

A

LA TRASFORMATTA DI LAPLACE

- A.1 *La Trasformata di Laplace*
- A.2 *La Trasformata nell'analisi dei circuiti lineari*
- A.3 *L'antitrasformazione*

A.1 LA TRASFORMATA DI LAPLACE

L'applicabilità della trasformazione di Fourier è limitata alla classe di funzioni per le quali esiste finito l'integrale

$$f(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (\text{A.1})$$

Molti segnali utilizzati in Elettronica non soddisfano a questa condizione. Per esempio, il gradino unitario $f(t)=1(t)$, non infinitesimo per $t \rightarrow +\infty$, non è trasformabile secondo Fourier perché la presenza del termine oscillatorio rappresentato da $e^{-j\omega t}$ non consente all'integrale (A.1) di convergere. Segnali di questo tipo, ed a maggior ragione tutti i segnali elettrici trasformabili secondo Fourier, sono invece correttamente trattabili nell'ambito della teoria della Trasformata di Laplace. Essa assume come funzioni base non le sinusoidi di ampiezza costante $e^{-j\omega t}$, ma sinusoidi generalizzate la cui ampiezza varia con il tempo in maniera esponenziale, rappresentabili come

$$e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} = e^{-(\alpha+j\omega)t} = e^{-st},$$

dove α , numero reale, è l'inverso della costante di tempo dell'esponenziale. L'ampiezza delle sinusoidi cresce o decresce nel tempo a seconda che $\alpha < 0$ o $\alpha > 0$, come evidenziato nella Fig. A.1.

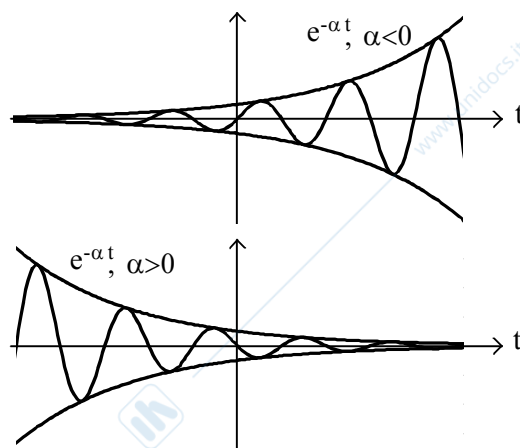


Fig. A.1 Andamento delle sinusoidi generalizzate nella cui somma può essere scomposto un segnale elettrico.

La trasformata di Laplace è definita come:

$$f(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot 1(t) \cdot e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt. \quad (\text{A.2})$$

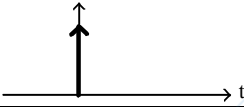
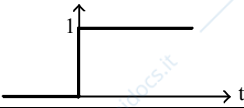
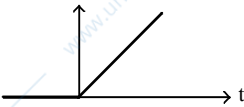
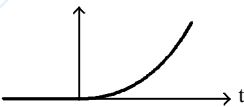
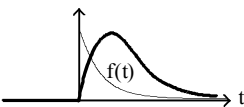
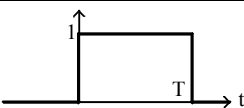
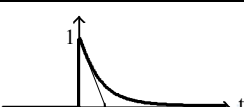
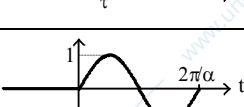

e permette di trattare funzioni $f(t)$ nulle per $t < 0$. Questa non è una limitazione poiché in Elettronica si hanno fenomeni causali, espressi da funzioni non nulle solo per tempi $t > 0$.

Un elenco di alcune delle proprietà della trasformata di Laplace è fornito nella Tab. A.1, mentre una raccolta delle trasformate di più largo uso nell'analisi dei circuiti elettronici è data nella Tab. A.2. Si rimanda al testo di Analisi Matematica per ogni ulteriore approfondimento.

PROPRIETA' [t]	FUNZIONE	TRASFORMATA	PROPRIETA' [s]
Linearità	$c_1 \cdot f_1(t) + c_2 \cdot f_2(t)$	$c_1 \cdot f_1(s) + c_2 \cdot f_2(s)$	Linearità
Derivazione	$\frac{df(t)}{dt}$	$sf(s)$	Moltiplicazione per s
Integrazione	$\int f(t) dt$	$\frac{1}{s} f(s)$	Divisione per s
Moltiplicazione per t	$t \cdot f(t)$	$-\frac{df(s)}{ds}$	Derivazione
Traslazione nel tempo	$f(t-T)$	$e^{-sT} f(s)$	Moltiplicazione per un'esponenziale
Valore iniziale	$f(0^+)$	$\lim_{s \rightarrow \infty} sf(s)$	
Valore finale	$f(\infty)$	$\lim_{s \rightarrow 0} sf(s)$	
Convoluzione	$f(t) * g(t)$	$f(s) \cdot g(s)$	

Tab. A.1 Proprietà della trasformata di Laplace.

4 Appunti del corso "Elettronica Analogica" Prof. Marco Sampietro - POLIMI

NOME DELLA FUNZIONE	$f(t)$	RAPPRESENTAZIONE GRAFICA	$f(s)$
δ di Dirac	$\delta(t)$		1
Gradino unitario	$1(t)$		$\frac{1}{s}$
Rampa lineare	$t \cdot 1(t)$		$\frac{1}{s^2}$
Potenze n-esime	$t^n \cdot 1(t)$		$\frac{n!}{s^{n+1}}$
	$t^n \cdot f(t) \cdot 1(t)$		$(-1)^n \frac{d^n}{ds^n} f(s)$
Rettangolo	$1(t) - 1(t-T)$		$\frac{1}{s}(1 - e^{-sT})$
Discesa esponenziale	$e^{-t/\tau} 1(t)$		$\frac{1}{s + 1/\tau}$
Sinusoide	$1(t) \cdot \sin(\alpha t)$		$\frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2}$
Cosinusoide	$1(t) \cdot \cos(\alpha t)$		$\frac{s}{s^2 + \alpha^2}$

Tab. A.2 Trasformata di Laplace di alcune funzioni elementari.

A.2 LA TRASFORMATATA NELL'ANALISI DEI CIRCUITI LINEARI

A.2.1 L'impedenza e la funzione di trasferimento

Un'applicazione diretta della trasformata di Laplace si ha nello studio dell'evoluzione temporale di sistemi lineari a parametri concentrati e costanti. Questi sistemi sono descritti da equazioni integro-differenziali a derivate ordinarie e coefficienti costanti, del tipo

$$a \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + b \frac{dx(t)}{dt} + c x(t) + d \int_0^t x(t) dt = y(t). \quad (\text{A.3})$$

La trasformazione di Laplace consente, utilizzando le proprietà della Tab. A.1, di riportare la soluzione delle equazioni differenziali alla soluzione di equazioni lineari algebriche del tipo:

$$a s^2 x(s) + b s x(s) + c x(s) + \frac{d}{s} x(s) = y(s),$$

dove le incognite del sistema sono le trasformate di Laplace delle grandezze elettriche incognite. La trasformata della funzione incognita, $x(s)$, è quindi

$$x(s) = y(s) \frac{1}{a s^2 + b s + c + d/s}.$$

Essa, una volta antitrasformata, fornisce la funzione incognita nel dominio del tempo. La soluzione dei sistemi algebrici lineari è sempre data da funzioni complesse razionali fratte, del tipo

$$f(s) = \frac{a_0 s^m + a_1 s^{m-1} + \dots + a_m}{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_m}, \quad (\text{A.4})$$

dove, perché $f(s)$ rappresenti la funzione di trasferimento di un sistema fisicamente realizzabile, i coefficienti devono essere tutti reali. Perciò le eventuali radici complesse del numeratore e del denominatore sono certamente complesse coniugate.

In base alle relazioni caratteristiche nel dominio del tempo ed alle proprietà della trasformata di Laplace, si ottengono le seguenti relazioni tra le trasformate di Laplace della tensione, $v(s)$, e della corrente, $i(s)$, ai morsetti dei bipoli elementari:

6 Appunti del corso "Elettronica Analogica" Prof. Marco Sampietro - POLIMI

Resistore	$v(t)=R \cdot i(t)$	$v(s)=R \cdot i(s)$	$v(s)/i(s)=\mathbf{Z(s)=R}$
Condensatore	$i(t)=C \frac{dv(t)}{dt}$	$i(s)=s \cdot C \cdot v(s)$	$v(s)/i(s)=\mathbf{Z(s)=\frac{1}{sC}}$
Induttore	$v(t)=L \frac{di(t)}{dt}$	$v(s)=s \cdot L \cdot i(s)$	$v(s)/i(s)=\mathbf{Z(s)=sL}$

La funzione $Z(s)$, caratteristica di ogni bipolo, è chiamata **impedenza simbolica** del bipolo e le relazioni precedenti definiscono nel dominio delle trasformate delle **leggi di Ohm generalizzate**, che legano le trasformate $v(s)$ e $i(s)$ per i bipoli elementari.

Non è un caso che le impedenze simboliche trovate siano simili a quelle associate agli stessi bipoli nelle reti in regime sinusoidale, pur di scegliere $s=j\omega$. Ciò discende dallo stretto legame esistente tra la trasformata di Laplace e quella di Fourier. E' infatti ben noto come la prima possa infatti intendersi come generalizzazione della seconda.

L'impiego della trasformata di Laplace ha una notevole conseguenza pratica in quanto permette di rappresentare, fin dall'inizio, il circuito elettronico come composto da bipoli simbolici di impedenza $Z(s)$ e di ricercare i legami tra $v(s)$ ed $i(s)$ nei vari nodi e rami del circuito, risolvendo semplicemente un sistema algebrico invece che un sistema di equazioni differenziali.

Ad esempio si consideri il semplice circuito della Fig. A.2a, inizialmente a riposo e con il condensatore scarico.

Poichè tutte le variabili elettriche della rete sono nulle per $t < 0$ è possibile utilizzare la Trasformata di Laplace. Dal circuito della Fig. A.2a si ricava il corrispondente circuito simbolico in cui ad ogni bipolo è sostituita la sua impedenza simbolica e ad ogni generatore forzante $i(t)$ e/o $e(t)$ sono sostituiti i generatori forzanti simbolici rappresentati dalle trasformate $i(s)$ e/o $e(s)$, come si può vedere nella Fig. A.2b. Le variabili elettriche della rete simbolica sono le trasformate di Laplace

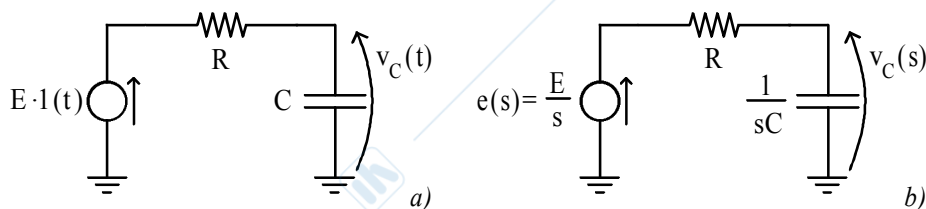


Fig. A.2 a) Circuito RC per l'analisi nel dominio del tempo; b) corrispondente circuito simbolico per l'analisi nel dominio della trasformata di Laplace.

delle tensioni e delle correnti. La rete simbolica così ottenuta può essere risolta applicando i principi di Kirchhoff alle trasformate di Laplace delle variabili, nella stessa forma in cui tali principi verrebbero applicati ad una rete puramente resistiva. Nel nostro caso

$$\frac{E/s}{R + \frac{1}{sC}} \cdot \frac{1}{sC} = v_C(s),$$

Il rapporto tra le trasformate di Laplace della variabile elettrica osservata, $v_C(s)$, e della causa forzante, $e(s)$, definisce la funzione di trasferimento della rete nel dominio della variabile complessa s :

$$T(s) = \frac{v_C(s)}{e(s)} = \frac{1}{1 + sRC}.$$

Questa funzione diverge per $s = -1/RC$ ed è schematicamente rappresentata nella Fig. A.3. La sezione della $T(s)$ lungo il semiasse $j\omega$ è la funzione $T(j\omega)$ che descrive compiutamente il comportamento della rete in risposta ad una forzante sinusoidale.

D'altro canto, la conoscenza della $T(s)$ consente di determinare la risposta della rete a qualunque forzante.

In generale la funzione di trasferimento $T(s)$ è una funzione razionale fratta del tipo (A.4). *Le radici del denominatore della $T(s)$ sono dette poli* della

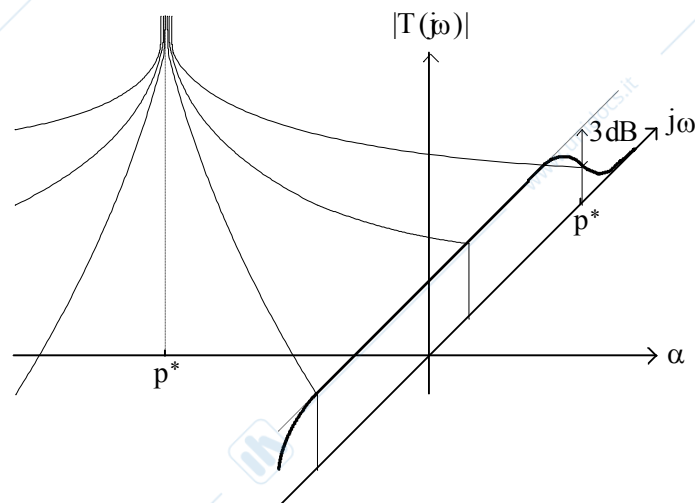


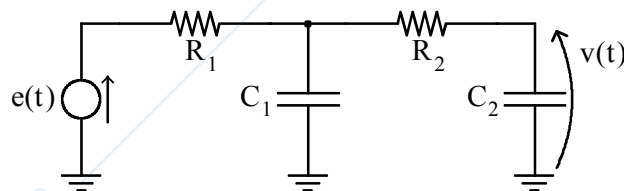
Fig. A.3 Rappresentazione grafica di una funzione di trasferimento $|T(s)|$ e di $|T(j\omega)|$.

8 Appunti del corso "Elettronica Analogica" Prof. Marco Sampietro - POLIMI

rete, mentre le radici del numeratore sono dette **zeri**.

Ricordando che la trasformata della delta di Dirac è unitaria, si riconosce che $T(s)$ altro non è che la trasformata di Laplace della risposta della rete ad una forzante $e(t)=\delta(t)$. Ecco perché si dice che la risposta di un circuito ad una forzante impulsiva caratterizza completamente il comportamento del circuito stesso: perché essa rappresenta la funzione di trasferimento del circuito la quale è unica per un dato circuito lineare a parametri costanti.

E A.1 Si consideri la rete mostrata nella figura seguente. Si valuti simbolicamente la sua funzione di trasferimento e si determini la posizione dei poli quando a) $R_1=R_2=10k\Omega$ e $C_1=C_2=10nF$ e b) $R_1=10k\Omega$, $R_2=100k\Omega$, $C_1=10nF$ e $C_2=1nF$. Commentare il risultato.



Sostituendo a ciascun elemento circuitale la relativa impedenza complessa (per esempio, al condensatore C l'impedenza $1/sC$), si ottiene la rete simbolica associata. La funzione di trasferimento è quindi ottenuta applicando le leggi di Kirchhoff

$$T(s) = \frac{v(s)}{e(s)} = \frac{1}{s^2(C_1C_2R_1R_2) + s[C_1R_1 + C_2(R_1 + R_2)] + 1}$$

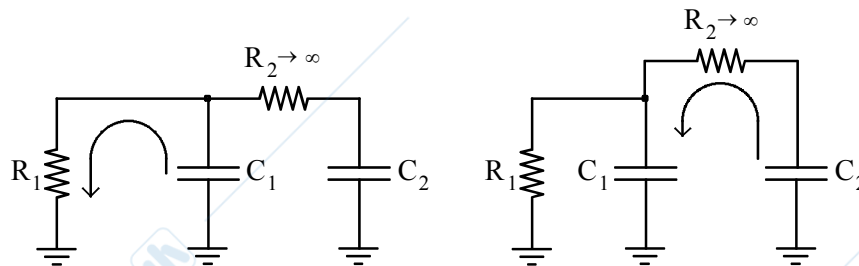
La rete presenta due poli. Infatti ci sono due condensatori indipendenti. Il trasferimento in continua si ottiene ponendo $s=0$, $T(0)=1$. Questo risultato era prevedibile. Infatti se il generatore forzante fosse un generatore stazionario, i condensatori sarebbero dei circuiti aperti e quindi nelle resistenze non fluirebbe corrente. In definitiva la tensione d'uscita sarebbe esattamente pari alla tensione erogata dal generatore, ovvero il trasferimento operato dalla rete in continua sarebbe unitario.

Valutiamo ora i poli della rete. Per semplicità di scrittura poniamo $R_1C_1=R_2C_2=\tau$ e $\tau_c=R_1C_2$. I poli della funzione di trasferimento trovata sono:

$$p_{1/2} = -\frac{1}{\tau} \left[\left(1 + \frac{\tau_c}{2\tau} \right) \pm \sqrt{\frac{\tau_c}{\tau} + \left(\frac{\tau_c}{2\tau} \right)^2} \right]$$

Nell'ipotesi che $R_1=R_2=10\text{k}\Omega$ e $C_1=C_2=10\text{nF}$, si ha $\tau=\tau_c=100\mu\text{s}$ e i due poli sono corrispondenti alle pulsazioni $\omega_1=3.8\cdot 10^3\text{rad/s}$ e $\omega_2=2.6\cdot 10^4\text{rad/s}$, ovvero alle frequenze $f_1=608\text{Hz}$ e $f_2=4.1\text{kHz}$.

Nell'ipotesi che $R_1=10\text{k}\Omega$, $R_2=100\text{k}\Omega$, $C_1=10\text{nF}$ e $C_2=1\text{nF}$, si ha $\tau=100\mu\text{s}$ e $\tau_c=10\mu\text{s}$. Corrispondentemente i poli intervengono alle frequenze $f_1=1.16\text{kHz}$ e $f_2=2.18\text{kHz}$. In questo secondo caso le singolarità sono più vicine nonostante i prodotti R_1C_1 ed R_2C_2 siano sempre uguali. Anzi, se si mantengono costanti R_1C_1 ed R_2C_2 e si fa tendere C_2 a 0 ed R_2 ad ∞ si ha che $\tau_c\rightarrow 0$ ed i poli diventano coincidenti e pari ad $1/\tau$. Questo risultato è facilmente interpretabile ricordando che la costante di tempo associata ad un condensatore isolato è pari al prodotto della sua capacità per la resistenza vista ai suoi morsetti. Con l'aiuto della figura successiva, consideriamo cosa accade alla carica accumulata su ciascuno dei condensatori della rete nel caso limite che $C_2\rightarrow 0$ ed $R_2\rightarrow\infty$.



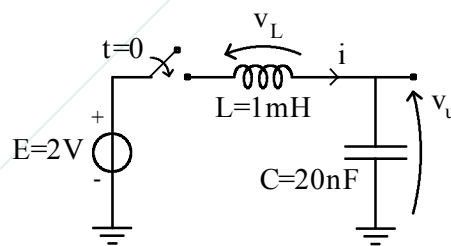
Ad esempio, si consideri la carica accumulata su C_1 . In assenza di segnale essa tenderebbe a defluire attraverso R_1 e la rete R_2C_2 . Ma se $R_2\rightarrow\infty$, allora la carica di C_1 fluisce attraverso R_1 con una costante di tempo pari ad $R_1C_1=\tau$ il condensatore C_1 tende a non interagire con C_2 . Si consideri ora la carica accumulata su C_2 . Essa defluisce attraverso R_2 e poi attraverso la rete R_1C_1 . Tuttavia l'impedenza offerta da questa rete alla corrente che defluisce attraverso R_2 è sempre trascurabile rispetto ad R_2 , se quest'ultima resistenza tende ad ∞ . Quindi la costante di tempo di scarica del condensatore è al limite pari a $R_2C_2=\tau$. L'effetto del condensatore C_1 sulla scarica di C_2 diventa trascurabile. In definitiva la scarica dei due condensatori avviene indipendentemente, senza che l'uno influenzi l'altro. Ecco quindi perché, in questo caso limite, la rete presenta due poli coincidenti e pari ad $R_1C_1=R_2C_2$.

Viceversa, nel caso in cui $R_1=R_2$ e $C_1=C_2$ la situazione non è così semplice perché i condensatori interagiscono tra loro. Le reti RC sono accoppiate e le corrispondenti singolarità non sono più coincidenti ma tendono a separarsi. Questa separazione delle costanti di tempo caratteristiche si verifica sempre quando due reti sono messe in interazione e va sotto il nome di *pole splitting*. Pertanto, le costanti di tempo proprie di due reti variano a seconda che esse siano o meno interagenti. Questa variazione è tanto più marcata quanto più sono prossime le costanti di tempo originarie.

10 Appunti del corso "Elettronica Analogica" Prof. Marco Sampietro - POLIMI

In termini ancor più generali si può notare che il *pole splitting* avviene non solo nelle reti elettriche ma in tutti i sistemi fisici interagenti. Per esempio, il *pole splitting* è alla base della formazione delle bande di energia di un reticolo cristallino. In questo caso due atomi identici presi separatamente hanno i livelli energetici degli elettroni coincidenti. Quando essi sono messi l'uno accanto all'altro ad interagire per formare il cristallo, ciascun livello energetico si divide in due livelli energetici leggermente diversi. Il legame di N atomi crea bande energetiche di N livelli ciascuna.

E A.2 Valutare, utilizzando il metodo della trasformata di Laplace, l'andamento temporale della tensione che si ha ai capi del condensatore quando dopo che all'istante $t=0$ si chiude l'interruttore. Tutti i componenti reattivi sono inizialmente scarichi



La chiusura dell'interruttore può essere schematizzata supponendo di applicare alla rete è applicato un segnale $E \cdot 1(t)$, con $E=2V$. E' facile verificare che la funzione di trasferimento della rete è

$$T(s) = \frac{v_u(s)}{e(s)} = \frac{1}{s^2 LC + 1}$$

La trasformata di Laplace della risposta alla forzante $E1(t)$ è pari a

$$v_u(s) = \frac{E}{s} \frac{1}{s^2 LC + 1} = \frac{E\omega_0}{s} \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$$

dove si è posto $\omega_0^2 = 1/LC$. Ricorrendo alle Tab. A.1 e A.2, si riconosce che la suddetta funzione è la trasformata di Laplace della funzione

$$v_u(t) = E\omega_0 \int_0^t \sin(\omega_0 t) 1(t) dt = E(1 - \cos(\omega_0 t)) 1(t)$$

E A.3 Per visualizzare i segnali elettrici in un circuito, si utilizzano degli oscilloscopi. Il nodo di cui si vuol verificare la variazione di potenziale è connesso, attraverso una sonda, all'ingresso dello strumento, che ha una impedenza d'ingresso caratterizzata da una resistenza di circa $1M\Omega$ e da una capacità parassita di circa $10pF$.

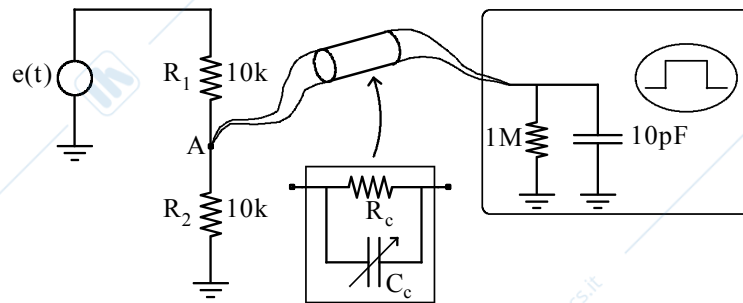
a) Se la sonda fosse semplicemente un filo di collegamento tra il nodo (A) e lo strumento, quale sarebbe la massima frequenza del segnale che potrebbe essere visualizzata dall'oscilloscopio?

b) Tracciare l'andamento del segnale che sarebbe visualizzato se $e(t)=E \cdot 1(t)$, con $E=1V$.

Le sonde più comuni sono invece caratterizzate dalla presenza, in prossimità della punta, di una rete $R_c C_c$ ($R_c=10M\Omega$, $C_c=1pF$) che serve a creare un partitore compensato con l'impedenza d'ingresso dell'oscilloscopio.

c) Qual è l'impedenza ora presente in parallelo ad R_2 ?

d) Qual è l'andamento nel tempo del segnale sul nodo (A) in risposta ad una forzante a gradino $e(t)=E1(t)$, con $E=1V$?



(a) - Se la sonda fosse semplicemente un filo di collegamento, il comportamento del circuito sarebbe perturbato dalla sua connessione all'oscilloscopio. Infatti la capacità parassita all'ingresso dello strumento determina un polo con una costante di tempo pari a circa $10pF \cdot 5k\Omega = 50ns$. Quindi la massima frequenza per cui il segnale di tensione sul nodo d'uscita non risente significativamente della connessione con la sonda è $1/(2\pi \cdot 50ns) = 3.18MHz$. Si noti che un buon oscilloscopio da laboratorio è costruito per poter intrinsecamente visualizzare segnali fino a frequenze di 200MHz. Una simile connessione renderebbe quindi del tutto inutile l'uso di uno strumento di elevate prestazioni.

(b) - L'andamento temporale della risposta al segnale a gradino avrebbe il tipico andamento

$$v = E(1 - e^{-t/\tau})$$

12 Appunti del corso "Elettronica Analogica" Prof. Marco Sampietro - POLIMI

con costante di tempo $\tau = 50\text{ns}$ e valore asintotico E raggiunto in continua pari a 0.5V .

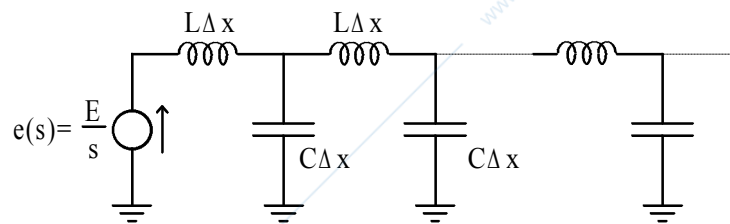
(c) - La presenza della sonda collegata con l'oscilloscopio fa sì che l'impedenza che il punto A vede verso lo strumento abbia una componente resistiva pari a $11\text{M}\Omega$ ed una componente capacitiva pari a 0.9pF . Rispetto all'uso di un semplice filo, si ha un minor carico del punto A e, quindi, una più fedele misura.

(d) - Il segnale nel punto A ha ora una costante di tempo pari a solo 4.5ns . Lo strumento, che visualizza il segnale presente ai suoi morsetti di ingresso, mostra sullo schermo il segnale con lo stesso andamento temporale presente in A. Questo si esprime dicendo che la rete $R_c C_c$ realizza con la rete $1\text{M}\Omega, 10\text{pF}$ un **partitore compensato**. L'unico effetto della rete è che l'ampiezza del segnale è diminuita dal rapporto $1\text{M}\Omega/10\text{M}\Omega$, ed è quindi pari a 50mV . Una sonda di questo tipo è detta 10X . Se l'oscilloscopio ha una banda di 200MHz , scegliendo una sonda opportuna, si possono visualizzare segnali con tempi di salita fino a $2.2/(2\pi \cdot 200\text{MHz}) = 1.7\text{ns}$.

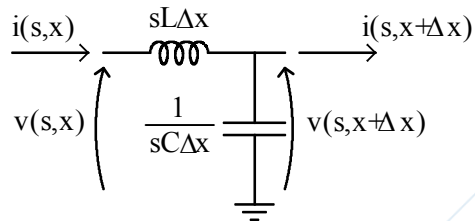
Per garantire la perfetta compensazione, l'impedenza sulla punta della sonda è regolata, variando il valore della capacità C_c , la prima volta che essa viene connessa al relativo oscilloscopio. Se si cambia oscilloscopio, la sonda deve essere nuovamente calibrata per compensare le variazioni, sia pur minime, dell'impedenza di ingresso degli strumenti. Ecco perché in genere ogni oscilloscopio ha il suo insieme di sonde calibrate.

E A.4

Si consideri la rete della figura seguente. Essa è la schematizzazione di un cavo coassiale, in cui C ed L sono rispettivamente la capacità e l'induttanza per unità di lunghezza. All'istante $t=0$ il generatore di tensione applica un segnale $E1(t)$. Determinare l'andamento temporale della tensione e della corrente ad una generica distanza x dall'inizio del cavo.



Si consideri la singola cella L, C del cavo



E' facile ricavare le seguenti equazioni di bilancio

$$v(s, x) = v(s, x + \Delta x) + sL\Delta x \cdot i(s, x)$$

$$i(s, x + \Delta x) = i(s, x) - sC\Delta x \cdot v(s, x + \Delta x)$$

Dividendo i due membri per Δx e passando al limite per $\Delta x \rightarrow 0$, si ha

$$\frac{dv(s, x)}{dx} = -sLi(s, x) \qquad \frac{di(s, x)}{dx} = -sCv(s, x)$$

Ovvero, sostituendo la seconda relazione nella prima

$$\frac{d^2 v(s, x)}{dx^2} = s^2 LCv(s, x),$$

che, integrata, ha come soluzione generale

$$v(s, x) = Ae^{-s\sqrt{LC}x} + Be^{s\sqrt{LC}x}.$$

Ricordando che la moltiplicazione per una esponenziale nel dominio delle trasformate corrisponde ad una traslazione temporale (Tab. 1.2), si vede che la prima funzione corrisponde ad una soluzione del tipo $f(t-x/v)$ con $v=1/\sqrt{LC}$, mentre la seconda ad una funzione $g(t+x/v)$. Quindi il primo termine rappresenta una onda di tensione che si propaga nel senso positivo delle ascisse, il secondo un'onda riflessa che si propaga nel senso opposto. Nell'ipotesi che il cavo sia infinito non c'è alcuna onda riflessa, per cui ci si limita a considerare solo il primo dei due addendi. Imponendo la condizione al contorno $v(s,0)=E/s$ si ha

$$v(s, x) = \frac{E}{s} e^{-s\sqrt{LC}x} \Rightarrow v(x, t) = E l(t - \sqrt{LC}x);$$

corrispondentemente, imponendo la condizione $i(x,t)=0$ per $x \rightarrow \infty$ si trova

$$i(s, x) = \frac{E}{s} \sqrt{\frac{C}{L}} e^{-s\sqrt{LC}x} \Rightarrow i(x, t) = E \sqrt{\frac{C}{L}} l(t - \sqrt{LC}x).$$

Quindi il segnale di tensione erogato si propaga, con forma d'onda non deformata, lungo il cavo ed il rapporto tra tensione e corrente in ogni punto è costante e pari a $Z_0=R_0=\sqrt{L/C}$, detta impedenza caratteristica della linea. Se al

termine del cavo si pone una resistenza di valore pari a R_0 , ai suoi capi si ottiene un segnale che è esattamente coincidente al gradino di tensione forzato dal generatore, ritardato di un tempo pari al tempo di transito nel cavo. Se l'impedenza del carico è diversa da R_0 si generano segnali riflessi. I cavi coassiali sono normalmente utilizzati in laboratorio per il collegamento degli strumenti elettronici.

A.2.2 Le condizioni iniziali

L'utilizzazione della trasformazione unilatera di Laplace implica che tutte le variabili elettriche della rete siano nulle per $t < 0$. Ciò significa che tutti gli elementi reattivi presenti nella rete devono essere inizialmente scarichi. Come fare, allora, a studiare l'evoluzione transitoria della rete a partire da un istante in cui uno o più elementi reattivi sono carichi?

Si consideri la rete della Fig. A.2 dove ora il condensatore sia inizialmente carico al valore V_0 . Il transitorio di $v_C(t)$ è ottenibile, nel dominio del tempo, integrando l'equazione differenziale (1.29) con la condizione iniziale $v_C(0)=V_0$. Si ottiene

$$v_C(t) = V_0 + (E - V_0)(1 - e^{-t/RC}) . \quad (\text{A.5})$$

Per ottenere la stessa soluzione risolvendo la rete simbolica, bisogna rappresentare correttamente la condizione iniziale. Per far questo, si immagini la rete scarica un istante prima dell'applicazione del gradino $E1(t)$. All'istante $t=0$, contemporaneamente al gradino si forza sul condensatore la carica $Q=CV_0$ che deve essere inizialmente presente sulle sue armature. Circuitualmente, questa operazione è realizzata iniettando, con un generatore di corrente posto in parallelo ai morsetti del condensatore, una δ di Dirac di area Q , come messo in evidenza nella Fig. A.4.

La rete simbolica viene ora risolta utilizzando il principio di sovrapposizione degli effetti. Si tiene attivo il generatore di tensione e si apre il generatore di corrente, ottenendo:

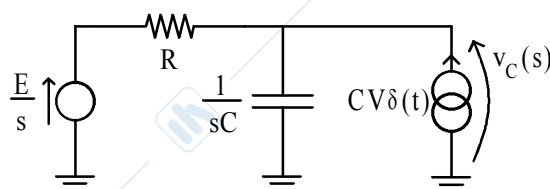


Fig. A.4 Rete simbolica associata alla rete della Fig. A.2 nel caso in cui il condensatore sia inizialmente carico alla tensione V_0 .

$$v_C(s) = \frac{E}{s} \frac{1}{(1+sRC)},$$

che coincide con la soluzione della rete con condizione iniziale nulla. Poi si cortocircuita il generatore di tensione e si attiva il generatore di corrente, ottenendo

$$v_C(s) = CV_0 \frac{R}{(1+sRC)}. \quad (\text{A.6})$$

La trasformata di Laplace dell'andamento di $v_C(t)$ è data dalla somma

$$v_C(s) = \frac{E}{s} \frac{1}{(1+sRC)} + CV_0 \frac{R}{(1+sRC)}. \quad (\text{A.7})$$

E' facile verificare che antitrasformando la (A.7) si ottiene la (A.6).

Consideriamo ora un induttore scarico a cui per $t=0$ venga repentinamente forzata una corrente A . Esprimiamo analiticamente questa situazione pensando ad un segnale di corrente a gradino $A1(t)$ forzato da un generatore di corrente ai morsetti dell'induttore. La tensione dell'induttore seguirà l'andamento impulsivo:

$$v(t) = L \frac{dA1(t)}{dt} = LA\delta(t). \quad (\text{A.8})$$

Viceversa, se si vuol rappresentare un induttore carico nella rete simbolica, si deve pensare di forzare repentinamente con un generatore la corrente iniziale $i(0)$ all'istante $t=0$. In base alla (A.8), un generatore deltiforme di tensione, di valore pari ad $Li(0)$, posto in serie all'induttore può fornire l'impulso di tensione necessario a caricare istantaneamente l'induttore scarico (Fig. A.5).

In definitiva, la presenza di bipoli reattivi carichi, è rappresentata nella relativa rete simbolica dalla introduzione di generatori deltiformi. Nel caso di un condensatore, il generatore è un generatore di corrente $C \cdot v(0) \cdot \delta(t)$ posto in parallelo alle armature. Nel caso di un induttore si tratta di un generatore di tensione che fornisce l'impulso di tensione $L \cdot i(0) \cdot \delta(t)$ posto in serie all'induttore. Dopo aver inserito i generatori che rappresentano le condizioni iniziali, il

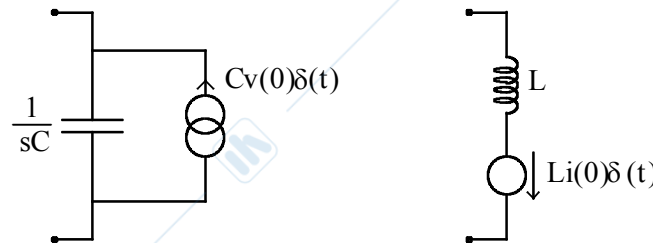
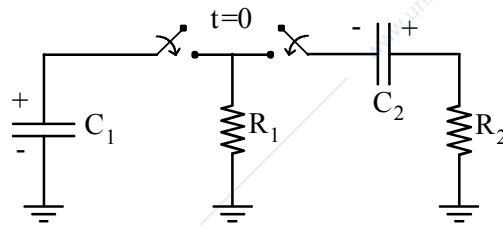


Fig. A.5 Bipoli reattivi carichi nelle reti simboliche.

transitorio della rete si studia applicando normalmente l'algoritmo della trasformata di Laplace e sovrapponendo gli effetti di tutti i generatori, sia quelli forzanti sia quelli introdotti a rappresentare le condizioni iniziali.

E A.5 Si consideri il circuito in figura. I due condensatori C_1 e C_2 hanno una carica sulle armature pari a $1\mu C$. All'istante $t=0$ essi sono connessi contemporaneamente alla resistenza R_1 . Studiare il transitorio temporale della tensione ai capi di R_1 e di C_2 . Come varia il transitorio temporale se alla resistenza R_1 è connesso prima C_1 e dopo $500ns$ C_2 ?



$$R_1=1 \text{ k}\Omega$$

$$R_2=100 \text{ k}\Omega$$

$$C_1=C_2=1 \mu\text{F}$$

A.3 L'ANTITRASFORMAZIONE

Per ottenere dalla funzione analitica $f(s)$ la funzione generatrice $f(t)$, sarebbe necessario risolvere l'integrale:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{b-j\infty}^{b+j\infty} f(s)e^{st} ds$$

su un contorno alla Cauchy nel semipiano di convergenza. Tuttavia, si è visto che le funzioni $f(s)$ ottenute nell'analisi di circuiti lineari sono semplici funzioni razionali fratte a coefficienti reali. Per questa classe di funzioni non è necessario risolvere l'integrale ma si antitrasforma dopo aver scomposto $f(s)$ in frazioni parziali, riconoscendo in ciascuno di esse la trasformata di funzioni note. La proprietà di linearità ci assicura che l'antitrasformata di $f(s)$ è pari alla somma delle antitrasformate dei singoli termini.

E A.6 Si supponga di avere un circuito il cui segnale di uscita abbia come trasformata la funzione:

$$v(s) = \frac{5s+12}{s^2+5s+6}.$$

Ricavarne l'andamento nel tempo e disegnarlo in un grafico quotato.

Scomponendo la $v(s)$ in frazioni parziali si ha

$$v(s) = \frac{5s+12}{s^2+5s+6} = \frac{5s+12}{(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+3}$$

I coefficienti A e B si ottengono semplicemente da

$$\begin{aligned} A &= \lim_{s \rightarrow -2} (s+2)v(s) = \lim_{s \rightarrow -2} \left[(s+2) \frac{A}{(s+2)} + (s+2) \frac{B}{(s+3)} \right] = \\ &= \lim_{s \rightarrow -2} \left[(s+2) \frac{5s+12}{(s+2)(s+3)} \right] = 2 ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \lim_{s \rightarrow -3} (s+3)v(s) = \lim_{s \rightarrow -3} \left[(s+3) \frac{A}{(s+2)} + (s+3) \frac{B}{(s+3)} \right] = \\ &= \lim_{s \rightarrow -3} \left[(s+3) \frac{5s+12}{(s+2)(s+3)} \right] = 3 \end{aligned}$$

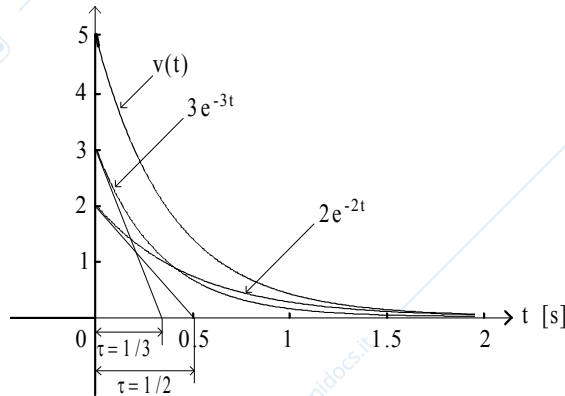
Quindi

$$v(s) = \frac{2}{s+2} + \frac{3}{s+3}$$

dove si riconosce, con l'aiuto della Tab. A.2, che i due addendi sono la trasformata di funzioni esponenziali. Il segnale di uscita è quindi

$$v(t) = [2e^{-2t} + 3e^{-t}] \cdot 1(t)$$

al quale corrisponde il seguente andamento temporale



E A.7 Il segnale ottenuto da un circuito ha come trasformata la funzione:

$$v(s) = \frac{s^2 + 1}{s^3 + 8s^2 + 19s + 12}.$$

Ricavarne l'andamento nel tempo e disegnarlo in un grafico quotato.

$$\left[v(t) = \left(\frac{1}{3} e^{-t} - 5e^{-3t} + \frac{17}{3} e^{-4t} \right) \cdot 1(t) \right]$$

E A.8 Il segnale di uscita di un circuito ha come trasformata la funzione:

$$v(s) = \frac{2s^2 + 6s + 6}{s^3 + 4s^2 + 6s + 4}.$$

Ricavarne l'andamento nel tempo.

La funzione $v(s)$ si scompone in

$$v(s) = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+(1+j)} + \frac{C}{s+(1-j)},$$

ove i coefficienti sono: $A=1$, $B=(1+j)/2$, $C=B^*=(1-j)/2$. L'antitrasformata di $v(s)$ è:

$$v(t) = \left(e^{-2t} + e^{-t} \cos(t) + e^{-t} \sin(t) \right) \cdot 1(t).$$

Ricapitoliamo ora, in termini più generali, il procedimento di antitrasformazione di una funzione $f(s)$ razionale fratta. Se la funzione ha il grado m del numeratore

maggiore del grado n del denominatore, si opera la divisione e ci si riporta alla funzione

$$f(s) = \Gamma(s) + \Phi(s) = \gamma_0 s^{m-n} + \gamma_1 s^{m-n-1} + \dots + \gamma_{m-n} + \frac{\beta_0 s^k + \beta_1 s^{k-1} + \dots + \beta_k}{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_n} \quad (A.9)$$

La linearità della trasformazione di Laplace garantisce che l'antitrasformata di $f(s)$ è pari alla somma delle antitrasformate dei singoli addendi della (A.9). Dal teorema di derivazione si deduce che l'antitrasformata dei termini della $\Gamma(s)$ è

$$L^{-1}(\gamma_i s^{m-i}) = \gamma_i \frac{d^{m-i} \delta(t)}{dt^{m-i}}.$$

Quindi i termini della $\Gamma(s)$ sono trasformati di termini impulsivi, o di loro derivate, che si esauriscono in $t=0$. L'antitrasformata della $\Phi(s)$, funzione razionale propria, è invece responsabile dell'andamento della risposta del sistema per $t>0$. Le funzioni razionali fratte sono decomponibili in somme di termini elementari

$$\frac{A_k}{(s-p_k)^{\lambda_k}} \quad (A.10)$$

dove A_k è in generale un numero complesso e p_k è la k -sima radice del denominatore di molteplicità λ_k . Abbiamo visto che se il polo è semplice, il coefficiente A_k è dato da

$$A_k = \lim_{s \rightarrow p_k} \Phi(s)(s-p_k).$$

Se invece il polo è di molteplicità $\lambda_k > 1$, allora nella scomposizione della $F(s)$ compariranno termini del tipo

$$\frac{A_{k1}}{(s-p_k)} + \frac{A_{k2}}{(s-p_k)^2} + \dots + \frac{A_{k\lambda_k}}{(s-p_k)^{\lambda_k}}.$$

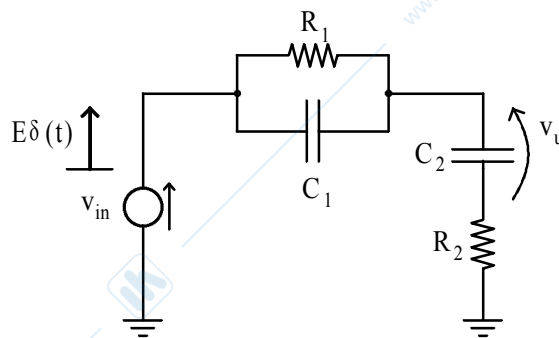
Un esempio di questo tipo lo abbiamo trovato nell'esercizio E. A.8. In generale, si trova che il generico coefficiente A_{kr} è dato da

$$A_{kr} = \lim_{s \rightarrow p_k} \frac{1}{(\lambda_k - r)!} \frac{d^{\lambda_k - r}}{ds^{\lambda_k - r}} \Phi(s)(s-p_k)^{\lambda_k}.$$

I coefficienti della $\Phi(s)$ sono sempre reali, quindi i termini della scomposizione associati a poli reali hanno coefficienti A_k reali. Invece, nei termini della scomposizione associati ad un polo complesso, sono presenti coppie di coefficienti complessi A_k, \bar{A}_k associati alla coppia di poli coniugati p_k e \bar{p}_k .

Inoltre, è importante notare che poli con parte reale negativa individuano una rete con risposta convergente, a differenza del caso in cui sia presente anche un solo polo con parte reale positiva, sufficiente per determinare una risposta divergente nel tempo. L'antitrasformata di $\Phi(s)$ è pari alla somma delle antitrasformate dei termini (A.10).

E A.9 Si consideri il circuito nella figura. Si calcoli l'andamento nel tempo della tensione ai capi del condensatore C_2 , quando in ingresso è applicato un impulso di tensione $E\delta(t)$, con $E=1V$. I condensatori sono inizialmente scarichi.



$$\begin{aligned} R_1 &= 1 \text{ k}\Omega \\ R_2 &= 100 \text{ k}\Omega \\ C_1 &= C_2 = 1 \text{ }\mu\text{F} \end{aligned}$$

All'istante di applicazione della $\delta(t)$ i condensatori sono scarichi e sul segnale rapidamente variabile oppongono un'impedenza nulla al fluire della corrente. Quindi il segnale di tensione applicato si sviluppa ai capi di R_2 . Per la legge di Ohm, ciò causa il fluire di una corrente delforme pari a $E\delta(t)/R_2$ a cui è associata una carica pari ad $Q=E/R_2=10\mu\text{C}$. Questa carica fluisce nella serie dei due condensatori che si caricano manifestando una tensione ai capi pari a $Q/C_1=Q/C_2=E/(R_2C_2)=10V$. La presenza di R_1 è ininfluente ai fini del transitorio in questa fase iniziale. Terminata la sollecitazione delforme, i condensatori si scaricano. Giacché i due elementi reattivi sono indipendenti, la tensione ai capi di C_2 decresce con un andamento dato dalla sovrapposizione di due esponenziali. La trasformata della tensione di uscita è pari a

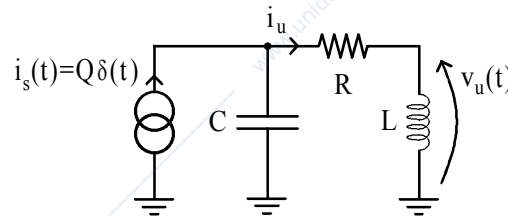
$$v_u(s) = E \frac{(1 + sC_1R_1)}{s^2C_1R_1C_2R_2 + s[C_1R_1 + C_2(R_1 + R_2)] + 1}$$

La funzione di trasferimento presenta due poli ed uno zero. Lo zero è dovuto alla presenza della rete formata da R_1 e C_1 . Infatti, per il valore complesso $s = -1/R_1C_1$, l'impedenza di questa rete è infinita e corrispondentemente è nulla la trasformata di Laplace della corrente che attraversa il circuito. Ne consegue che

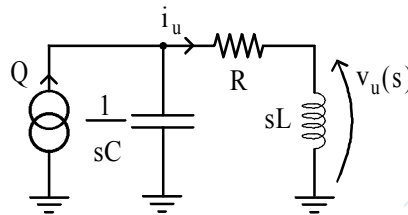
anche la tensione ai capi di C_2 è nulla. Da qui la presenza dello zero nella funzione di trasferimento.

Si verifichi che i poli ottenuti coincidono con l'inverso delle costanti di tempo di decadimento valutate nello studio del transitorio temporale dell'esercizio E A.5.

E A.10 Si consideri la rete della figura seguente, in cui gli elementi reattivi siano inizialmente scarichi. Si valuti la funzione di trasferimento $T(s)=v_u(s)/i_s(s)$ e si discuta il cambiamento della risposta della rete nel dominio del tempo al variare del valore della resistenza R .



Alla rete in esame è associata la rete simbolica riportata nella figura successiva.



Applicando le leggi di Kirchhoff si ricava la corrente, $i_u(s)$, che fluisce nell'induttore

$$i_u(s) = i_s(s) \frac{1/sC}{R + sL + 1/sC}$$

e quindi

$$T(s) = \frac{v_u(s)}{i_s(s)} = \frac{sL}{s^2LC + sRC + 1} \quad (\text{A.11})$$

che si può scrivere come

$$(s^2LC + sRC + 1)v_u(s) = sLi_s(s)$$

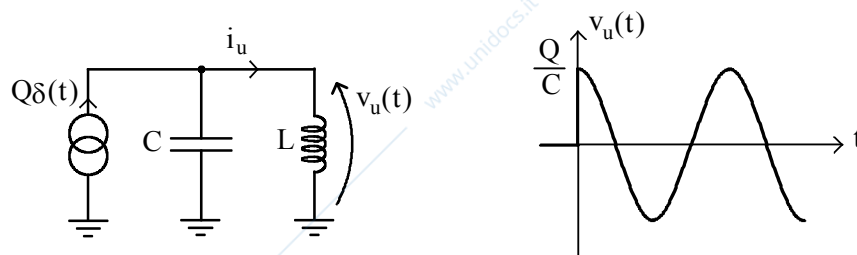
Si può verificare che quest'ultima relazione è la trasformata di Laplace dell'equazione differenziale che descrive l'andamento temporale di $v_u(t)$ nella rete data. Il grado del polinomio al denominatore di $T(s)$ è pari all'ordine dell'equazione differenziale risolvibile. La rete ha infatti due elementi reattivi

irriducibili e quindi, così come l'equazione differenziale è del secondo ordine, anche il denominatore della $T(s)$ è del secondo ordine. I poli della rete, ovvero le radici del denominatore della $T(s)$, sono due, pari al numero di elementi reattivi indipendenti presenti nella rete.

Il determinante Δ^2 del polinomio al denominatore di $T(s)$ è

$$\Delta^2 = (RC)^2 - 4LC$$

Se $R=0$, i poli della rete sono immaginari coniugati e pari a $\pm j/\sqrt{LC}$. Il circuito si riduce alla rete riportata di seguito:



Poniamo $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. Il denominatore di $T(s)$ può allora essere scritto come $LC(s-j\omega_0)(s+j\omega_0)$ e la risposta della rete ad un'eccitazione impulsiva $Q\delta(t)$ è l'antitrasformata di

$$v_u(s) = \frac{Qs}{C} \frac{1}{(s-j\omega_0)(s+j\omega_0)}$$

Questa funzione razionale fratta può essere decomposta nella somma di due addendi

$$v_u(s) = \frac{A_1}{(s-j\omega_0)} + \frac{\bar{A}_1}{(s+j\omega_0)}$$

dove i coefficienti A_1 ed \bar{A}_1 sono necessariamente l'uno il complesso coniugato dell'altro, perché i coefficienti della (A.11) sono tutti reali. A_1 si ottiene da

$$A_1 = \lim_{s \rightarrow j\omega_0} v_u(s)(s-j\omega_0) = \frac{Q}{2C}$$

Giacché A_1 è reale, $\bar{A}_1 = A_1$ ed in base alle antitrasformate riportate in Tab. A.2 si ha

$$v_u(t) = \frac{Q}{C} \frac{e^{jt\omega_0} + e^{-jt\omega_0}}{2} \cdot 1(t) = \frac{Q}{C} \cos(\omega_0 t) \cdot 1(t)$$

Commentiamo questa risposta oscillatoria della rete LC, già rappresentata nella precedente figura. All'istante iniziale, la carica fornita dal generatore forzante

non può che fluire sulle armature del condensatore, inizialmente scarico. L'induttore, che è anch'esso scarico per $t=0$, non è attraversato da corrente fino a che ai suoi morsetti, e quindi ai capi del condensatore, non si ha una tensione finita. La carica Q sulle armature del condensatore determina una tensione Q/C e forza il passaggio di una corrente nell'induttore. La corrente nell'induttore cresce inizialmente con derivata Q/LC . Il condensatore si scarica e quindi la corrente nell'induttore continua a crescere ma con una derivata sempre minore. Per $t=\pi/2\omega_0$ la tensione ai capi dell'induttore e del condensatore è nulla. Il condensatore è scarico mentre l'induttore è attraversato da corrente. L'energia inizialmente accumulata nel campo elettrico del condensatore, è ora accumulata nel campo magnetico dell'induttore. Il valore massimo della corrente, I_m , nell'induttore è ottenibile dal bilancio energetico:

$$\frac{Q^2}{2C} = \frac{LI_m^2}{2}$$

da cui

$$I_m = Q/\sqrt{LC}$$

La corrente non nulla nell'induttore determina progressivamente la ricarica del condensatore e, viceversa, la tensione ai capi del condensatore determina una variazione della corrente che fluisce nell'induttore. L'assenza di termini resistivi fa sì che l'energia fornita dal generatore forzante non sia dissipabile. Questa energia è trasferita indefinitivamente dall'induttore al condensatore e viceversa.

La rete costituisce un circuito risonante alla pulsazione $\omega_0=1/\sqrt{LC}$.

Il valore iniziale della tensione ai capi dell'induttore è anche ottenibile applicando il teorema del limite (Tab. A.1) alla (A.11)

$$\lim_{t \rightarrow 0} v_u(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s v_u(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{Qs^2}{C} \frac{1}{(s-j\omega_0)(s+j\omega_0)} = \frac{Q}{C}$$

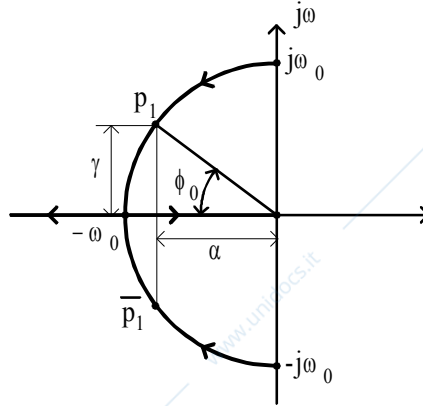
Questo risultato è stato già giustificato sulla base di considerazioni fisiche e sintetiche.

Supponiamo ora che nella rete ci sia la resistenza R , ma che $R^2 < 4L/C$. Il determinante Δ^2 è negativo e quindi i poli della rete sono complessi coniugati. Indicati con $p_1 = -\alpha + j\gamma$ e $\bar{p}_1 = -\alpha - j\gamma$ questi poli, il denominatore della (A.11) è ancora scomponibile in $LC(s-p_1)(s-\bar{p}_1)$ dove, per le proprietà delle radici di una equazione di secondo grado, è

$$2 \operatorname{Re}(p_1) = -\frac{R}{L} \quad \text{e} \quad |p_1|^2 = \frac{1}{LC} = \omega_0^2.$$

Si noti che i poli della rete hanno sempre parte reale negativa ed al variare della resistenza R il modulo dei poli non varia; variano solo la parte reale ed immaginaria. Ciò vuol dire che al variare di R , i poli nel piano di Gauss descrivono un arco di circonferenza di raggio ω_0 a partire dai valori immaginari

puri $\pm j/\sqrt{LC} = \pm j\omega_0$. Il luogo descritto nel piano complesso dai poli della rete in esame al variare del valore della resistenza R è riportato nella figura seguente:



In generale, si definisce fattore di forma di una coppia di singolarità complesse coniugate, il coefficiente

$$\xi = -\frac{\operatorname{Re} p}{|p|}$$

e nel nostro caso

$$\xi = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

In base alla (A.11), la risposta all'eccitazione $Q\delta(t)$ è l'antitrasformata di

$$v_u(s) = \frac{Qs}{C} \frac{1}{(s-p_1)(s-\bar{p}_1)}$$

Analogamente a quanto fatto precedentemente, questa funzione può essere decomposta nella somma dei due addendi

$$v_u(s) = \frac{A_1}{(s-p_1)} + \frac{\bar{A}_1}{(s-\bar{p}_1)} \quad (\text{A.12})$$

dove

$$A_1 = \lim_{s \rightarrow p_1} v_u(s)(s-p_1) = \frac{Qp_1}{2jC\gamma}$$

A_1 è ora un numero complesso il cui modulo e fase sono dati da

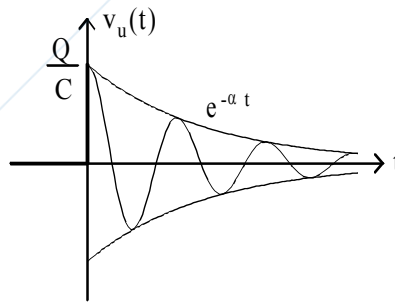
$$|A_1| = \frac{Q|p_1|}{2C\gamma} = \frac{Q\omega_0}{2C\gamma}; \quad \phi = \operatorname{arctg}(-\gamma/\alpha) - \pi/2 = \pi/2 - \operatorname{arctg}(\gamma/\alpha).$$

Indichiamo con ϕ_0 l'angolo $\operatorname{arctg}(\gamma/\alpha)$, che è l'angolo sotteso nella figura precedente dal semiasse negativo delle ascisse e dal vettore congiungente

l'origine con il punto p_1 . Dalla figura si ricava che $\sin(\phi_0) = \gamma/\omega_0$. Ora, antitrasformando la (A.12) si ha:

$$\begin{aligned} v_u(t) &= (A_1 e^{p_1 t} + \bar{A}_1 e^{\bar{p}_1 t}) \cdot 1(t) = |A_1| e^{-\alpha t} (e^{j(\gamma t + \phi)} + e^{-j(\gamma t + \phi)}) \cdot 1(t) = \\ &= 2|A_1| e^{-\alpha t} \cos(\gamma t + \phi) \cdot 1(t) = \frac{Q\omega_0}{\gamma C} e^{-\alpha t} \cos(\gamma t + \phi) \cdot 1(t) . \end{aligned}$$

Dunque, in presenza di poli complessi coniugati con parte reale negativa, la risposta della rete ha ancora un andamento oscillatorio, ma involupato da esponenziali decrescenti, come mostrato di seguito in figura. L'energia fornita dal generatore forzante viene progressivamente dissipata in calore sul resistore e quindi la rete ritorna esponenzialmente in quiete con gli elementi reattivi scarichi. All'aumentare della resistenza R , la parte reale dei poli diviene sempre più negativa, il transitorio esponenziale è sempre più rapido e la frequenza di oscillazione sempre più bassa.



Anche in presenza di una resistenza in serie all'induttore, l'impulso forzato dal generatore carica istantaneamente il condensatore. Quindi immediatamente dopo l'esaurimento della forzante $Q\delta(t)$, ovvero a $t=0^+$, il condensatore ha ai suoi capi la tensione Q/C mentre la corrente che fluisce attraverso l'induttore ha derivata finita ma ancora valore nullo. Di conseguenza la caduta ohmica ai capi di R per $t=0^+$ è nulla e la tensione ai capi dell'induttore è pari a Q/C .

L'esattezza dei coefficienti A_1 ed \bar{A}_1 della scomposizione può essere verificata applicando il teorema del limite alla (1.38) per ottenere $v_u(0)$

$$\lim_{t \rightarrow 0} v_u(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s v_u(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \left(\frac{A_1}{s - p_1} + \frac{\bar{A}_1}{s - \bar{p}_1} \right) = A_1 + \bar{A}_1 = \frac{Q}{C} .$$

Se $R^2 = 4L/C$, il determinante $\Delta^2 = 0$ ed i poli della rete sono reali e coincidenti e pari $p = -1/\sqrt{LC} = -\omega_0$. In questo caso la risposta alla forzante $Q\delta(t)$ è l'antitrasformata di:

$$v_u(s) = \frac{Qs}{C} \frac{1}{(s-p)^2} \quad (\text{A.13})$$

la cui scomposizione è

$$v_u(s) = \frac{A_1}{(s-p)} + \frac{A_2}{(s-p)^2}.$$

I coefficienti della scomposizione si ottengono dalle relazioni

$$A_1 = \lim_{s \rightarrow p} \frac{d}{ds} v_u(s)(s-p)^2$$

$$A_2 = \lim_{s \rightarrow p} v_u(s)(s-p)^2$$

che, applicate alla (A.13), consentono di ottenere $A_1=Q/C$ e $A_2=-Q\omega_0/C$. Inoltre, la (A.13) può anche essere scritta come

$$v_u(s) = \frac{A_1}{(s-p)} - \frac{d}{ds} \left[\frac{A_2}{(s-p)} \right]$$

e quindi, in base alle trasformate di Tab. A.2, si ottiene:

$$v_u(t) = (A_1 e^{pt} + A_2 t e^{pt}) \cdot 1(t) = \frac{Q}{C} e^{-\omega_0 t} (1 - \omega_0 t) \cdot 1(t)$$

La risposta della rete non presenta più oscillazioni ma la tensione iniziale ai capi dell'induttore è sempre Q/C .

Se $R^2 > 4L/C$, $\Delta^2 > 0$ ed i poli della rete sono reali negativi e distinti. In tal caso la risposta alla forzante $Q\delta(t)$ è l'antitrasformata di

$$v_u(s) = \frac{Qs}{C} \frac{1}{(s-p_1)(s-p_2)} = \frac{A_1}{s-p_1} + \frac{A_2}{s-p_2}$$

dove

$$A_1 = \lim_{s \rightarrow p_1} v_u(s)(s-p_1) = \frac{Q}{C} \frac{p_1}{p_1 - p_2};$$

$$A_2 = \lim_{s \rightarrow p_2} v_u(s)(s-p_2) = \frac{Q}{C} \frac{p_2}{p_2 - p_1} = -\frac{Q}{C} \frac{p_2}{p_1 - p_2}$$

La corrispondente antitrasformata è

$$v_u(t) = (A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}) \cdot 1(t) = \left(A_1 e^{-|p_1|t} + A_2 e^{-|p_2|t} \right) \cdot 1(t)$$

Si noti come il valore iniziale della tensione ai capi dell'induttore sia sempre Q/C . Se ad esempio $|p_1| \ll |p_2|$, la componente esponenziale del polo p_2 , ha ampiezza positiva ma si esaurisce molto prima del transitorio dovuto al polo p_1 che ha ampiezza negativa. L'andamento qualitativo di $v_u(t)$ è riportato nella figura

seguinte. Pertanto si può concludere che il transitorio più veloce si ha quando i due poli sono reali e coincidenti.

