1) Dimostra che una qualsiasi $\overline{TM}$ può essere simulata da una macchina di Turing deterministica a nastro singolo.

SOLUZIONE:

Mostriamo come convertire (o simulare) una $\overline{TM}$ M in (con) una TM deterministica a nastro singolo S equivalente.

Breve descrizione: …

La TM a nastro singolo $S$ funziona come segue:

$$S = "su\ input\ w:$$

0. Eventuale configurazione iniziale del nastro

1. La simulazione delle mosse del tipo $\delta(q,a) = (r,b,L)$ procede …

2. La simulazione delle mosse del tipo $\delta(q,a) = (r,b,R)$ procede …

…

n. Se in qualsiasi momento la simulazione raggiunge lo stato di accettazione di $M$ allora $S$ termina con accettazione. Se in qualsiasi momento la simulazione raggiunge lo stato di rifiuto di $M$ allora $S$ termina con rifiuto. Negli altri casi continua la simulazione dal punto 1."

2) Dimostra che $\bar{A}$ è indecidibile

SOLUZIONE:

Dimostriamo che $\bar{A}$ è un linguaggio indecidibile mostrando che $A_{TM}$ è riducibile a $\bar{A}$.

Dobbiamo trovare una funzione di riduzione $f$: $f(<M,w>) = <M'>$ $(o <M',x>)$ tale che

$$<M,w> \in A_{TM} \leftrightarrow <M'> \ (o <M',x>) \in \bar{A}$$

La funzione di riduzione $f$ è calcolata dalla seguente macchina di Turing:

$$F = "\ su\ input\ <M,w>\ dove\ M\ è\ una\ TM\ e\ w\ una\ stringa:$$

$$costruisci\ la\ seguente\ TM\ M':$$

$M' = "su\ input\ x:$

1. Esegue $M$ su $w$:
   - ➔ $M$ accetta $w$:

     ….
   - ➔ $M$ rifiuta $w$:

     ….. "
2. Restituisci $<M'> (o <M',x>)$ "

Dimostriamo che $f$ è una funzione di riduzione di $A_{TM}$ a $\bar{A}$, ovvero dimostriamo che:

1) $<M,w> \in A_{TM} \rightarrow f(<M,w>) = <M'> (o <M',x>) \in \bar{A}$
2) $<M,w>$ $non\ appartiene\ a\ A_{TM} \rightarrow f(<M,w>) = <M'>\ o <M',x>$ $non\ appartiene\ a\ \bar{A}$

…

Abbiamo dimostrato che $A_{TM} \leq_m \bar{A}$ e sappiamo che $A_{TM}$ è indecidibile, allora possiamo concludere che $\bar{A}$ è indecidibile.

COSE UTILI

| |
|---|
| Se A è un linguaggio Turing decidibile → A è Turing Riconoscibile<br><br>Non è sempre vero il contrario |
| co-Turing riconoscibile = complementare di un linguaggio Turing riconoscibile |
| $$A\ decidibile \leftrightarrow A\ \text{è}\ Turing\ Riconoscibile\ e\ co-Turing\ Riconoscibile$$<br>(= A e A complementare sono Turing Riconoscibili) |
| Sia<br>$$A \leq_m B$$<br>Allora:<br><br>Se B è decidibile → A è decidibile<br>Se A è indecidibile → B è indecidibile<br>Se B è Turing riconoscibile → A è Turing riconoscibile<br>Se A non è Turing riconoscibile → B non è Turing riconoscibile<br>Se B è co-Turing riconoscibile → A è co-Turing riconoscibile<br>Se A non è co-Turing riconoscibile → B non è co-Turing riconoscibile |

VARIANTI TM EQUIVALENTI

| TM a nastro infinito solo verso destra |
|---|
| - Input si trova all'inizio del nastro<br>- La testina parte dalla posizione più a sinistra del nastro (se tenta di spostarsi a sinistra allora rimane ferma) |
| **TM multinastro** |
| - Ha k nastri semi infiniti<br>- K testine<br>- Input si trova sul nastro 1<br>- Ad ogni passo ogni testina del nastro agisce simultaneamente in modo indipendente |
| **TM non deterministica** |
| - Ha nastro semi-infinito<br>- Ha più strade possibili, la sua computazione è un albero<br>- Accetta se esite un ramo che porta allo stato di accettazione |
| **Enumetatore** |
| - Ha una stampante che di tanto in tanto stampa delle stringhe<br>- Il linguaggio dell'enumeratore è l'insieme delle stringhe stampate |

LINGUAGGI INDECIDIBILI DIMOSTRATI

| |
|---|
| $A_{TM} = \{< M, w >\mid M \text{ è } una\ TM\ che\ accetta\ la\ stringa\ w\}$<br><br>In particolare, è Turing Riconoscibile ma non co-Turing Riconoscibile |
| $\overline{A_{TM}} = \{< M, w >\mid M \text{ è } una\ TM\ che\ non\ accetta\ la\ stringa\ w\}$<br><br>In particolare, non è Turing Riconoscibile ma co-Turing Riconoscibile |
| $HALT_{TM} = \{< M, w >\mid M \text{ è } una\ TM\ che\ si\ ferma\ su\ input\ w\}$ |
| $E_{TM} = \{< M >\mid M \text{ è } una\ TM\ tale\ che\ L(M) = \emptyset\}$ |
| $REGULAR_{TM} = \{< M >\mid M \text{ è } una\ TM\ tale\ che\ L(M) \text{ è } regolare\}$ |
| $EQ_{TM} = \{< M_1, M_2 >\mid M_1, M_2\ sono\ TM\ tali\ che\ L(M_1) = L(M_2)\}$<br><br>In particolare, non è né Turing Riconoscibile né co-Turing Riconoscibile |

LINGUAGGI DECIDIBILI DIMOSTRATI

| |
|---|
| $A = \{< G >\mid G \text{ è } un\ grafo\ connesso\}$ |
| $A_{DFA} = \{< B, w >\mid B \text{ è } un\ DFA\ che\ accetta\ la\ stringa\ w\}$ |
| $A_{NFA} = \{< B, w >\mid B \text{ è } un\ \varepsilon - NFA\ che\ accetta\ la\ stringa\ w\}$ |
| $A_{REX} = \{< R, w >\mid R \text{ è } un'espressione\ regolare\ che\ genera\ la\ stringa\ w\}$ |
| $E_{DFA} = \{< A >\mid A \text{ è } un\ DFA\ e\ L(A) = \emptyset\}$ |
| $EQ_{DFA} = \{< A, B >\mid A\ e\ B\ sono\ DFA\ e\ L(A) = L(B)\}$ |
| $A_{CFG} = \{< G, w >\mid G \text{ è } una\ CFG\ che\ genera\ la\ stringa\ w\}$ |
| $E_{CFG} = \{< G >\mid G \text{ è } una\ CFG\ e\ L(G) = \emptyset\}$ |