

Risoluzione del problema di diffusione-trasporto mediante elementi finiti 2D per un'applicazione di refrigerazione di merci deperibili

Andrea Maiorino
Vito Leo
Gioacchino La Rocca

Relatore: Ing. Francesca Marcon

Laurea Magistrale in Ingegneria Meccanica
Modelli e Metodi numerici [01NLLNNE]
12 Giugno 2019



1 / 31

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Indice

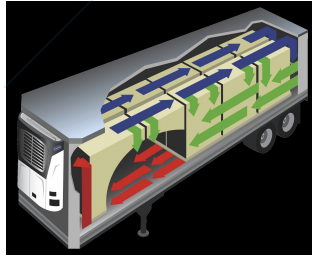
- 1 Descrizione del problema
- 2 Modello matematico
 - Geometria del Dominio 2D
 - Proprietà termo-fisiche
 - Condizioni al contorno
- 3 Formulazione variazionale discreta
- 4 Soluzione stazionaria
 - Raffinatezza della mesh
 - Distribuzione di temperatura
 - Gradiente di temperatura
 - Curve isoterme
 - Convergenza della mesh
 - Metodo Streamline Upwind Petrov-Galerkin (SUPG)
- 5 Soluzione transitoria
 - Condizioni iniziali
 - Problema evolutivo

Descrizione del problema

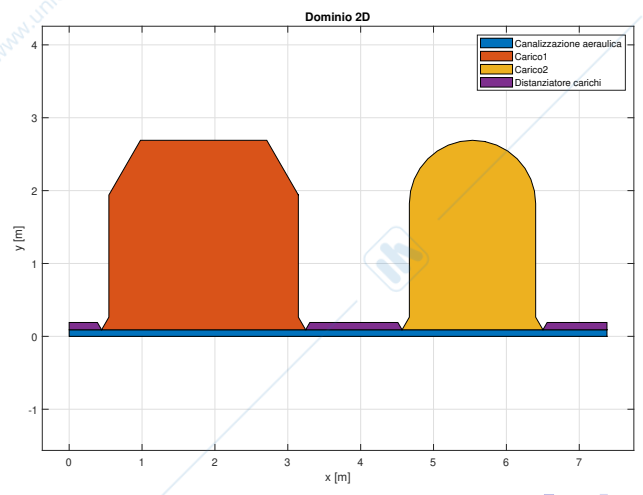
Trasporto refrigerato di merci deperibili

- Analisi dello spettro termico in una cella frigo di un camion adibita al trasporto di merci deperibili
- Il modello termico adottato per lo sviluppo dell'analisi è il seguente:

$$\rho c \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \underline{\beta} \cdot \nabla T \right) - \nabla \cdot (\lambda \nabla T) = 0$$



Geometria del Dominio 2D



Navigation icons: back, forward, search, and other controls. Below the icons is a small circular logo and the text '4 / 31'.

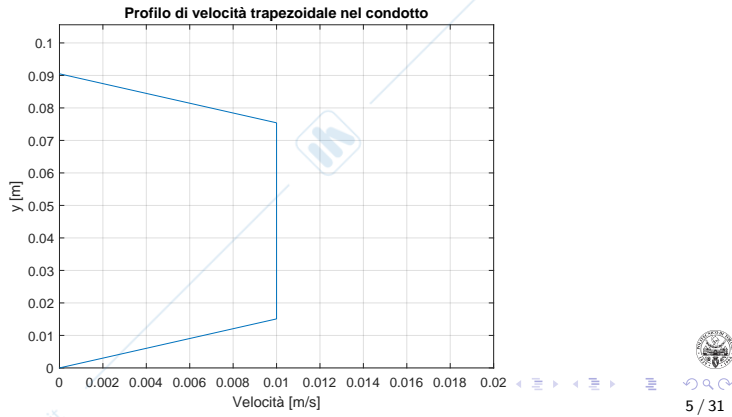
www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Proprietà termo-fisiche

Canalizzazione aerea

- Il profilo di velocità dell'aria all'interno della canalizzazione aerea è di tipo trapezoidale.



Proprietà termo-fisiche

Carichi trasportati

I prodotti surgelati destinati al trasporto su rimorchio refrigerato sono i seguenti:

- Carico 1 \implies Aringhe
- Carico 2 \implies Salmoni



Proprietà termo-fisiche

Tabella: Proprietà termo-fisiche

Materiale	λ (W/m K)	ρ (kg/m ³)	c (J/kg K)
Aria	0.0225	1.4	1007
Carico 1	0.8	910	2270
Carico 2	1.24	950	2170
Distanziatori (Alluminio)	200	27000	900



Condizioni al contorno

- $T = -30^\circ\text{C}$ sul bordo di ingresso della canalizzazione aerea;
- Condizione di Neumann $\mu \frac{\partial T}{\partial n} = 0$ sul bordo inferiore della canalizzazione per modellizzare l'adiabaticità fornita dall'isolante presente nel pavimento del rimorchio;
- Condizione di Robin $\mu \frac{\partial T}{\partial n} = h(T_\infty - T)$ sul bordo dei carichi e dei distanziatori con:

$$h = 1 \text{ W/m}^2 \text{ K}, T_\infty = -18^\circ\text{C}$$



Formulazione variazionale discreta

Definizione dell'insieme degli spostamenti ammissibili discreti

- Insieme degli spostamenti ammissibili discreti

$$V_h(\mathbf{g}) = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}) : v_h|_T \in P_1(T) \quad \forall T \in \mathcal{T} \quad v_h(\underline{x}_j) = \mathbf{g}(\underline{x}_j)$$

$$\forall \underline{x}_j \in \Gamma_D\}$$



Formulazione variazionale discreta

$u_h \in V_h(g)$ e soddisfa $\forall v_h \in V_h(0)$

$$\int_{\Omega} \lambda \nabla u_h \cdot \nabla v_h \, d\underline{x} - \int_{\Gamma_N \cup \Gamma_R} \lambda \frac{\partial u_h}{\partial n} v_h \, ds + \int_{\Omega} \rho c (\underline{\beta} \cdot \nabla u_h) v_h \, d\underline{x} + \dots$$
$$\dots + \int_{\Omega} \rho c \frac{\partial u_h}{\partial t} v_h \, d\underline{x} = 0$$



Formulazione variazionale discreta

- Condizioni al contorno:

$$\int_{\Gamma_N} \lambda \frac{\partial u_h}{\partial n} v_h ds = 0 \quad \text{Condizione di Neumann omogeneo}$$

$$\int_{\Gamma_R} \lambda \frac{\partial u_h}{\partial n} v_h ds = \int_{\Gamma_R} (\psi - \alpha u_h) v_h ds \quad \text{Condizione di Robin}$$

- Si sostituisce v_h con le funzioni della base di Lagrange φ_j e

$$u_h = \sum_{k=1}^N u_k \varphi_k + \sum_{k=1}^{N_D} g_k \varphi_k$$



Formulazione variazionale discreta

$$a_{jk} = \int_{\Omega} \lambda \nabla \varphi_k \cdot \nabla \varphi_j \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_R} \alpha \varphi_k \varphi_j \, ds + \int_{\Omega} \rho c (\underline{\beta} \cdot \nabla \varphi_k) \varphi_j \, d\mathbf{x}$$

$$m_{jk} = \int_{\Omega} \rho c \varphi_k \varphi_j \, d\mathbf{x}$$

$$b_j = \int_{\Omega} f \varphi_j \, d\mathbf{x} - \sum_{N_D} a_{jk} g_k$$

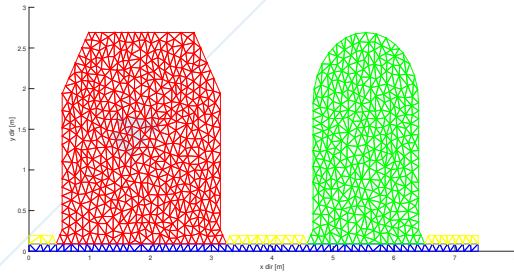
Sistema da risolvere: $A\mathbf{u} = \mathbf{b}$



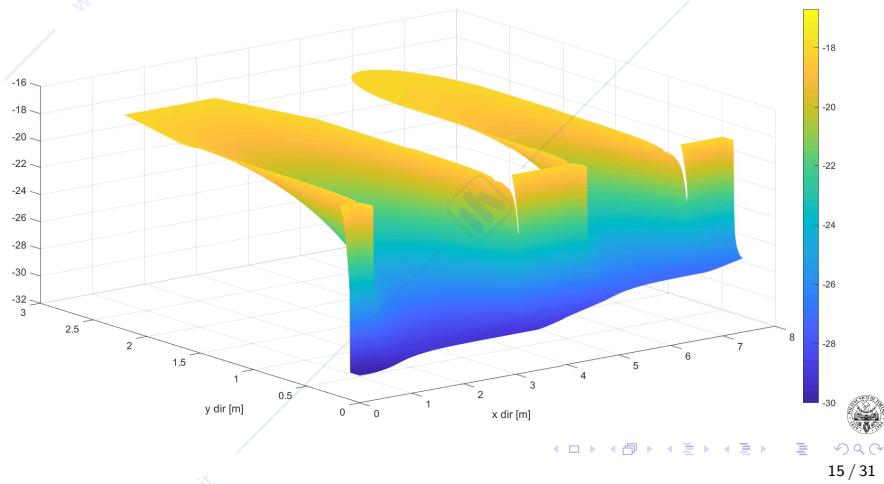
Mesh

Lo studio di convergenza della mesh ha portato a definire 5 diversi parametri di finezza per i sottodomini:

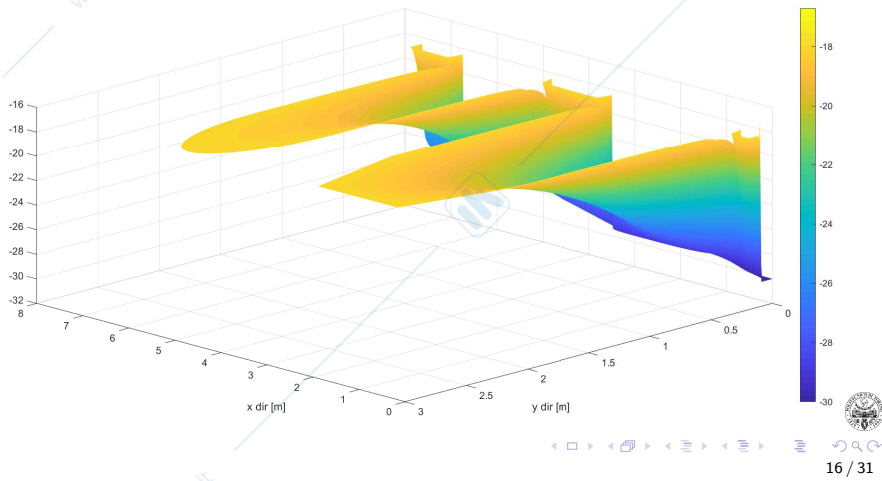
- $10^{-1} \div 10^{-5}$



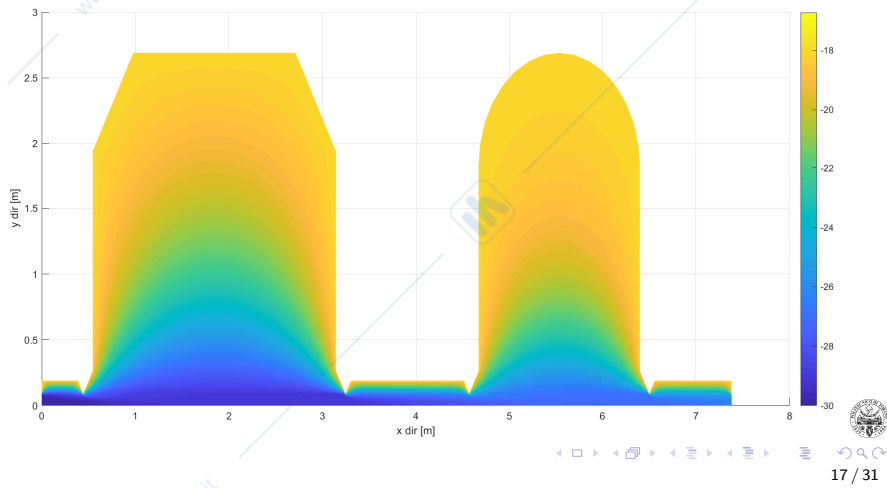
Soluzione stazionaria



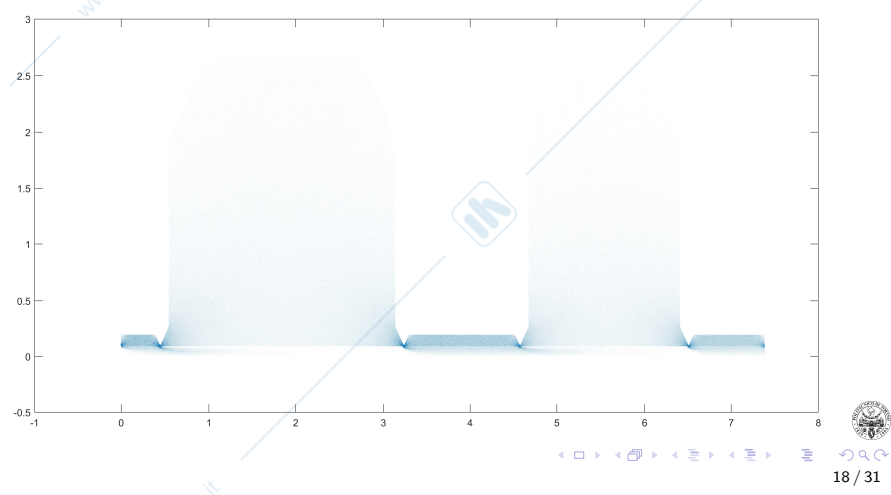
Soluzione stazionaria



Soluzione stazionaria



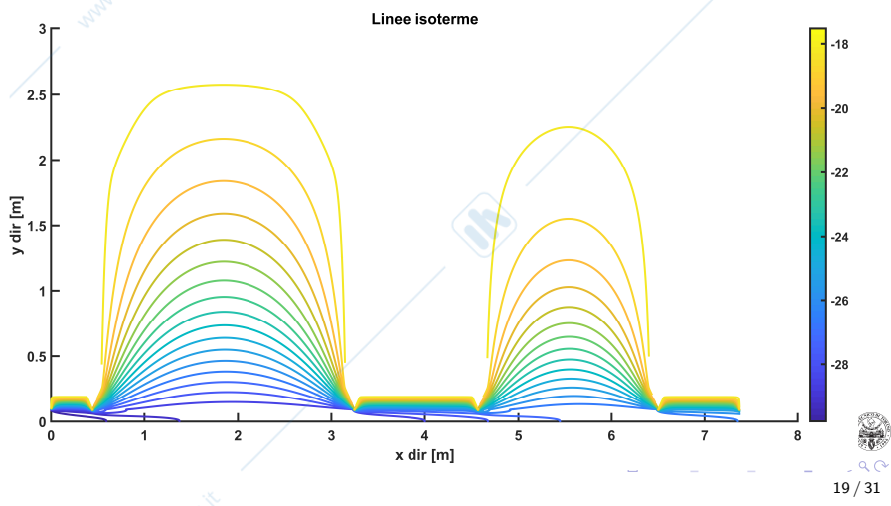
Gradiente di temperatura



www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

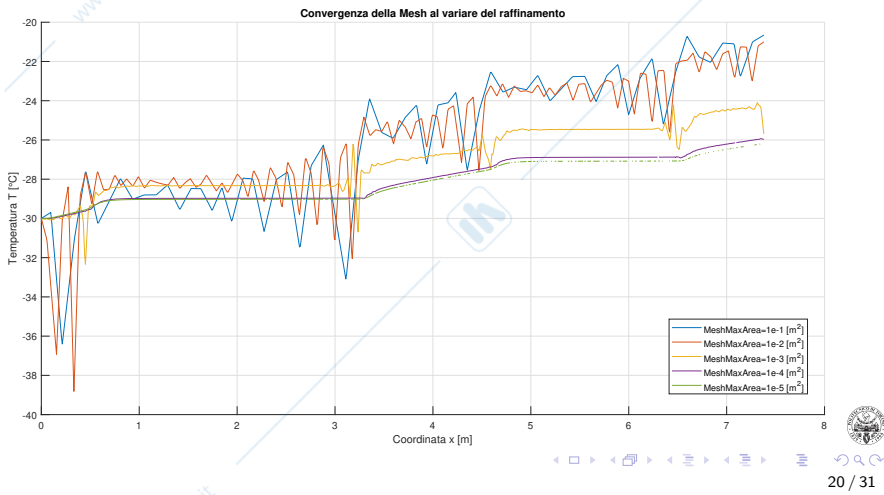
Curve isoterme



www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Convergenza della mesh



Problema a convezione dominante

L'effetto del numero di Péclet di griglia

- Il problema di convezione-diffusione analizzato è, relativamente alla griglia considerata (parametro di finezza $= 10^{-3}$), a *convezione dominante* in quanto il numero di Péclet di griglia risulta essere

$$\mathbb{P}e_h = \max \mathbb{P}e_{\mathcal{T}} = \max \left(\frac{\|\beta_{\mathcal{T}}\| h_{\mathcal{T}}}{2\nu} \right) \approx 21 > 1$$

- Per un problema a convezione dominante, più il numero di Péclet locale aumenta, più l'andamento della soluzione approssimata si discosta da quello della soluzione esatta, con oscillazioni sempre più marcate in corrispondenza dello strato limite. Un rimedio sarebbe quello di scegliere il passo h abbastanza piccolo in modo che $\mathbb{P}e_h < 1$.

Problema a convezione dominante

Metodo Streamline Upwind Petrov-Galerkin

- La soluzione prodotta dallo schema numerico presenta delle instabilità numeriche che si manifestano come oscillazioni spurie (cioè non fisiche) tra i nodi di griglia;
- Il metodo degli elementi finiti può essere modificato secondo la filosofia *upwind*, in modo da tener conto nella formulazione integrale della presenza di un termine convettivo dominante. Ad esempio, nel metodo SUPG *Streamline Upwind Petrov-Galerkin*, si aggiunge un termine di stabilizzazione nella formulazione variazionale discreta del problema ottenendo un effetto di diffusione artificiale che impedisce la nascita di oscillazioni spurie.



Metodo Streamline Upwind Petrov-Galerkin (SUPG)

- La forma di stabilizzazione introdotta è la seguente:

$$\int_{\Omega} \lambda \nabla u_h \cdot \nabla v_h \, d\mathbf{x} - \int_{\Gamma_N \cup \Gamma_R} \lambda \frac{\partial u_h}{\partial n} v_h \, ds + \int_{\Omega} \rho c (\underline{\beta} \cdot \nabla u_h) v_h \, d\mathbf{x} + \dots$$
$$\dots + S_h(u_h, v_h) + \int_{\Omega} \rho c \frac{\partial u_h}{\partial t} v_h \, d\mathbf{x} = 0$$

- In cui

$$S_h(u_h, v_h) = \sum_{T \in \mathcal{T}} \tau_T \int_T (\underline{\beta}_T \cdot \nabla u_h) (\underline{\beta}_T \cdot \nabla v_h) \, d\mathbf{x}$$



Metodo Streamline Upwind Petrov-Galerkin (SUPG)

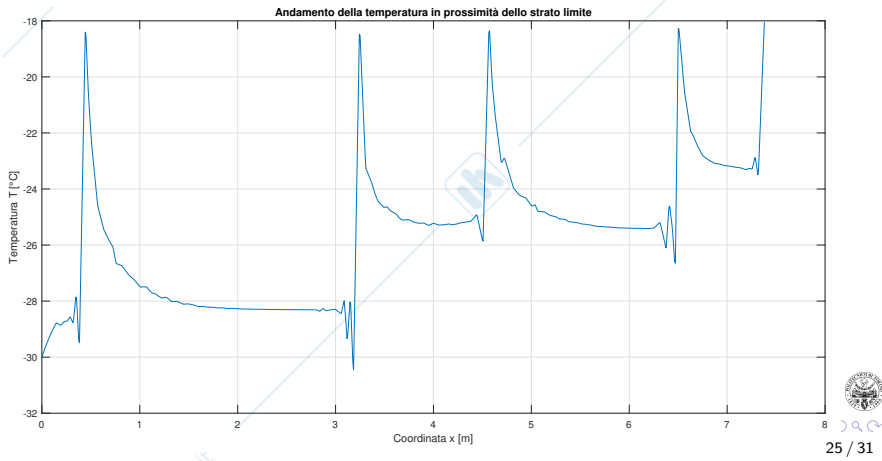
- Con:

$$\tau_T = \begin{cases} \frac{h_T}{\|\beta_T\|} & \text{se } \mathbb{P}e_T > 1, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



Andamento temperatura in prossimità dello strato limite

Assenza di una strategia di stabilizzazione numerica

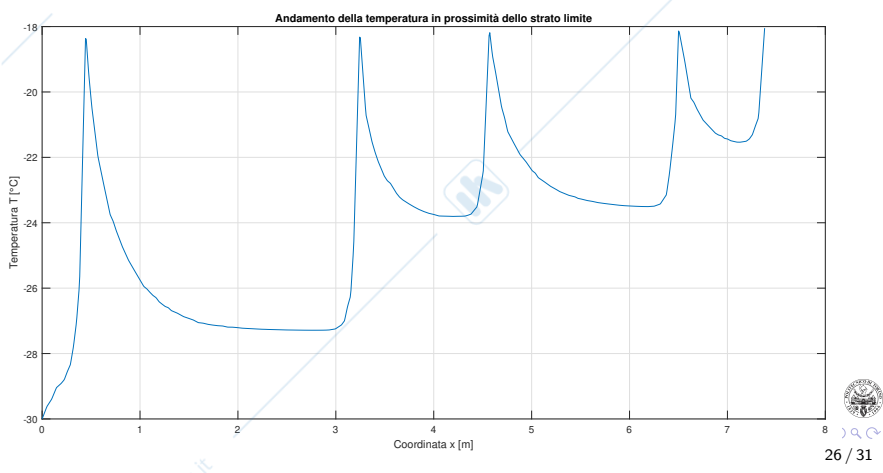


www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Andamento temperatura in prossimità dello strato limite

Applicazione metodo SUPG



www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Soluzione transitoria

Metodo delle linee

- Semi-discretizzazione rispetto allo spazio al fine di ottenere un sistema di equazioni differenziali ordinarie nel tempo (*Problema di Cauchy*):

$$\begin{cases} \mathbf{B}\mathbf{u}' + \mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{f}, & 0 < t \leq T_{end}, \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \end{cases}$$

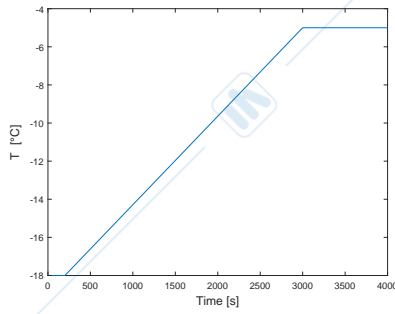
- Semi-discretizzazione rispetto al tempo, introducendo istanti temporali discreti.
 - Metodo di Eulero Implicito

$$(\mathbf{B} + \Delta t \mathbf{A})\mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{B}\mathbf{u}^k + \Delta t \mathbf{f}(t_{k+1}), \quad k \geq 0$$



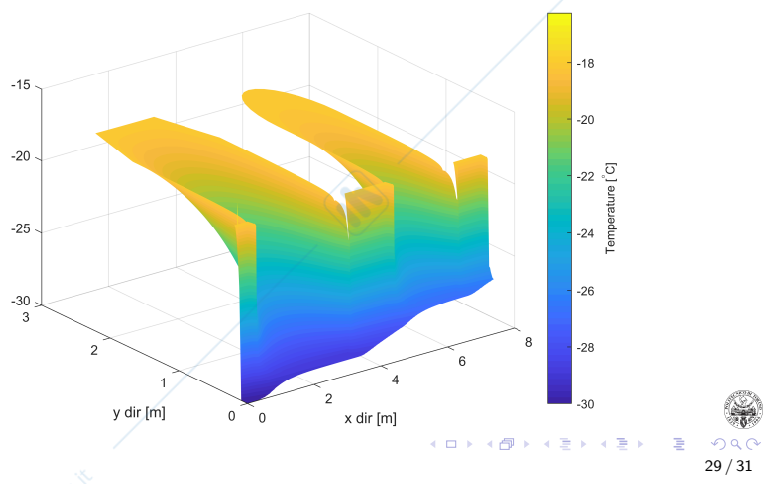
Condizioni iniziali $t=0$

- Temperatura del fluido (aria) indisturbato: $T_\infty = -18^\circ\text{C}$
- Variazione di temperatura dell'aria nel rimorchio come conseguenza dell'apertura delle porte:



Condizioni iniziali $t=0$

- Distribuzione di temperatura nelle condizioni iniziali:

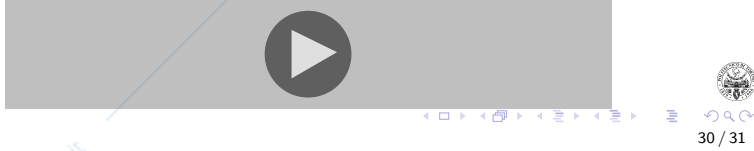


www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Problema evolutivo

- Andamento nel tempo del profilo di temperatura:



Monitoraggio della variazione di temperatura nel tempo

- Viene valutato l'andamento nel tempo della temperatura in corrispondenza del punto centrale del carico 1:

