,,t^2x^2)\cdot(x,y)dt = \int_0^1 3x^2yt^2dt = x^2y$$

Effettivamente, vale la relazione $\nabla\Phi(x,y) = \vec{F}(x,y)$.

2. Consideriamo lo stesso campo del punto precedente. Abbiamo

$$\begin{cases} \partial_x\Phi(x,y) = F_1(x,y) = 2xy \\ \partial_y\Phi(x,y) = F_2(x,y) = x^2 \end{cases}$$

Integrando rispetto ad x la prima relazione abbiamo

$$\Phi(x,y) = \int 2xy\,dx + \alpha(y) = x^2y + \alpha(y)$$

A questo punto sostituiamo quest'ultima relazione nella seconda riga del sistema ottenendo

$$x^2 + \alpha'(y) = x^2$$

Ovvero $\alpha'(y) = 0$. Quindi α è una costante e il potenziale richiesto (a meno di una costante additiva) è

$$\Phi(x, y) = x^2 y$$

Esercizi 26.5 Risolviamo alcuni esercizi sul calcolo del potenziale per campi conservativi.

1. Stabilire se il campo vettoriale

$$\vec{F}(x, y) = e^{xy}(2xy + y^2 + 2, 2x^2 + xy + 1)$$

è conservativo nel proprio dominio di definizione e, in caso affermativo, calcolare il potenziale che si annulla nel punto $(0,1)$.

Soluzione Abbiamo che il dominio di $\vec{F}$ è tutto il piano $\boldsymbol{R}^2$ e $\vec{F} \in C^\infty(\boldsymbol{R}^2)$. Il piano $\boldsymbol{R}^2$ è ovviamente semplicemente connesso. Se dimostriamo che $\vec{F}$ è irrotazionale, per il Teorema 26.3 abbiamo che $\vec{F}$ è conservativo. Calcoliamo dunque le derivate parziali, indicando con $F_1(x, y)$ e $F_2(x, y)$ le due componenti del campo $\vec{F}$.

$$\partial_x F_2(x, y) = e^{xy}(2x^2 y + xy^2 + 4x + 2y)$$

$$\partial_y F_1(x, y) = e^{xy}(2x^2 y + xy^2 + 4x + 2y)$$

e quindi il rotore, che in dimensione 2 si riduce a $rot\, \vec{F} = \partial_x F_2 - \partial_y F_1$, risulta essere nullo. Abbiamo quindi che $\vec{F}$ è irrotazionale e quindi conservativo. Usiamo il metodo dell'integrazione indefinita per calcolare un generico potenziale di $\vec{F}$. Sappiamo che

$$\partial_{\mathrm{x}} \Phi(x, y) = F_1(x, y)$$

Quindi, integrando per parti,

$$\Phi(x, y) = \int e^{xy}(2xy + y^2 + 2)dx + \alpha(y) =$$

$$= \frac{1}{y} e^{xy}(2xy + y^2 + 2) - 2\int e^{xy}dx + \alpha(y) =$$

$$= e^{xy}(2x + y) + \alpha(y)$$

Imponendo la seconda condizione, ovvero

$$\partial_{\mathrm{y}}\Phi(x, y) = F_2(x, y)$$

abbiamo che

$$xe^{xy}(2x + y) + e^{xy} + \alpha'(y) = e^{xy}(2x^2 + xy + 1)$$

Che implica

$$\alpha' = 0 \;\; \Longrightarrow \alpha = c \in \boldsymbol{R} \;\; costante$$

Quindi il generico potenziale è pari a

$$\Phi(x, y) = e^{xy}(2x + y) + c$$

A questo punto, determiniamo il potenziale che si annulla nel punto (0,1) imponendo

$$\Phi(0,1) = 1 + c = 0$$

Per cui abbiamo $c = -1$. Pertanto, il potenziale richiesto è

$$\Phi(x, y) = e^{xy}(2x + y) - 1$$

2. Stabilire se il campo vettoriale

$$\vec{F}(x, y) = (y^2 + 2)\boldsymbol{i} + (2xy + 1)\boldsymbol{j}$$

è conservativo nel proprio dominio di definizione e, in caso affermativo, calcolare il potenziale che si annulla nel punto (0,2).

Soluzione Abbiamo che il dominio di $\vec{F}$ è tutto il piano $\boldsymbol{R}^2$ e $\vec{F} \in C^\infty(\boldsymbol{R}^2)$. Il piano $\boldsymbol{R}^2$ è semplicemente connesso. Verifichiamo la proprietà di irrotazionalità di $\vec{F}$.

$$\partial_x F_2(x, y) = 2y$$

$$\partial_y F_1(x, y) = 2y$$

e quindi il rotore è nullo. Abbiamo quindi che $\vec{F}$ è conservativo.
Procediamo come nell'esercizio precedente, integrando in x $F_1(x, y)$

$$\Phi(x, y) = \int (y^2 + 2)dx + \alpha(y) = x(y^2 + 2) + \alpha(y)$$

Imponiamo la seconda condizione ottendendo:

$$2xy + \alpha'(y) = (2xy + 1)$$

$$\Longrightarrow \alpha'(y) = 1 \quad \Longrightarrow \alpha(y) = y + c \qquad c \in \boldsymbol{R}$$

Quindi, tutti e soli i potenziali di $\vec{F}$ sono

$$\Phi(x, y) = xy^2 + 2x + y + c$$

Calcoliamo la costante c imponendo la condizione $\Phi(0,2) = 0$

$$\Phi(0,2) = 2 + c = 0 \qquad \Longrightarrow c = -2$$

Quindi, il potenziale richiesto è

$$\Phi(x, y) = xy^2 + 2x + y - 2$$