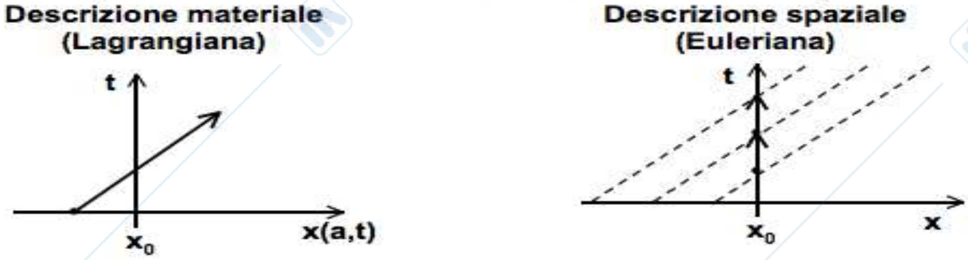
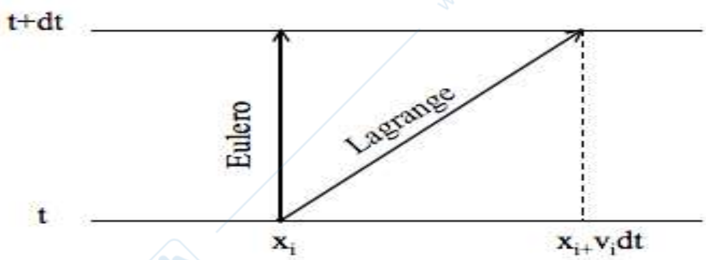
6 FLUIDODINAMICA

Nel caso dei fluidi passiamo da un approccio materiale ad un approccio di tipo spaziale. Questo corrisponde a passare da un approccio di tipo materiale, in cui se seguivamo il punto appartenente o meno al corpo, ci interessava sapere istante per istante la velocità o lo spostamento di quella particella da un istante all'altro, nel caso dell'analisi del fluido quello che facciamo è capire qual è il campo di velocità in un determinato punto indipendentemente dalla particella. Con un approccio di tipo spaziale, quello che facciamo è andare a disaccoppiare la variabile spazio dalla variabile tempo: se noi seguiamo la particella la variabile spazio e la variabile tempo sono accoppiate, perché siamo seduti sulla particella e man mano che il tempo scorre, ci spostiamo nello spazio. Da queste considerazioni parte la descrizione spaziale usata tradizionalmente in fluidodinamica, dove x e t sono considerate come variabili indipendenti.



Nella descrizione spaziale il moto istantaneo del mezzo continuo è descritto dal campo vettoriale v (x,t), che, ovviamente, è la velocità della particella che si trova in x all'istante t.

Calcoliamo l'accelerazione istantanea della particella:



<u>Approccio Lagrangiano</u>: velocità della stessa particella in t ed in t+dt.

<u>Approccio Euleriano</u>: velocità in x_i in t ed in t+dt, qualunque sia la particella.

Partiamo dal punto di vista Lagrangiano, consideriamo cioè la stessa particella, che , all'istante t si trova nel punto <u>x</u> e, muovendosi a velocità <u>v</u>, all'istante t+dt si trova nel punto <u>x</u>+<u>v</u>dt:

$$v_i(\bar{x}+\bar{v}dt, t+dt) - v_i(\bar{x},t) = v_i(\bar{x},t) + \left[\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial \bar{x}}\frac{\partial \bar{x}}{\partial t}\right]_{\bar{x},t} dt - v_i(\bar{x},t)$$

la componente i-esima della velocità è pari allo sviluppo in serie di Taylor arrestato al primo ordine.

Ve la scrivo così perché mi interessa sottolineare il fatto che è una derivata materiale

$$\frac{Dv_i}{Dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_i(\underline{x}+\underline{v}\Delta t, t+\Delta t) - v_i(\underline{x},t)}{\Delta t} = \underbrace{\underbrace{\frac{\partial v_i}{\partial t_i}}_{*1} + \underbrace{\frac{\partial v_i}{\partial \underline{x}} \cdot \frac{\partial \underline{x}}{\partial t}}_{*2}}_{*3}$$

Quest'ultima è la nostra derivata materiale che non è un'altra cosa rispetto alla derivata della velocità rispetto al tempo cui noi siamo abituati a vedere, è semplicemente un modo di scriverla che esplicita come la velocità in un punto dipenda dal tempo e dalla posizione in cui mi trovo.

$\frac{\partial v_i}{\partial t_i} + \frac{\partial v_i}{\partial \underline{x}} \cdot \frac{\partial \underline{x}}{\partial t}$ (*3) è la velocità legata alla particella, come questa dipende dal tempo, dallo spazio, dipende dalle condizioni di moto generali.

$\frac{\partial v_i}{\partial t_i}$ (*1) puramente dipendente dal tempo, legata al fatto che la condizione sia ad es. staz o non

$\frac{\partial v_i}{\partial \underline{x}} \cdot \frac{\partial \underline{x}}{\partial t}$ (*2) sono legati alla posizione, quindi posizione per posizione sono le particelle che interagiscono tra di loro.

La derivata materiale della u è l'accelerazione materiale in direzione x sarà data :

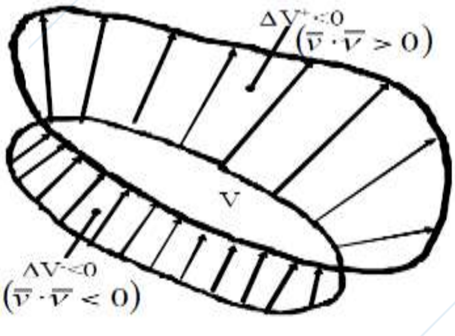
$$\frac{Du}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{*1} + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w}_{*2}$$

(*1) dipende dal tempo se le condizioni sono stazionarie o meno
(*2) vengono dette ACCELERAZIONI CONVETTIVE che dipendono dallo spazio e sono associate ai fenomeni di trascinamento delle particelle che occupano lo spazio o tramite l'interazione con l'ambiente.
Derivata materiale dettagliata in accelerazione dipendente dal tempo e in accelerazioni convettive, è semplicemente un modo più dettagliato di scrivere la vecchia accelerazione, in quanto nel fluido, non ha senso seguire la traiettoria della particella, quello che è importante è descrivere il campo di velocità in una posizione in cui istante per istante passano tante particelle.

EQUAZIONI DI CONTINUITA'= non è altro che una formulazione matematica della legge della conservazione della massa. Fondamentalmente l'equazione di continuità dice: io osservo un determinato volume contenente una certa massa che si sposta nello spazio e do una formulazione matematica della conservazione della massa. Noi abbiamo il volume che si sposta nello spazio e diciamo che in questo si conserva la massa, dove la massa m nel volume V è in generale data da:

$$m = \int_V \rho(\bar{x}, t)\, dV$$

$\rho(\bar{x}, t)$ è la densità di massa che dipende in generale sia dallo spazio che dal tempo. Se la massa si sta spostando e in un certo istante occupava un determinato volume V e nell'istante dopo occupa un volume V'



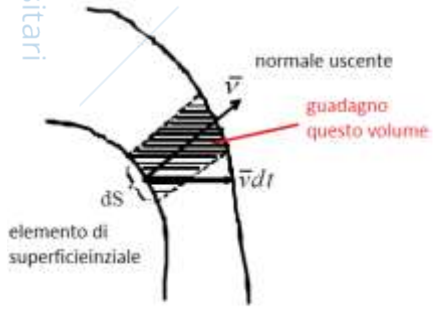
$$\Delta V = V' - V = \Delta V^+ + \Delta V^-$$

l'eventuale variazione di massa, sarà data da:

$$\frac{dm}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\int_{V'} \rho(\bar{x}, t + \Delta t)\, dV - \int_V \rho(\bar{x}, t)\, dV \right] = 0$$

Δt: tempo trascorso dallo spostamento dal volume V a V'
questa espressione deve essere uguale a zero, in quanto diciamo che la massa rimane costante(conservazione di massa), non c'è variazione. la densità di massa dipende dalla posizione e dal tempo, per cui tale variazione(dm) può essere dovuta in generale al fatto che la densità può essere cambiata all'interno del volume e al fatto che sia entrata o uscita della materia.

Consideriamo una posizione generica in cui il volume V si è spostato, la massa si è spostata dal suo volume di osservazione da V a V', che vuol dire che i fronti si sono spostati con una certa velocità e da V a V' abbiamo un ΔV^+ (ce lo siamo guadagnato)e un altro ΔV^- (ce lo siamo perso). Matematicamente, ΔV^+ è la parte di volume caratterizzato ad avere una direzione di velocità di progressione del fronte che sono concordi con le normali uscenti dal volume



$$dV = \bar{\nu} \cdot \bar{v}\, dt\, dS$$

Invece ΔV^-, è caratterizzato da una velocità del fronte che non va nella stessa direzione della normale uscente dal volume (sono discordi).

$$dm = dm_1 + dm_2 = \int_V d\rho\, dV + \int_{\Delta V} \rho\, dV = \int_V d\rho\, dV + \int_S \rho \bar{\nu} \cdot \bar{v}\, dt\, dS$$

con dm1 (primo contributo)e dm2 (secondo contributo) possiamo dire di avere delle variazioni di massa dovute a una variazione di densità sul volume, e delle variazioni di massa dovuta a della roba che perdo o che guadagno per lo spostamento del volume.

-Il primo termine è l'integrale su V di un eventuale $d\rho$ dV variazione di densità su V,
-il secondo integrale ρ dV su $\Delta V = \Delta V^+ + \Delta V^-$.
Considereremo le densità negative quelle che perdo, quelle positive quelle densità che guadagno. La massa all'interno del volume può cambiare sia perchè la densità cambia, sia perchè ne entra e ne esce.Il secondo integrale come possiamo scriverlo? Abbiamo detto che ΔV^+ è quello che è caratterizzato dal fatto che il fronte concorde con la normale uscente, mentre quello che perdo varia in maniera discorde.

Per cui abbiamo esplicitando l'espressione dello scalare: (formula 1)

$$\frac{dm}{dt} = \int_V \frac{d\rho}{dt} dV + \int_S \sum_j \rho v_j v_j dS =$$

l'integrale s l'integrale su S, possiamo trasformarlo in un integrale su V, utilizzando il teorema di Gauss:

$$\int_S \sum_s A_s v_s \, ds = \int_V \sum_s \frac{\partial A_s}{\partial x_s} dV$$

nella (formula 1) il primo integrale ci dice come varia la densità nel tempo, il secondo è un bilancio di massa che transita attraverso la superficie del nostro volume che entra ed esce. Se della massa entra ed esce all'interno della superficie, può essere cambiata all'interno del volume.

ρv_j = Moto della nostra massa che si sposta all'interno del volume.

Possiamo scrivere, applicando il teorema di Gaus secondo membro della (formula 1) diventa:

$$= \int_V \left(\frac{d\rho}{dt} + \sum_j \frac{\partial \rho v_j}{\partial x_j} \right) dV$$

Forma differenziale(ho un fluido incomprimibile). Presuppone la forma integrale, e dice che la variazione di massa nel tempo all'interno del nostro volume è data dai 2 contributi che possono essere scritti in quel modo, se sono in una condizione in cui vale la conservazione della massa, ossia dm/dt=0, per qualsiasi V all'interno dello spazio di osservazione.

allora se l'integrale è nullo per qualunque dominio di integrazione, allora vuol dire che l'integrando è nullo. Il vincolo che sia =0 per ogni V.

$$\frac{d\rho}{dt} + \sum_j \frac{\partial \rho v_j}{\partial x_j} = 0$$

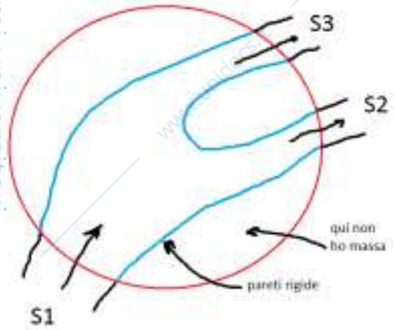
Questa è la forma differenziale dell'equazione di continuità della conservazione della massa.

Se il fluido è incomprimibile (ρ = cost), allora $d\rho/dt=0$ il primo termine della sommatoria è nullo e possiamo portare fuori ρ dalla derivata. In questo caso l'equazione di continuità di riduce ad una equazione che interessa esclusivamente il campo di velocità:

$$\sum_j \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \qquad \text{ovvero in 3 dimensioni} \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

questa espressione, possiamo scriverla se conosciamo tutto il campo di velocità per un fluido incomprimibile.

LEGGE DI KIRCHOFF:un condotto con una biforcazione, a pareti rigide con un fluido che scorre al suo interno:



In questo caso scriviamo la legge della conservazione della massa: abbiamo una distribuzione di massa uniforme, supponiamo di avere a che fare con pareti rigide e consideriamo di avere a che fare con un fluido incomprimibile.

$$\int_V \frac{d\rho}{dt} dV + \int_S \sum_j \rho v_j v_j dS = \rho \int_S \bar{v} \cdot \bar{v} dS = 0$$

Essendo il fluido incomprimibile $d\rho/dt=0$ e posso portare fuori ρ è uguale in tutte le posizioni, quindi possiamo portarlo fuori dall'integrale.Di tutte le superfici, sia che consideriamo quelle piccole, sia quelle grandi, se consideriamo quelle piccole, le superfici non si muovono e non abbiamo transito di massa, all'interno non abbiamo massa, per cui quella che ci genera transito, sono S1, S2, S3.

$$\int_{S_1} \bar{v} \cdot \bar{v} dS + \int_{S_2} \bar{v} \cdot \bar{v} dS + \int_{S_3} \bar{v} \cdot \bar{v} dS = 0$$

questi integrali sono 3 portate (massa che transita). Se consideriamo la portata uscente positiva, allora si ottiene:

$$-Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_1 = Q_2 + Q_3$$

la legge di Kirchoff, non è altro che la legge di continuità

EQ MOTO EULERO=non tutti i problemi possono essere affrontati con la sola equazione di continuità, in quanto fa solo delle assunzioni riguardanti il moto, sul fatto che ci sia una massa in moto, però non dice nulla a riguardo alle forze in gioco, abbiamo solo della massa che si muove. Inevitabilmente nel momento in cui vogliamo considerare la meccanica del fluido, quello che dovremmo analizzare sono come le forze in gioco influiscono sulle masse in moto. Scriviamo la legge di Newton F=ma, dove in questo caso quello che stiamo analizzando è un fluido, per cui è il nostro volumetto infinitesimo di fluido che contiene una massa che non è fermo, ma è in moto.

il bilancio delle forze applicate al nostro cubetto di fluido è sempre la somma delle forze applicate uguale a massa per l'accelerazione.

La nostra F risultante delle forze applicate per un volumetto infinitesimo

$$\sum_j \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + X_i = 0 \qquad \text{per} \qquad i = 1, 2, 3$$

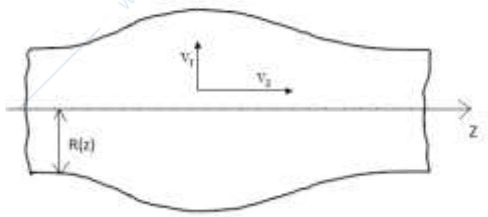
Se l'equilibrio è dinamico si avrà:

$$\sum_j \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + X_i = \rho \frac{Dv_i}{Dt}$$

che costituisce l'equazione di Eulero del moto.

MOTO DI UN FLUIDO IN UN TUBO A SEZIONE CIRCOLARE VARIABILE A PARETI RIGIDE

Condotto con un'asse z, a sezione circolare che ha un raggio variabile R che dipende da z, R(z) e vediamo che tipo di informazione possiamo tirare fuori dalla sola equazione di continuità. Consideriamo che la struttura abbia simmetria assiale, che le pareti siano rigide e che il fluido sia incomprimibile.



equazione di continuità se il fluido è incomprimibile sarà:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

in coordinate cilindriche diventa:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

La simmetria assiale mi permette di fare una semplificazione: ci spostiamo lungo l'asse, quindi abbiamo potenzialmente una dipendenza da z, possiamo avere una dipendenza dalla distanza dall'asse, però il fatto che sia simmetrico rispetto all'asse e abbia una simmetria della struttura cilindrica vuol dire che non dipende dall'angolo specifico. Non c'è nessun motivo per cui una cosa che succede ad una certa distanza dall'asse per ϑ= 10° sia diversa da quella che succede per ϑ=30°, in tutti i settori succede la stessa cosa, può dipendere da z, può dipendere da R ma non dipende da ϑ. Quindi

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0$$

che diventa portando su r:

$$\frac{\partial}{\partial r}\big(r v_r(r,z,t)\big) + r\frac{\partial v_z(r,z,t)}{\partial z} = 0$$

v_r e v_z dipendono da r, da z e dal tempo t (e non da ϑ).

A questo punto se vogliamo mettere le condizioni sul fatto che la parete sia rigida dobbiamo prendere l'espressione sopra e far entrare in qualche modo quello che è il profilo della parete. integriamo da 0 a R(z) perché comunque abbiamo considerato un condotto generico in cui il raggio R dipende dalla coordinata z, non abbiamo un condotto cilindrico.

$$\int_0^{R(z)} \frac{\partial}{\partial r}\big(r v_r(r,z,t)\big)dr + \int_0^{R(z)} \frac{\partial r v_z(r,z,t)}{\partial z}dr = 0$$

Il primo integrale è la variazione in r di r v_r integrata rispetto ad r quindi

$$\int_0^{R(z)} \frac{\partial}{\partial r}\big(r v_r(r,z,t)\big)dr = \Big[r v_r(r,z,t)\Big]_0^{R(z)} = R(z)\cdot v_r\big(R(z),z,t\big) - 0\cdot v_r(0,z,t) = R(z)\cdot v_r\big(R(z),z,t\big)$$

v_r èla velocità radiale calcolata alla parete, ma dato che la parete è ferma la velocità radiale alla parete è nulla. Avendo le pareti rigide, stanno ferme quindi la velocità radiale alla parete è zero.

il primo integrale non c'è, ci rimane l'espressione

$$\int_0^{R(z)} \frac{\partial r v_z(r,z,t)}{\partial z}dr = 0$$

Consideriamo la regola di Leibniz:

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\int_{u(\lambda)}^{v(\lambda)} f(x,\lambda)dx = \int_{u(\lambda)}^{v(\lambda)} \frac{\partial}{\partial\lambda} f(x,\lambda)dx + f(v,\lambda)\frac{\partial v}{\partial\lambda} - f(u,\lambda)\frac{\partial u}{\partial\lambda}$$

Applicando la regola di Leibniz al nostro integrale, sostituendo λ=z, v=R,u=0, dx=dr

$$\int_0^{R(z)} \frac{\partial}{\partial z} r v_z(r,z,t)\,dr = \frac{\partial}{\partial z}\int_0^{R(z)} r v_z(r,z,t)\,dr - R(z) v_z(R(z),z,t)\cdot\frac{\partial R(z)}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial z} v_z(0,z,t) = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} v_z(0,z,t) = 0$$

$$-R(z)v_z(R(z),z,t)\frac{\partial R(z)}{\partial z} = 0$$

Se il raggio R è fisso(non dipende da z)è ∂R(z)/∂z =0. se il raggio non è fisso per z ho una variazione della parete, in quel punto potete considerare la vostra parete che fa un ∂R(z)/∂ (o aumenta o cala).

mi rimane:

$$\frac{\partial}{\partial z}\int_0^{R(z)} r v_z\,dr = 0$$

che è:

$$\frac{\partial}{\partial z}\int_0^{R(z)} 2\pi r v_z\,dr = 0$$

significato=

$$\int_0^{R(z)} 2\pi r dr\, v_z$$

Questo integ R è dato da v_z integrata su un dominio 2πrdr, dove 2πrdr è il dominio di integraz per lo specifico valore di v_z. 2πrdr è la corona di spessore dr, che è il dominio su cui potete considerare, essendo la sim assiale, che v_z abbia valore cost. 2πrdrv_z integrato su tutta la sez è la portata in direz z.

$$\int_0^{R(z)} 2\pi r v_z(r,z,t)dr = Q(z) \qquad \frac{\partial}{\partial z}\int_0^{R(z)} 2\pi r v_z\,dr = 0 \qquad \frac{\partial}{\partial z}Q(z) = 0 \quad \Rightarrow \quad Q(z) = cost$$

la portata è costante in direzione z si conserva,ci dice esattamente quello che ci dice l'equazione di continuità.

Equazioni di campo per fluidi (Newtoniani) e solidi (Hooke)

Nei molti casi in cui è possibile trascurare l'interazione tra processi meccanici e termici (teoria termoelastica dissociata), le equazioni che descrivono il problema meccanico sono:

- 1 equazione di continuità
- 3 equazioni del moto
- 6 equazioni costitutive (da σ_{ij} simmetrica)

Dagli ultimi due punti derivano le equazioni di Navier-Stokes.

Si tratta di 10 equazioni ove figurano (se le forze di massa sono note) 10 funzioni incognite del tempo e della posizione.

Le 10 incognite sono:

- la pressione
- le 3 componenti di velocità (o, in alternativa, dello spostamento)
- le 6 componenti indipendenti della tensione σ_{ij}

Condizioni di compatibilità (integrabilità)

Per un materiale solido le componenti di deformazione devono soddisfare le condizioni:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{xz}}{\partial z \partial x}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{zy}}{\partial y \partial z}$$

Per un fluido analogamente deve risultare:

$$\frac{\partial^2 V_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_{yy}}{\partial x^2} = 2\frac{\partial^2 V_{xy}}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial^2 V_{xx}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 V_{zz}}{\partial x^2} = 2\frac{\partial^2 V_{xz}}{\partial z \partial x}$$

$$\frac{\partial^2 V_{zz}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_{yy}}{\partial z^2} = 2\frac{\partial^2 V_{zy}}{\partial y \partial z}$$

Se queste equazioni non sono verificate nei dati sperimentali possono esserci stati errori di misura.

NAVIER-STOKES= l'equazione di Navier-Stokes vi stabilisce una relazione pressione-velocità con densità di massa e viscosità, però dentro sta il fatto che l'avete scritta così perché il fluido ha tutte quelle proprietà del fluido viscoso, newtoniano, incomprimibile, che vuol dire tutta una serie di proprietà meccaniche, quindi tale equazione non la potete usare a caso per qualunque fluido purché abbia una densità e una viscosità.la ottengo per sostituzione

L'equazione costitutiva per il nostro fluido Newtoniano, isotropo e incomprimibile

$$(\sigma_{ij}) = -pI + 2\mu(v_{ij})$$

Da cui:

$$\sigma_{xx} = -p + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} \qquad \sigma_{xy} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$\sigma_{yy} = -p + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} \qquad \sigma_{yz} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

$$\sigma_{zz} = -p + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} \qquad \sigma_{xz} = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

Prendo l'equazione di Eulero del moto in direzione x (le equazioni sono tre e si ragiona in maniera analoga sulle tre componenti)

$$\rho\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{zx}}{\partial z} + X$$

Dove Du/Dt è la derivata materiale che dopo espliciteremo e a secondo membro ho il bilancio di tutte le tensioni nella direzione specifica.

Sostituendo le espressioni di σ_{xx} , σ_{yx} , σ_{zx} ottengo:

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + 2\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right) + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}\right) + X$$

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + \mu\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + X$$

per l'equazione di continuità per fluido incomprimibile

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \qquad \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + \cancel{\mu\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)} + X$$

Le 10 equazioni vanno bene sempre perché le prime 4 sono generiche, la conservazione della massa e le leggi di Newton scritte per il caso, e le altre 6 le dettagliate per il fluido specifico. Quando utilizzate il problema ridotto di Navier-Stokes inevitabilmente in realtà ci avete infilato già dentro le informazioni del fluido specifico anche se non compaiono esplicitamente. Tutto ciò per dire che la vostra equazione di Navier-Stokes di norma la vedete in questa forma qua

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\nabla^2 u + \underline{X}$$

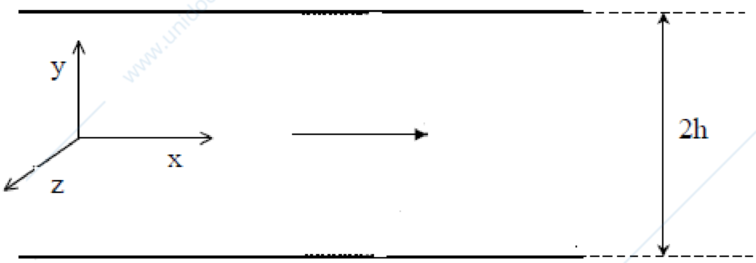
- $\partial u/\partial t$ riguarda la stazionarietà
- $u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}$ sono le accelerazioni convettive
- $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ è la viscosità dinamica che è un rapporto tra viscosità e densità
- $\nabla^2 = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z^2}$ è l'operatore Laplaciano
- $\underline{X}$ sono le nostre forze di massa (per unità di massa), di solito questo lo vedete come X che è per unità di volume, in realtà $\underline{X} = X/\rho$ (lo vedrete sempre scritto come X, è questione di matching dimensionale per cui in un caso è per unità di massa e in un caso è per unità di volume)

Queste sono le nostre equazioni di Navier-Stokes,in questo caso avete una relazione che vi lega il campo di velocità alla caduta di pressione e, rispetto a quelle che sono le caratteristiche del fluido, l'unica cosa che vi compare sono la densità e la viscosità. Nel senso che anche la viscosità dinamica è un rapporto tra viscosità e densità. Queste equazioni assumono questa forma per tutte queste motivazioni, quindi dentro c'è il fatto che il fluido è incomprimibile, che è isotropo, dentro c'è il fatto che ha determinate caratteristiche meccaniche anche se non vi compare esplicitamente perché avete sostituito l'equazione costitutiva dentro l'equazione del moto percui inevitabilmente diventa specifica e non potete utilizzarla arbitrariamente semplicemente perché un fluido ha una viscosità e una densità di massa, non è detto che vada bene.

Se abbiamo un set di equazioni per cui adesso avendo a che fare con il mio fluido viscoso, newtoniano, isotropo, incomprimibile, e volessi risolvermi il problema soltanto in pressione e campo di velocità che cosa userei? Che cosa useremo per identificare il campo di velocità? Che set di equazioni?

Possiamo utilizzare le equazioni di Navier-Stokes che sono 3, una per ogni componente di velocità. Quindi avrò le 3 equazioni di Navier-Stokes e l'equazione di continuità così ho 4 equazioni in p e *v* cioè ho 4 equazioni in 4 incognite dove all'interno è nascosto il tipo di fluido che ho. Quindi posso utilizzare equazione di continuità e equazioni di Navier-Stokes per identificare il campo di velocità associato allo stato pressorio. Dopodiché se mi interessano le tensioni τ_{ij} cosa devo fare? Sostituisco nelle equazioni costitutive, quindi le vado a ripescare dopo però come al solito l'equazione di Navier-Stokes è sposata con le sue equazioni costitutive.

<u>Flusso stazionario di un fluido incomprimibile in un canale orizzontale</u>.



siamo in uno stato di flusso unidirezionale, e il nostro canale è largo 2h. Abbiamo messo il sistema di riferimento, in cui z è la profondità del canale, y è la coordinata che descrive la larghezza, x è l'asse longitudinale al canale ed è la direzione del moto.

Consideriamo che abbiamo a che fare con un fluido viscoso, newtoniano, incomprimibile, isotropo per cui ha tutte le nostre caratteristiche del caso. Consideriamo di essere in condizioni stazionarie. Il fluido è viscoso quindi consideriamo che ci sia l'aderenza alla parete ossia la velocità è continua tra la parete e il fluido stesso, che è una caratteristica del nostro fluido viscoso. Il canale ha le pareti rigide.

Vogliamo andare ad identificare quello che è il campo di velocità

Equazione di continuità

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

La scriviamo in forma differenziale perché abbiamo il fluido che rispetta tutte le nostre condizioni e perché in realtà facciamo lo studio del campo di velocità in dettaglio, quindi andandoci ad identificare le nostre componenti.il flusso è unidirezionale, quindi siamo in una condizione in cui consideriamo che v e w siano nulle.

Dall'equazione di continuità quindi i due termini $\partial v/\partial y$ e $\partial w/\partial z$ scompaiono e ci rimane

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

Il che vuol dire che u è funzione di y e z in generale. $u=u(y,z)$

la nostra u è funzione di entrambe le coordinate della sezione, in questo caso abbiamo una sezione che è rettangolare. Per semplificare il problema in questo caso, ipotizziamo che il canale sia molto profondo e che stiamo studiando il problema lontano dal fondo del canale e dal pelo dell'acqua.canale è molto profondo vuol dire che la profondità z è significativamente più elevata della larghezza y del nostro canale, e ci troviamo in uno strato di fluido che è lontano dal pelo dell'acqua, quindi dalla superficie, e dal fondo del canale allora possiamo ipotizzare che u non dipenda da z e che quindi u sia dipendente solo da y.

Quindi se siamo in questa condizione, aggiungiamo rispetto alla condizione specifica che du/dz=0. u=u(y).

A questo punto scriviamo le equazioni di Navier-Stokes

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right]+X$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right]+Y$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right]+Z$$

condizioni stazionarie **$\partial u/\partial t=0$, $\partial v/\partial t=0$, $\partial w/\partial t=0$** ,Moto unidirezionale= l'unica componente di velocità diversa da zero è quella in direzione assiale cioè la nostra u quindi ho **$v(\partial u/\partial y)=0$, $w(\partial u/\partial z)=0$ $u(\partial v/\partial x)=0$, $v(\partial v/\partial y)=0$, $w(\partial v/\partial z)=0$ e $\partial^2 v/\partial x^2=0$, $\partial^2 v/\partial y^2=0$, $\partial^2 v/\partial z^2=0$ $u(\partial w/\partial x)=0$, $v(\partial w/\partial y)=0$, $w(\partial w/\partial z)=0$ e $\partial^2 w/\partial x^2=0$, $\partial^2 w/\partial y^2=0$, $\partial^2 w/\partial z^2=0$** Dall'equazione di continuità abbiamo ricavato il fatto che $\partial u/\partial x=0$. Fluido viscoso newtoniano incomprimibile, pareti rigide, moto unidirezionale, v=0,w=0 quindi $\partial u/\partial x=0$. Quindi il primo termine dell'accelerazione convettiva è nullo **$u(\partial u/\partial x)=0$** e il primo termine del laplaciano di u è nullo **$\partial^2 u/\partial x^2=0$** Poi abbiamo imposto, rispetto alle caratteristiche del problema che abbiamo considerato ossia che il canale sia sufficientemente profondo e che ci troviamo lontano dagli estremi in z, che $\partial u/\partial z=0$ quindi per quell'ipotesi aggiuntiva il termine **$\partial^2 u/\partial z^2=0$** Per formulazione generale avremo queste tre componenti di forze di massa applicate X, Y, Z , ma rispetto alle caratteristiche specifiche non ci sono particolari motivi per cui ci debbano essere delle forze di massa in direzione y e in direzione x quindi **X=0** e **Y=0** Inoltre consideriamo un canale orizzontale per cui comunque andiamo a trascurare anche l'effetto di questa componente in z, quindi **Z=0**. consideriamo il singolo strato di fluido in cui non ci sia una significativa differenza di pressione.quello che ci rimane sono le equazioni

$$0=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\qquad 0=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\qquad 0=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$

Dalle ultime due equazioni possiamo dire che $\partial p/\partial y=0$ e che $\partial p/\partial z=0$, quindi p dipende solo da x: p=p(x)

La seconda e la terza equazione non ci dicono nulla sul campo di velocità ma ci dicono solo che p=p(x), mentre prima u era funzione soltanto di y (u=u(y)), quindi questa cosa è importante perché se p dipende solo da x e u dipende solo da y allora il termine $\partial p/\partial x$ diventa una derivata totale. Se noi usiamo questa espressione

$$0=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

per integrare u rispetto ad y, il termine $-1/\rho(\partial p/\partial x)$ diventa una costante, però per considerarla una costante, dove faccio l'integrazione rispetto a y devo avere però affermato che p non dipenda da y. La derivata parziale di per se potrebbe dipendere da y, ma il fatto che dalla seconda e dalla terza equazione venga fuori che p non dipende da y, ci permette di considerare $-1/\rho(\partial p/\partial x)$ una costante nell'integrazione.La seconda e la terza equazione ci dicono che p dipende solo da x , mentre u dipende solo da y, le due variabili sono indipendenti quindi posso denominare alfa= -dp/dx

La mia equazione diventa

$$\nu\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{\nu\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\qquad \nu=\frac{\mu}{\rho}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{\alpha}{\mu}$$ integrando-> $$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\alpha}{\mu}y+A$$ ottengo: $$u(y)=-\frac{\alpha}{2\mu}y^2+Ay+B$$

Per identificare le costanti di integrazione A e B mi servono le condizioni al contorno che qui sono date dalla condizione di aderenza alla parete cioè u(h)=0 e u(-h)=0

Ho due costanti di integrazione e due equazioni al contorno. Andando a sostituire, quello che otteniamo sono i valori di A e B

$$A=0;\ B=\frac{\alpha}{2\mu}h^2\qquad u(y)=\frac{\alpha}{2\mu}\left(h^2-y^2\right)=-\frac{1}{2\mu}\left(h^2-y^2\right)\frac{dp}{dx}$$

Che è il ben noto profilo parabolico. Da questo potete ricavare la portata Q per lo spessore unitario di z (in cui possiamo considerare l'indipendenza da z) che sarà data da che cosa? Visto che u dipende da y, la portata sarà data da u(y) moltiplicato per la superficie su cui considero u(y) che è costante,(perché è una superficie in yz, considero uno strato unitario in z per l'ultrasemplificazione su z che abbiamo fatto) moltiplicato per dy che è il tratto infinitesimo in cui considero che valga lo specifico valore u(y).

$$Q = \int_{-h}^{h} u(y)dy = \int_{-h}^{h} \frac{\alpha}{2\mu}\left(h^2 - y^2\right)dy = \frac{\alpha}{2\mu}\left(2h^3 - \frac{2}{3}h^3\right) = \frac{2\alpha}{3\mu}h^3 = -2\frac{h^3}{3\mu}\frac{dp}{dx}$$

ho un risultato con un segno negativo perché ovviamente la pressione cala.Definisco la resistenza di Poiseuille per unità di lunghezza r

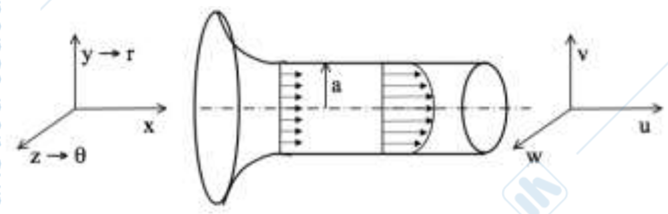
$$r = \frac{-\frac{dp}{dx}}{Q} = \frac{3\mu}{2h^3}$$

, la resistenza per uno spessore H e una lunghezza L del condotto $R = \frac{3\mu}{2h^3 H}L$

Questo perché al posto dell'1 nell'integrale, se consideriamo uno spessore H, diventa il vostro H. Prima dp/dx era per unità di lunghezza infinitesima dx, mentre invece se consideriamo una caduta di pressione finita, dp/dx diventa un ΔP finito sulla vostra lunghezza L cioè

$$Q = H\int_{-h}^{h} u(y)dy = -\frac{2h^3}{3\mu}\frac{\Delta P}{L}\cdot H \qquad R = \frac{-\frac{\Delta P}{L}}{Q} = \frac{3\mu}{2h^3 \cdot H}\cdot L$$

Flusso stazionario di un fluido incomprimibile in un tubo cilindrico orizzontale di sezione circolare costante di raggio a(pareti rigide, fluido viscoso newtoniano incomprimibile.



Le equazioni da cui partiamo sono le equazioni di continuità in questo caso le equazioni di Navier stokes perché abbiamo a che fare con il fluido specifico per andare a risolvere il nostro problema, ciò che ci cambia è la geometria del condotto.
Partiamo dalle nostre condizioni cartesiane :x direzione dell'asse, y e z è il piano dove giace la sezione.

condizione cartesiana: $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$ quindi $v(x,y,z) = 0, \quad w(x,y,z) = 0$
fluido incomprimibile è che du/dx=0,ovviamente questa è la formulazione differenziale è inevitabile che questo in realtà contenga la stessa informazione della conservazione della portata in quanto il condotto è cilindrico e a pareti rigide la sezione è costante questo equivale a dire dq/dx=0 perché la A sezione trasversa è una costante.Questa è l'informazione che tiriamo fuori e dalla nostra equazione di continuità ci viene fuori che u è una funzione di y e z quindi è funzione delle coordinate sulla sezione. u=u(y,z) Non possiamo ridurre l'ordine del problema come avevamo fatto per il condotto cilindrico perché la struttura è simmetrica rispetto l'asse del condotto per cui non avrebbe nessun senso ridurre ulteriormente il problema. Andiamo a scrivere l'equazione di Navier Stokes, scriviamo solo la prima perché fondamentalmente la formulazione in forma cartesiana è analoga a quella della volta precedente,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

le componenti in y e z sono quelle che abbiamo visto per il canale orizzontale a sezione rettangolare quindi essendo il moto unidirezionale quello che abbiamo è che le componenti in v e w sono nulle quindi nelle due equazioni per la direzioni y e z delle equazioni di Navier Stokes ci scompaiono tutti i termini che non siano la derivata di pressione quindi l'unica cosa che ci rimane dalla seconda e dalla terza equazione è che dp/dy=0 dp/dz=0 quindi p è funzione soltanto di x questo viene fuori dalla seconda e dalla terza equazione di Navier Stokes, quindi le due equazioni per la direzione y e z perché il moto è unidirezionale, v e w sono nulle, quindi scrivendo la seconda e la terza mi vengono fuori tutti i termini nulli tranne la derivata in p.
Scriviamo la prima quella direzione x e vediamo cosa tiriamo fuori.
Non metto la componente forza di massa, consideriamo un condotto orizzontale non c'è nessun motivo perché ci siano forze di massa o di volume, in questa direzione non avremo a che fare con un materiale carico o immerso in un campo elettromagnetico.

Nel caso di questo tipo di formulazione potrebbe essere rilevante, di solito è una considerazione che non si fa a meno che non si facciano considerazioni specifiche sulla caduta di pressione , nel caso in cui andiate a considerare un condotto che scorre verticalmente perché in quel caso ho una componente forza di massa dovuta al peso della colonna di fluido.
Di fatto dal punto di vista della modellazione che fate è qualcosa che associate alla caduta di pressione, c'è una parte di caduta di pressione che dipende effettivamente dalla caduta di pressione della fluidodinamica e una parte che dipende dal fatto che avete una colonna di fluido quindi di fatto è qualcosa che va a contribuire alla caduta di pressione lungo il condotto e di conseguenza condiziona anche l'eventuale flusso però tendenzialmente per piccoli condotti o che non siano delle significative colonne di fluido poste in verticale trascuriamo quelle che sono le componenti dovute alle forze di massa, nel nostro caso è orizzontale quindi non c'è niente.

w= v=0 da equazioni continuità

$$\left(\cancel{\frac{\partial u}{\partial t}} + u\cancel{\frac{\partial u}{\partial x}} + \cancel{v\frac{\partial u}{\partial y}} + \cancel{w\frac{\partial u}{\partial z}}\right) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

da condizioni stazionarie

$$\alpha = -\frac{dp}{dx} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{\alpha}{\rho\nu} = -\frac{\alpha}{\mu}$$

Quello che rimane è:
Abbiamo le coordinate cartesiane che ci permettono di descrivere la sezione trasversa però sono scomode per definire condizioni al contorno (che saranno le condizioni di aderenza alla parete) difficilmente associabili a geometria condotto e di simmetria assiale.passo da coordinate cartesiane a cilindriche che diventeranno:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \cancel{\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}} = -\frac{\alpha}{\mu}$$

Semplifico perché il problema non ha simmetria assiale, la struttura è cilindrica la distribuzione è simmetrica rispetto all'asse quindi $\frac{\partial u}{\partial \theta}$=0

perché non c'è niente nel problema che suggerisca dipendenza dall'angolo sulla sezione, quindi questa rimane l'equazione che andiamo ad integrare.

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right) = -\frac{\alpha}{\mu}r$$

$$r\frac{du}{dr} = -\frac{\alpha}{\mu}\frac{r^2}{2} + A$$

$$\frac{du}{dr} = -\frac{\alpha}{\mu}\frac{r}{2} + \cancel{\frac{A}{r}}$$

$$u(r) = -\frac{\alpha}{\mu}\frac{r^2}{4} + \cancel{A\log r} + B$$

A=0

Ho due condizioni la prima è la condizione di aderenza parete u(R)=0 e la seconda è la simmetria assiale

$$\left.\frac{du}{dr}\right|_{r=0} = 0$$

L'aderenza alla parete ci dice che u(R)=0 su tutta la parete quindi su tutto il contorno della sezione e la simmetria ci dice che u dipende solo da R.

Le cose che possono succedere sono tre:
1)è zero al bordo e che rimane piatta, quindi il profilo non varia mai.
2)è zero al bordo e aumenta in funzione di R a partire dal centro (comunque qualunque andamento abbia aumenta in una direzione e nell'altra, in più è continua per cui la pendenza deve essere zero, questo vuol dire che A=0) prendo R=a

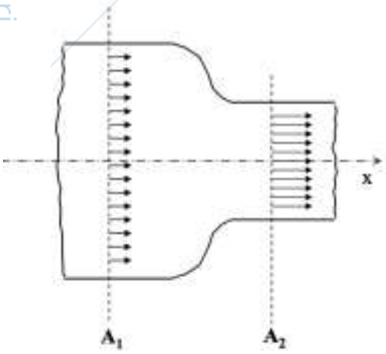
$$u(r) = \frac{\alpha}{4\mu}\left(a^2 - r^2\right) = -\frac{1}{4\mu}\left(a^2 - r^2\right)\frac{dp}{dx}$$

questo è il vostro profilo di velocità, se aveste avuto a che fare un condotto uniforme anulare quale sarebbero state le condizioni? Un condotto con simmetria circolare che però ha parte solida in mezzo per cui la parte in cui il fluido fluisce è una corona. La formulazione generale sarebbe stata uguale? Cosa cambia? Le condizioni al contorno che diventano sempre quella su R (u(R)=0) e quella sul raggio piccolo (u(r)=0) quindi quello che avete sono due condizioni di aderenza dovute al fatto che il fluido è viscoso alle due pareti interna ed esterna.
Come calcolo la portata?

$$Q = \int_0^a u(r)2\pi r dr = \int_0^a \frac{\alpha}{4\mu}\left(a^2 - r^2\right)2\pi r dr = \frac{\alpha\pi}{2\mu}\left|a^2\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right|_0^a = \frac{\alpha\pi}{2\mu}\left(\frac{a^4}{2} - \frac{a^4}{4}\right) = \frac{a^4\pi}{8\mu}\alpha$$

$$r = \frac{-\frac{dp}{dx}}{Q} = \frac{8\mu}{\pi a^4}$$ prendo sempre a=R

Quindi è direttamente proporzionale alla viscosità e inversamente proporzionale alla quarta potenza del raggio del condotto che ha effetto molto potente nella regolazione della resistenza.
Quindi ho ottenuto la resistenza opposta dal condotto, l'abbiamo ottenuta utilizzando il nostro set di equazioni: di continuità sfrutta la conservazione della massa mentre quelle di Navier Stokes contengono le equazioni di Eulero del moto che non sono altro che la seconda legge di Newton e quelle che non sono altro che le caratteristiche del fluido(newtoniano, viscoso, incomprimibile) in questo tipo di formulazione passando per il profilo di velocità quindi questa è legata a quel determinato profilo di velocità e si porta dietro una serie di informazioni.
Tutto questo vale nel momento in cui ho un condotto cilindrico a pareti rigide ci permette di fare una semplificazione molto forte in quanto in realtà è il condotto cilindrico che ci permette di definire a rigore un flusso che sia unidirezionale.Se il condotto non è cilindrico vi si generano componenti convettive perché le pareti non sono tutte parallele il fatto che il fluido scorra sulla parete impone che ci siano delle componenti di velocità in direzione radiale che porta alla comparsa degli altri termini di velocità.
Questo è vero per condotto che presenta una leggera cilindricità in cui a rigore non posso fare una trattazione dettagliata del profilo senza prendere in considerazione gli altri componenti di velocità è a maggior ragione vero se ho delle significative strozzature, più il condotto si allontana da avere pareti parallele più diventano dominanti le componenti di moto che non siano assiali.
Approccio semplificato per un condotto che abbia una strozzatura in questo caso significativa e osservo quello che succede tra le due sezioni.



ci svincoliamo dal discorso della conoscenza del profilo di velocità ma diamo modellazione che ci permette di estrapolare quello che è il rapporto tra portata e caduta di pressione, per fare questo ipotizziamo che il fluido sia unidimensionale(è chiaro che non lo è realmente) in quanto se ci interessa una relazione portata e caduta di pressione è soltanto il flusso in direzione assiale che ci determina portata in direzione x, ciò che va in y e z genera convezione.
Considero componente di flusso che va in direzione assiale e visto che non sono in grado di studiare profilo di velocità considero il valor medio di questa componente della velocità in direzione assiale.

Visto che mi interessa solo la portata mi interessa la velocità media è vero che se io ho il profilo di velocità nella sua interezza con la velocità che cambia nei diversi punti della sezione e la integro in dettaglio sulla sezione ottengo la portata, nessuno mi vieta di prendere la portata dividerla per l'area e ottenere la velocità media.
Quindi faccio una trattazione semplificata del problema in cui dico non sono in grado di determinarmi il profilo di velocità poi alla fine mi interessa solo la relazione portata caduta di pressione quindi mi disinteresso delle altre due componenti disinteressandomi delle altre due componenti che ci sono ma non determinano portata facendo questo non sono in grado di studiarmi profilo della velocità assiale quindi

considero solo la velocità media quindi faccio finta che il profilo sia piatto (non è vero che è cosi però dal punto di vista del valore efficace che voglio andare a studiare la condizione è questa).

Tratto il problema in maniera semplificata considerando che il flusso sia unidirezionale il profilo di velocità sia piatto per cui la velocità dipende soltanto dalla posizione assiale e dal tempo, considero il tubo rigido e assumendo che il profilo sia piatto meccanicamente è come se la viscosità sia nulla quantomeno per l'approssimazione che adotto.

Le variabili che ho in gioco sono A(x) perché ciò che caratterizza pesantemente il mio problema è il fatto che sezione cambi e che cambi in funzione della coordinata longitudinale del condotto quindi la sezione è funzione della coordinata x , abbiamo detto che consideriamo profilo di velocità piatto considerando soltanto la velocità media sulla sezione che mi determina moltiplicata per A la portata quindi consideriamo una versione ridotta dell'informazione di velocità che dipende in generale da x e dal tempo e dati queste due informazioni posso dire che la portata che in generale dipende dal tempo è :

$$Q(t) = A(x)u(x,t)$$

perché ho considerato la velocità media della sezione, considerando la viscosità nulla.

Rispetto a questa formulazione semplificata del problema che è lecita perché dal momento che ho questa strozzatura di questo tipo l'azione delle accelerazioni convettive è molto ridondante rispetto a quello della viscosità quindi è lecito che trascuro

μ e le derivate seconde della velocità rispetto le cordinate perché pesano di più le componenti convettive.

Ci andiamo a scrivere Navier Stokes in questa forma semplificata:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

che diventa l'equazione che va a caratterizzare il nostro sistemino in questa versione semplificata.

Non avendo a disposizione un profilo di velocità dettagliato non possiamo scrivere le equazioni di continuità in forma differenziale, quindi come scrivo le equazioni di continuità se le pareti sono rigide e il fluido è incomprimibile e ho un'entrata e un'uscita?

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=0$$

Non è la formulazione generale dell'equazione di continuità però se avete un condotto a pareti rigide con un ingresso e un'uscita il fluido incomprimibile tanta ne entra tanta ne esce.

Questo non accade se fluido è comprimibile o le pareti si spostano.

Se $\frac{\partial Q}{\partial x}=0$ dove Q=A(x)u(x,t) allora:

$$\frac{\partial}{\partial x}[A(x)u(x,t)] = 0 \quad \Rightarrow \quad u\frac{\partial A}{\partial x} + A\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{A}\frac{dA}{dx}u$$

(u che dipende da x l'abbiamo ricavato da equazione di continuità)

$$\frac{1}{A}\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{Q}{A}\left(-\frac{Q}{A^2}\frac{\partial A}{\partial x}\right) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

se lo integro tra sezione 1 e 2 per vedere cosa accade a causa della strozzatura:

$$-\int_1^2 \frac{\partial p}{\partial x} = \rho\left[\frac{\partial Q}{\partial t}\int_1^2 \frac{dx}{A(x)} - Q^2\int_1^2 \frac{dA}{A(x)^3}\right]$$

R(non ha andamento lineare)

ha effetto se siamo in condiz non staz ionarie perché dipende da t

$$P_1 - P_2 = \left[\rho\int_1^2 \frac{dx}{A(x)}\right]\frac{dQ}{dt} + \frac{\rho}{2}\left(\frac{1}{A_2^2} - \frac{1}{A_1^2}\right)Q^2$$

dipende da come varia il profilo non dipende da come varia il profilo

Come è legata caduta di pressione alle condizioni non stazionare dipende da come è fatta strozzatura condotto o da come è fatta la valvola, il che vuol dire che se ho strozzatura a metà del tubo e la considero tra due estremi che hanno stessa area la strozzatura c'è caduta di pressione ma non influenza la condizione stazionaria. Prendo Navier Stokes e normalizzo le variabili in gioco rispetto a dimensioni caratteristiche del problema, esempio: andare a normalizzare velocità rispetto a velocità massima che viene raggiunta nel condotto, andare a normalizzare le lunghezze rispetto al raggio del condotto.
Questo lo posso sempre fare, il che vuol dire che per le coordinate x le variabili che compaiono sono le distanze in quanto ho delle derivate rispetto x y z ho delle componenti di velocità u v w, ho la pressione come variabile e il tempo, quello che posso fare è prendere un valore di riferimento come la velocità massima che si ha nel condotto e la dimensione del condotto se stiamo parlando di questo tipo di formulazione e normalizzare le variabili in gioco.
Per tutte le variabili x utilizzerete una variabile normalizzata che è uguale a x diviso lunghezza caratteristica L.
Quindi nel nostro condotto cilindrico L è il raggio del condotto, V è la velocità massima

Numero di Reynolds

L'equazione di Navier-Stokes può essere posta in forma adimensionale. Per farlo devono essere scelte una velocità caratteristica V ed una lunghezza caratteristica L del sistema che si intende descrivere. Per esempio, analizzando il flusso in un tubo, si può assumere V pari alla velocità media ed L pari al diametro.

Introduciamo così le variabili adimensionali:

$$x'_i = \frac{x_i}{L}; \quad v'_i = \frac{v_i}{V}; \quad p' = \frac{p}{\rho V^2}; \quad t' = \frac{Vt}{L}$$

ed il parametro:

$$R_N = \frac{VL\rho}{\mu} = \frac{VL}{\nu}$$

che è a sua volta adimensionale, essendo.

$$[R_N] = \frac{[V][L][\rho]}{[\tau][V^{-1}][L]} = \frac{[LT^{-1}ML^{-3}]}{[MLT^{-2}L^{-2}LT^{-1}]} = [\ ]$$

In tal modo l'equazione di continuità diventa:

$$\sum_i \frac{\partial v'_i}{\partial x'_i} = 0$$

Mentre l'equazione di Navier-Stokes diventa:

$$\frac{Dv'_i}{Dt} = -\frac{\partial p'}{\partial x'_i} + \frac{1}{R_N}\left(\sum_j \frac{\partial^2 v'_i}{\partial x'^2_j}\right)$$

In tal modo un solo parametro fisico, R_N, compare nelle equazioni di campo. Pertanto, in sistemi geometricamente simili (stessa forma ma diversa dimensione) agli stessi R_N corrispondono le stesse soluzioni $v'_i(x'_i, t')$ e $p'(x'_i, t')$

Note:

- Il numero di Reynolds esprime il rapporto tra forze d'inerzia (ρV^2) e di taglio ($\frac{\mu V}{L}$).
- Per numeri di Reynolds tra 2000 e 15000 si ha la transizione da moto laminare a moto turbolento.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari