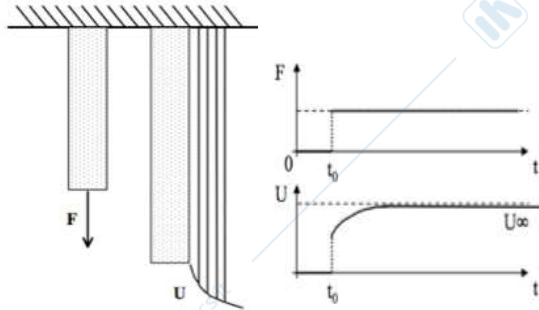


#### 4) VISCOELASTICITÀ LINEARE

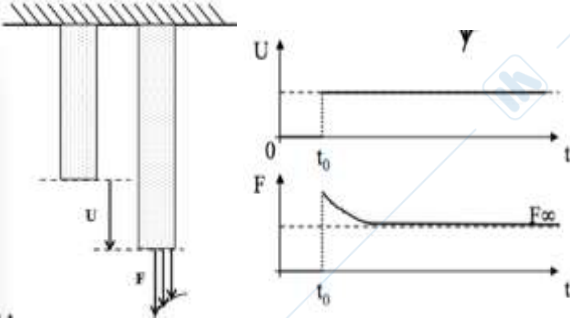
I materiali viscoelastici sono quei materiali che sovrappongono un comportamento elastico a un comportamento viscoso. Abbiamo una parte del comportamento meccanico che è condizionata dalla velocità con cui viene applicata la sollecitazione, oppure la deformazione, è questo è il comportamento viscoso; ma anche un comportamento di tipo elastico che permane una volta esauriti tutti i transitori.

Per descrivere il comportamento dei materiali viscoelastici quello che si fa è verificare se il materiale manifesta fondamentalmente tre comportamenti tipo, che sono:

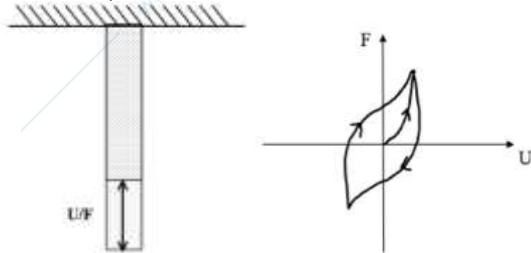
- **CREEP:** (deformazione a carico costante) quando un corpo è rapidamente posto in tensione e la tensione è mantenuta costante il corpo continua a deformarsi. (ha in ingresso un gradino unitario di forza con il quale osserviamo il Creep in cui avete un termine di spostamento sul vostro provino con una variazione istantanea che rispetta la dinamica dell'ingresso dopo di che una dinamica verso un valore che è quello stazionario della deformazione.)



- **RILASSAMENTO:** (tensione a deformazione costante) quando un corpo è rapidamente deformato e la deformazione è mantenuta costante la tensione indotta nel corpo decresce nel tempo. (avete in risposta ad un ingresso di allungamento, quindi uno spostamento sul vostro provino che è il gradino unitario, avete una risposta in forza con queste caratteristiche: una discontinuità iniziale che corrisponde alla dinamica del gradino quindi ad una caratteristica elastica, dopo il quale esaurito il transitorio dello spostamento, che viene esaurito istantaneamente visto che si tratta di un gradino che finisce in 0 ( $t_0$  in figura), avete una dinamica decrescente ad un andamento della forza che tende ad un valore su cui la risposta si assesta, è una sorta di asintoto (tra virgolette), una volta che viene esaurito il transitorio. Quindi la dinamica è quel cambiamento che avete nella risposta allo 0 ( $t_0$ ) fino al raggiungimento del valore stazionario che viene raggiunto dalla vostra forza)



- **ISTERESI:** in un corpo sottoposto a carico ciclico, la relazione tensione deformazione per carichi crescenti è diversa da quella per carichi decrescenti. (l'andamento delle uscite diverse a seconda che stiate caricando o scaricando il materiale ed in più dipende dalla frequenza e dall'ampiezza con cui state sollecitando il materiale, con rampe di salita e discesa diverse nelle due direzioni.)



I modelli meccanici nascono dalla sovrapposizione di un comportamento elastico e di un comportamento viscoso, quindi i modelli originari, partono da queste considerazioni in una dimensione e nascono da una combinazione lineare di comportamenti puramente elastici e puramente viscosi. I due elementi di base sono quindi:

1. La molla: che descrive un comportamento elastico:

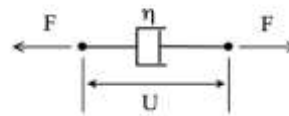
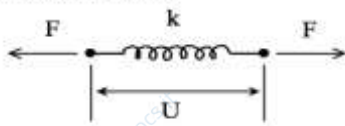
$$F = ku(u \text{ è uno spostamento rispetto ad}$$

una condizione di riposo)

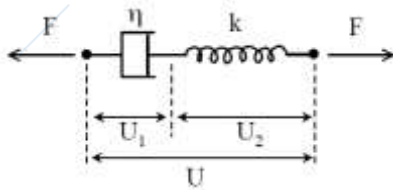
2. Lo smorzatore: che descrive un

comportamento puramente viscoso:

$$F = \eta \dot{u}$$



**Modello di Maxwell** Gli elementi sono in serie.



Per l'elemento elastico si ha:

$$F = ku_2 \Rightarrow \dot{u}_2 = \frac{\dot{F}}{k}$$

Elemento viscoso:

$$F = \eta \dot{u}_1 \Rightarrow \dot{u}_1 = \frac{F}{\eta}$$

Quindi l'equazione costitutiva del modello è:

$$\dot{u} = \frac{\dot{F}}{k} + \frac{F}{\eta}$$

Nel modello di M abbiamo materiale visco e vogliamo riprodurre creep e rilassamento. Tutti e due gli elementi sono percorsi dalla stessa forza mentre quello che è l'allungamento u viene ad essere di fatto suddiviso sui due elementi che sono u<sub>1</sub> e u<sub>2</sub> caratterizzati dalla propria costante di riferimento. Vogliamo vedere quale sia la relazione forza-spostamento per questo tipo di modello è andare ad ottenere l'equazione costitutiva (relazione che lega sul nostro modello forza e spostamento.) osserviamo che lo spostamento :  $u = u_1 + u_2$   $\dot{u} = \dot{u}_1 + \dot{u}_2$  dove essendo lo smorzatore

governato da:  $F = \eta \dot{u}_1$  E la molla governata da  $F = ku_2$  Abbiamo la nostra equazione costitutiva che rappresenta il

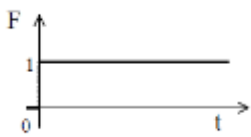
$$\dot{u} = \frac{\dot{F}}{k} + \frac{F}{\eta}$$

comportamento del nostro modello di Maxwell:

Prendiamo l'eq costitutiva e simuliamo:

**Creep:** È la condizione in cui abbiamo un gradino di forza unitario in ingresso e andiamo a vedere quale sia l'uscita in

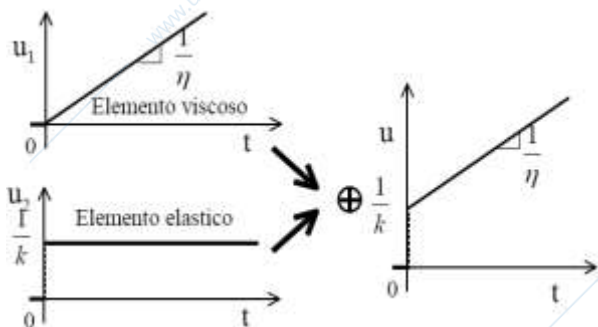
termini di spostamento. valore di allungamento è l'integrale della relazione. u è l'integrale di  $\dot{u}$ , per cui se  $\dot{u} = \frac{\dot{F}}{k} + \frac{F}{\eta}$  Allora u sarà uguale alla somma degli integrali due elementi di  $\dot{u}$ . Possiamo sommare la risposta alla sollecitazione in forza che percorre tutti e due gli elementi perché l'allungamento totale sarà dato dalla somma degli allungamenti dei due elementi molla e smorzatore. in uscita la composizione del comportamento della molla e del comportamento dello smorzatore.



Come è fatto l'allungamento della molla? Essendo un gradino, non aggiunge nessuna dinamica, quindi la forma d'onda d'ingresso è uguale alla forma d'onda d'uscita, cioè un gradino. Ampio 1/k.

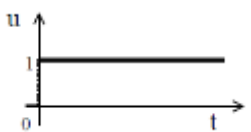
$$\dot{u}_1 = \frac{F}{\eta}$$

Se la forza è un gradino, sullo smorzatore  $\dot{u}_1$  cioè la derivata dello spostamento ed F gradino unitario. L'uscita u è l'integr di un gradino cioè è una rampa di pendenza 1/η



Questa è la risposta del modello di Maxwell alla sollecitazione a gradino in forza in termini di spostamento. Non viene la soluzione che volevamo. ci piace: dovrebbe riprodurre il creep quindi ci soddisfa il fatto che ci sia una discontinuità come nel gradino del creep. cosa non ci piace: sia allunga all'infinito e non raggiunge un valore di stabilità (rampa). Cosa crea quella discontinuità? La molla. Chi fa andare ad infinito? Lo smorzatore.

**Rilassamento:** Abbiamo in ingresso un gradino unitario di spostamento



In questo caso prendiamo la nostra equazione costitutiva perché non abbiamo modo di risolverla in forma grafica. Questa è un'equazione diff del primo ordine lineare

$$\dot{F} + \frac{k}{\eta} F = k \dot{u}$$

Allora essendo u è

un gradino, la derivata del gradino  $\dot{u}$  è la δ di Dirac. Quindi ho la derivata di un andamento in cui ho andamento di una variazione infinita in un tempo infinitesimo nullo, quindi un valore infinito della derivata e poi 0 prima e dopo perché non avete nessuna variazione. Infatti  $\int \delta = 1$ . F(0) è diverso da zero solo nella parte centrale, mentre per la storia di carico che abbiamo in t=0 è zero.

Poi  $e^{\frac{k}{\eta}t}$  in  $t=0$  vale 1. Rimane  $k$  per  $e^{\frac{k}{\eta}t}$  per  $\int \delta=1$ . Per cui:

$$F(t) = ke^{-\frac{k}{\eta}t}$$

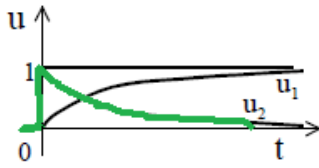
Quindi quello che avete è:



nel modellino di Maxwell vediamo  $F(0)$  e una discontinuità per  $0^+$  e questo che va giù, partendo da  $k$ .

Nella risposta in forza che otteniamo ci piace la discontinuità in zero e la dinamica in decadimento. Non ci piace che però questo cosa vada da 0 all'infinito. Il fatto che vada all'infinito ho un comportamento in cui ho l'allungamento non nullo quindi una risposta

in forza nulla.



$$u_2(t) = \frac{F}{k} = e^{-\frac{k}{\eta}t}$$

$$u_1(t) = u - u_2 = 1 - e^{-\frac{k}{\eta}t}$$

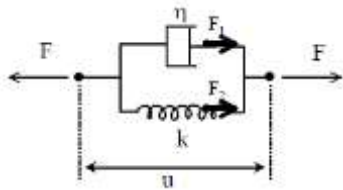
Essendo  $u$  lo spostamento totale  $u = u_1 + u_2$  allora  $u_1 = u - u_2$ . Ci piace la discontinuità in 0, qualitativamente abbiamo detto che ci piace com'è la dinamica, non ci piace il valore nullo una volta esaurito il transitorio.

Discontinuità all'inizio ci piace, chi la fa? La molla che è libera gli sparo dentro un allungamento lei si deforma, le sparo dentro una forza e risponde di conseguenza.

Dinamica: ci piace più di quella di prima, nel senso che quella di prima era una rampa, questo andamento di tipo esponenziale ci piace di più. Quindi il gradino parte e la molla si prende tutta la deformazione. Se la molla si prende tutta la deformazione cosa succede? Si allunga quindi sviluppa forza. Il fatto che la molla si deformi determina forza. Quindi istantaneamente la molla si allunga, istantaneamente si sviluppa forza, alchè lo smorzatore comincia ad allungarsi con la sua

dinamica la deformazione se l'è presa tutta molla, un po' alla volta la deformazione finisce tutta sullo smorzatore, la molla non può far più niente e il fatto che avete una molla in serie che non porta più deformazione fa sì che lo smorzatore si fermi perchè non c'è più forza. E in questo caso è quello che vi determina il tipo di comportamento. Il fatto cioè che sta forza debba tornare a zero. Non funziona!!!

### Modello di Voigt Elementi posti in parallelo



$$F_1 = \eta \dot{u}$$

$$F_2 = ku$$

$$F = F_1 + F_2$$

$$F = ku + \eta \dot{u} \quad \text{equazione costitutiva}$$

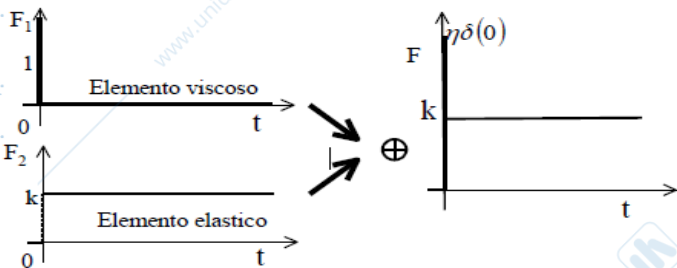
La forza si ripartisce inevitabilmente sui due rami e tutti e due vanno soggetti allo stesso allungamento  $u$ .  $F = F_1 + F_2$ .

**Rilassamento:** Se in ingresso abbiamo un gradino unitario di deformazione, in uscita su  $F_2$  (elem elastico) avremo un gradino unitario di ampiezza  $k$ .

Su  $F_1$  avremo, se  $u=1(t)$  è un gradino allora  $\dot{u}$  è la  $\delta$  di Dirac. Quindi  $F_1$  sarà la vostra  $\delta$  e poi torna a zero. In

particolare sarà uguale a  $F_1 = \eta \delta(0)$  quindi l'integrale avrà valore  $\delta$ .

Quindi la risposta teorica del vostro modellino al rilassamento è il fatto che avete una risposta di forza infinita e poi un valore mantenuto a  $K$ .



Avete una risposta infinita perché avete tutto vincolato all'allungamento dello smorzatore, lo smorzatore puro non ne vuole sapere di allungarsi istantaneamente perché le sue caratteristiche è continua in lunghezza, quindi avete teoricamente una risposta infinita nell'istante 0.

Non ci piace il valore in zero che va all'infinito, che è colpa dello smorzatore che non può (la parte viscosa) in nessun modo può rispondere istantaneamente alla deformazione. Ci piace il fatto che alla fine ho un valore statico quando ho esaurito la risposta in ingresso mi rimane un valore non nullo che è dovuto alla molla.

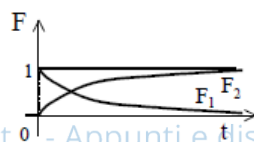
Avete all'inizio tutta la forza che va sullo smorzatore, io gli sparo dentro la deformazione e avete tutta la forza che va sullo smorzatore dopodichè a regime tutta la forza è sul ramo della molla. Quindi quello che piace è il fatto che avete questa dinamica fra i due rami, con la molla che rimane da sola a fare il lavoro dell'elemento elastico.

**Creep:** Ho in ingresso la forza come gradino unitario e ricordatevi che all'inizio avete  $u(0)=0$ , cioè la condizione di riposo del materiale. La vostra eq costitutiva è:

$$\dot{u} + \frac{k}{\eta}u = \frac{1}{\eta}F$$

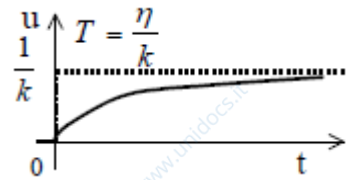
la

$$u(\infty) = 1/k \quad \text{allora il valore } F_2(\infty) = 1 \quad \text{mentre } F_1 = F - F_2$$



moltiplichiamo per  $e^{\frac{k}{\eta}t}$  Su tutto il nostro dominio di integrazione la  $F=1$ . Quindi rimane l'integrale

dell'esponenziale tra 0 e t quindi viene fuori e:  $u(t) = 1/k (1 - e^{-(k/n)t})$ . Quindi la vostra risposta è:



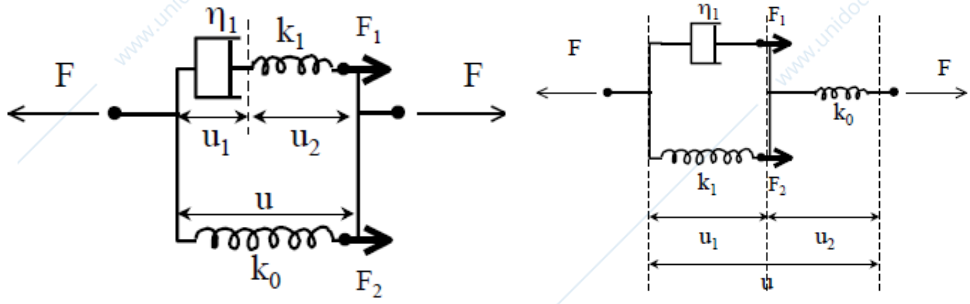
Partiamo da una condizione 0 in cui tutta la forza ce l'ha lo smorzatore, poi un po' alla volta comincia allungandosi a far allungare un po' la molla e a far si che la forza si trasferisca sul ramo della molla e tutto questo giro si ferma quando tutta la forza è sulla molla e la molla con lo smorzatore che si allunga ha raggiunto la lunghezza corrispondente alla forza.

A quel punto la molla si è presa tutta la forza per la sua legge puramente di proporzionalità la lunghezza a regime è determinata dalla rigidità della molla a quel punto lo smorzatore a parte che ci è arrivato con le sue dinamiche, non fa più niente perché a lui non interessa a che lunghezza è, lui mantiene la lunghezza che ha e in caso risponde alla sollecitazione allungandosi. Non ci piace di quel creep: non ha la discontinuità iniziale in lunghezza..perchè lo smorzatore ..io gli posso sparare tutta la forza che ho ma non c'è qualcosa che si può allungare indipendentemente, lo smorzatore si è preso tutta la forza. La dinamica? Data da tutti e due ..dal fatto che uno guidi l'altro.

Il valore a regime è dato dalla molla in parallelo che fa si che tutto si fermi, limita l'allungamento dello smorzatore perché ad un certo punto tutta la forza se la prende lei, corrisponde una forza e un allungamento che determinano il valore a regime, gli elementi in parallelo determinano l'errore a regime. L'aver messo l'elemento elastico in parallelo ha lo svantaggio di prendersi tutta la forza allo smorzatore che poi non ha nessun tipo di disponibilità all'allungamento.

A questo punto non ci siamo riusciti con uno non ci siamo riusciti con l'altro, l'evoluzione naturale è il

**Modello di kelvin**



Gli viene messo una molla in serie ed una molla in parallelo.

$$F + \frac{\eta_1}{k_1} \dot{F} = k_0 u + \eta_1 \left(1 + \frac{k_0}{k_1}\right) \dot{u} = k_0 \left[ u + \frac{\eta_1}{k_0} \left(1 + \frac{k_0}{k_1}\right) \dot{u} \right]$$

Equazione costitutiva:

$E_R = k_0$  è un modulo di elasticità, costante elastica del modellino.  $\frac{\eta_1}{k_1}$  è una costante di tempo

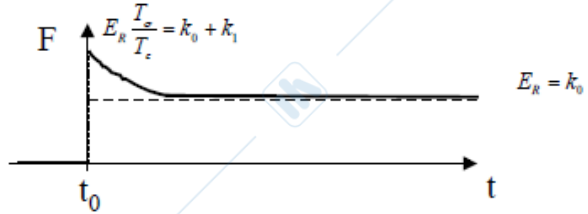
$T_\sigma = \frac{\eta_1}{k_0} \left(1 + \frac{k_0}{k_1}\right)$  è costante di tempo a sollecitazione costante, governa quando avete in ingresso il gradino di forza.

$T_\epsilon = \frac{\eta_1}{k_1}$  è la costante di tempo a deformazione costante, governa l'andamento quando avete il gradino di spostamento.

$$T_\sigma > T_\epsilon$$

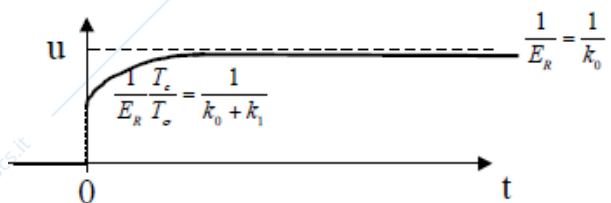
Le soluzioni analitiche di tale eq costitutiva sono:

Funzione di rilassamento



$$K(t) = F(t) = E_R \left[ 1 - \left(1 - \frac{T_\sigma}{T_\epsilon}\right) e^{-\frac{t}{T_\epsilon}} \right] 1(t)$$

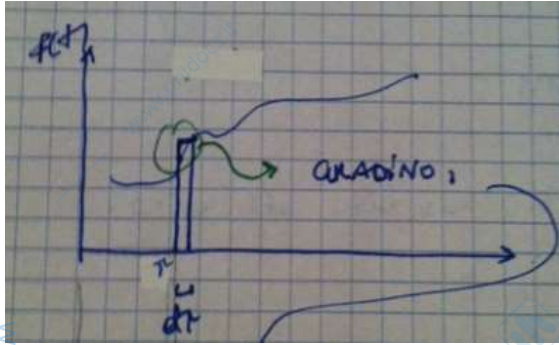
Funzione di creep



$$C(t) = u(t) = \frac{1}{E_R} \left[ 1 - \left(1 - \frac{T_\sigma}{T_\epsilon}\right) e^{-\frac{t}{T_\epsilon}} \right] 1(t)$$

**Modello di Blotzman:** ha un approccio di tipo semi empirico, sfrutta maggiormente la caratterizzazione sperimentale del materiale nelle vostre condizioni di riferimento che sono creep e rilassamento dopodichè procede alla modellazione matematica semplicemente sfruttando quelle che sono le caratteristiche di linearità del materiale stesso, ovvero il fatto di avere una proporzionalità fra ingresso e uscita e dal fatto che rimanga valida la sovrapposizione degli effetti. Parte da quello che è il limite dei modelli precedenti, il fatto che le vostre risposte al creep e al rilassamento avvengano con degli spettri discreti mentre sperimentalmente vengono con spettri continui.

Se noi abbiamo in ingresso una generica sollecitazione in carico (o generica sollecitazione in deformazione) abbiamo che questo generico andamento che avrà un certo valore in un generico istante e subirà una variazione infinitesima per un intervallo infinitesimo di  $\tau$ .. dove istante  $\tau$  di deformazione e  $d\tau$  è l'intervallo e qua subirà una certa variazione che possiamo approssimare come un gradino infinitesimo, un gradino di ampiezza infinitesima. , il gradino infinitesimo che



rappresenta quella variazione è dato dalla sua derivata  $\frac{dF(\tau)}{d\tau} d\tau$  cioè ampiezza dell'incremento infinitesimo che subisce la vostra funzione calcolata in tau moltiplicata per intervallo  $d\tau$ , il gradino infinitesimo che rappresenta quella variazione è dato dalla sua derivata.

Scompongo discretizzo quella che è la composizione del mio ingresso in tanti contributi al gradino che sono gli incrementi infinitesimi che si generano negli intervalli infinitesimi, dall'istante tau in poi se il mio materiale viscoelastico lineare del quale conosco la risposta al gradino unitario..quel gradino infinitesimo cosa creerà in uscita? Se io conosco  $c(t)$  Quella variazione infinitesima di forza che interviene all'istante tau determinerà una variazione infinitesima dell'uscita che in questo caso

$$du(t) = c(t - \tau) \frac{dF(\tau)}{d\tau} d\tau$$

è l'allungamento dall'istante  $\tau$  in poi.. quindi quella roba lì determinerà un  $du(\tau)$

$c(t)$  è la funzione di Creep, cioè la storia di elongazione in risposta ad un gradino unitario di variazione di forza.

determina un incremento generico dovuta all'incremento istantaneo dovuto dalla risposta al creep più una dinamica che si perpetua..quindi è un  $du(\tau)$  che è una variazione in funzione del tempo perché è da tau in poi che si propaga che è uguale alla generica risposta al gradino moltiplicata per l'ampiezza specifica dell'ingresso.

Come sarà allora la generica risposta alla mia  $F(t)$  se il mio materiale è lineare..a cosa sarà uguale  $u(t)$  se la generica variazione dell'ingresso è uguale a quella cosa lì e il mio materiale è lineare..essendo la seconda proprietà dei materiali lineari la sovrapposizione degli effetti, nella teoria di Boltzmann prima sfrutto la proporzionalità dovuta al fatto che il mio materiale sia lineare..secondo step è che gli effetti determinati da tutti questi incrementi infinitesimi si vanno a sommare..su tutta la scala dei tempi..vuol dire che in teoria  $u(t)$  generico è dovuto a tutte le risposte che si vanno a sommare di tutta la storia di carico che precede l'istante  $t$ .. quindi in teoria:

$$u(t) = \int_0^t c(t - \tau) \frac{dF(\tau)}{d\tau} d\tau$$

Quindi secondo l'approccio di Boltzmann sfrutta le caratteristiche lineari del materiale il fatto che vi serve a caratterizzare dal punto di vista empirico.. quindi è un modello essenzialmente semiempirico, e vi permette di andare a generalizzare quello che è il comportamento del materiale per qualunque storia di carico o di deformazione. in maniera del tutto analoga ipotizzando di conoscere anche  $k(t)$  che è la vostra risposta in forza al gradino unitario, potete fare la stessa cosa e sfruttare lo stesso tipo di approccio.. la risposta  $k(t)$  la generica risposta in forza ipotizzando che la storia di carico cominci da 0 sarà:

$$F(t) = \int_0^t K(t - \tau) \frac{du(\tau)}{d\tau} d\tau$$

In questo caso l'uscita se avete caratterizzato l'ingresso sperimentale che era quello che non vi piaceva perché era uno spettro continuo invece nel vostro modellino di kelvin non vi dava lo spettro continuo, una volta che avete caratterizzato una funzione  $k(t)$  o  $c(t)$  nello spettro continuo inevitabilmente l'uscita generalizzata che ottenete avrà uno spettro continuo per come l'avete ottenuto. Quindi avete osservato empiricamente le caratteristiche del materiale, il materiale è lineare, lo caratterizzate nelle vostre condizioni di riferimento, lo approximate un po' come una scatola nera che risponde in quel modo dato quel tipo di sollecitazione dopodichè sfruttando le caratteristiche di linearità è possibile generare a qualunque storia d'ingresso quella che è la storia d'uscita e generalizzare il comportamento del materiale. In questo caso vi perdete l'info sulla struttura però matematicamente potete andare a modellare il comportamento di qualunque materiale.

Nel **caso biologico** soprattutto i materiali tendono a non essere lineari quindi definiamo delle variabili cominciando a parlare di rapporti di allungamento e tensioni vere e . definiamo come variabili invece che parlare di  $F$  e di  $u$  definiamo una tensione  $T$  che non è altro che il carico applicato rispetto all'area di riferimento:

$$T = F / A_{\text{riferimento}}$$

E un rapporto di allungamento  $\lambda$  che è il rapporto tra la lunghezza di osservazione rispetto alla lunghezza di riferimento:

$$\lambda = L / L_{\text{rif}}$$

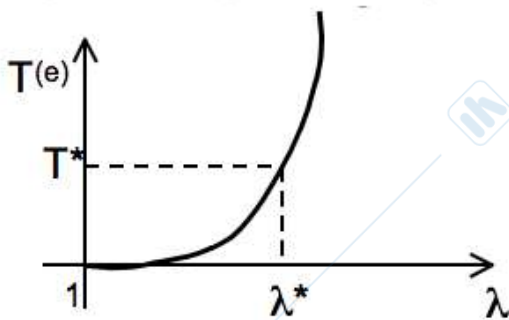
nel contesto dei materiali biologici il cui comportamento non è linearità ossia non rispetta le caratteristiche di ingresso uscita né la sovrapposizione degli effetti.

## Visco-elasticità non-lineare

Ci riferiamo per brevità solo ad esperimenti di

rilassamento. In generale sono 3 le principali cause di non linearità:

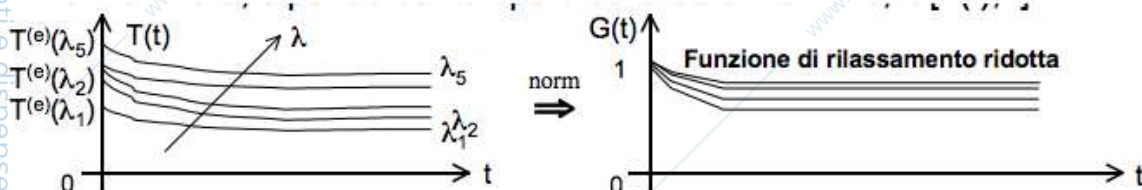
1. Se allunghiamo improvvisamente un provino viscoelastico, la sua risposta istantanea dipende solo dalle sue proprietà elastiche, poiché i suoi elementi viscosi trasmettono tensione senza deformazione. Questa risposta al gradino è detta **risposta elastica istantanea**,  $T^{(e)}(\lambda)$ , ed è generalmente espressa tramite un grafico non-lineare o in forma analitica.



$$T^{(e)}(\lambda) = (T^* + \beta)e^{\alpha(\lambda - \lambda^*)} - \beta$$

$\lambda^*, T^*$  = Stato di riferimento

2. La funzione di rilassamento ridotta, ossia la risposta al gradino normalizzata, dipende dal tempo e dalla deformazione,  $G[\lambda(t), t]$ .



3. Non si applica il principio di sovrapposizione degli effetti.

Fortunatamente, molti tessuti rilevanti (come la pelle ed il tessuto connettivo molle) sono caratterizzati solo dal primo tipo di non linearità. Infatti Fung ha basato la sua Legge di QLV (quasi-linear viscoelasticity) sull'osservazione che, in molti tessuti, la risposta tempo-variante ad una variazione a gradino di deformazione monoassiale (da  $\lambda = 1$  a  $\lambda > 1$  per  $t = 0$ ), può essere espressa come:

$$T(\lambda, t) = G(t)T^{(e)}(\lambda) \quad G(0^+) = 1$$

Dove  $G(t)$  è la funzione di rilassamento ridotta e  $T^{(e)}(\lambda)$  è la risposta elastica istantanea.

La generica risposta  $T(\lambda, t)$  può essere espressa come l'ampiezza della risposta elastica istantanea che non dipende da  $\lambda$  che moltiplica  $G(t)$  che non dipende più da  $\lambda$  e in più per quell'intervallo di deformazioni vale la sovrapposizione degli effetti.

Quindi tutta la non linearità rimane all'interno della risposta elastica istantanea. Non è una brutta cosa perché così è gestibile al di là della dipendenza del tempo. Quindi va sotto la denominazione di quasi lineare perché.. a rigore è non lineare però vi rimane lineare la parte di dipendenza dal tempo. Quindi la dinamica potete disaccoppiarla ottenendo un comportamento di tipo lineare.

Adottiamo un approccio simile a quello della teoria di Boltzmann, in cui sfruttiamo la risposta normalizzata, ottenendo un'espressione che ci permette di descrivere la risposta elastica considerando in ingresso il rapporto di deformazione

$$\lambda = \frac{L}{L_0}$$

Ipotizzando che la storia di carico cominci all'istante 0, questo può essere espresso come un integrale di convoluzione tra la risposta elastica istantanea e la derivata di  $G(\tau)$ :

$$T(\lambda, t) = \int_0^t T^{(e)}(\lambda(t - \tau)) \frac{dG(\tau)}{d\tau} d\tau =$$

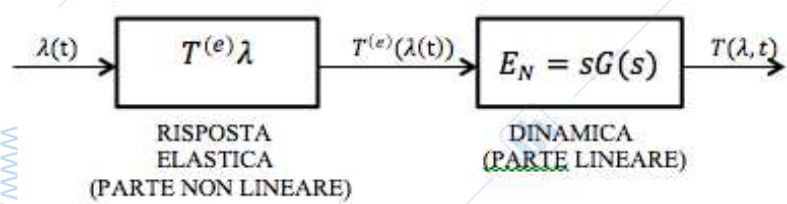
Facendo l'inversione dell'integrale di convoluzione:

$$= \int_0^t G(t - \tau) \frac{dT^{(e)}(\lambda(\tau))}{d\tau} d\tau$$

dove avevamo visto che la componente dinamica ci da una risposta sempre inferiore a quella che avremmo se ci fosse solo la componente elastica.

Nonostante il materiale sia non lineare, possiamo trattarlo come un'unità che trasforma l'ingresso e l'uscita isolando quella che è la componente non lineare. Infatti se andiamo a considerare gli integrali di convoluzione e il comportamento del materiale come dispositivo che trasforma l'ingresso in allungamento e l'uscita in tensione, cioè approssiando il materiale nel dominio delle frequenze come una funzione di trasferimento, tutta la parte non lineare è isolata all'interno di T e di  $\lambda$  (che non ha nessuna componente dinamica, è un puro coefficiente non lineare che descrive la proporzionalità tra la tensione elastica e l'uscita).

Quindi, in questo caso, il materiale può essere modellato andando a valutare il suo comportamento nel dominio delle frequenze, tramite uno schema a blocchi di questo tipo:



Il blocco lineare contiene la dinamica e corrisponde alla funzione di trasferimento  $E_N = sG(s)$  che è la trasformata nel dominio delle frequenze di G(t):  $G(s)=L[G(t)]$ .

Quindi un sistema visco-elastico non lineare si può sempre rappresentare mediante la disposizione in cascata di due blocchi: il primo non lineare, il secondo lineare ma dinamico.

**RISPOSTA IN TENSIONE DI UN TESSUTO AD UNA GENERICA STORIA DI DEFORMAZIONE**

La maggior parte dei materiali biologici (tessuto connettivo, tendini, legamenti) che manifestano un comportamento di quasi-linearità, sono di per sé costituiti da delle componenti di base che, se testate, hanno invece un comportamento lineare o comunque possono essere modellate da un comportamento di tipo lineare (es. fibre di collagene, elastina). Può essere la struttura che comporta questo tipo di comportamento quasi-lineare?

Cerchiamo di valutare come, in materiali che mostrano all'interno una struttura gerarchica, il comportamento complessivo del materiale possa esser derivato dalla conoscenza della meccanica delle singole componenti. Pensiamo, ad esempio, ad un legamento: è una struttura gerarchica costituita da una serie di fibre in parallelo che, a seconda dei contesti, possiamo considerare elastiche o visco-elastiche. Le fibre legamentose hanno delle lunghezze meccaniche di riferimento diverse che hanno un ruolo fondamentale nel comportamento meccanico del legamento. Quindi, a differenza di quanto possa accadere in un provino, in un materiale omogeneo, è più difficile definire una lunghezza di riferimento univoca: alcune fibre si potrebbero trovare a tale lunghezza, altre potrebbero averla superata e altre ancora potrebbero essere ancora arricciate.

In questo caso si ha la necessità di andare a definire una lunghezza di riferimento convenzionale che abbia lo stesso significato per tutte le fibre. Ad esempio si potrebbe scegliere come riferimento, la lunghezza in cui abbiamo la certezza che tutte le fibre siano arricciate.

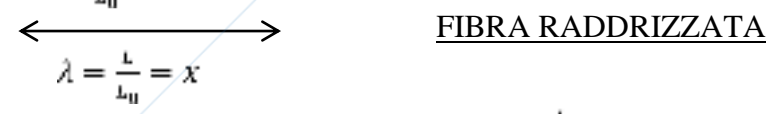
Quindi introduciamo quelle che sono le variabili per descrivere il comportamento di questa struttura gerarchica e poi utilizziamo una descrizione matematica rigorosa per cercare di capire come tale struttura può impattare sul comportamento meccanico complessivo.

Assumiamo una lunghezza di riferimento  $L_u$  in cui tutte le fibre sono arricciate.

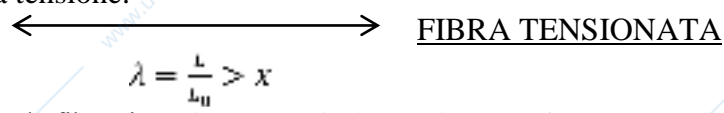
La singola fibra sarà caratterizzata da una lunghezza L che descrive la distanza tra i capi della fibra stessa cioè la lunghezza istantanea che osserviamo.

Definiamo:

$$\frac{L}{L_u} = \lambda \quad \text{RAPPORTO DI ALLUNGAMENTO}$$



Per valori diversi di L per le singole fibre, ci sarà un valore  $\lambda = \frac{L}{L_u}$  pari a x, dove x= RAPPORTO DI RADDRIZZAMENTO .x è un parametro incognito delle singole fibre, è il valore in cui la fibra è raddrizzata ma non sviluppa ancora tensione.



Per valori di  $\lambda > x$  la fibra si tensiona e comincia a sviluppare forza

Ciò che deve esser chiaro è che  $L_0$  è una lunghezza convenzionale, affibbiata a tutto il legamento e che serve soltanto per essere sicuri che tutte le fibre siano arricciate, cioè per partire da una condizione omogenea.

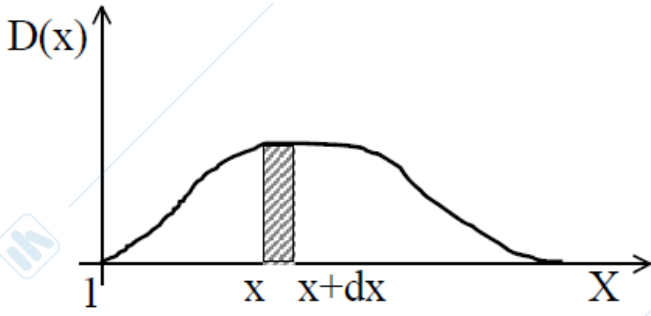
In questo caso il RAPPORTO DI ALLUNGAMENTO sarà descritto da  $\lambda_1 = \frac{\lambda}{x}$  e ciò che ci interessa, dal punto di vista meccanico, è il comportamento delle singole fibre per  $\lambda > x$ , cioè  $\lambda_1 > 1$ .

La forza sviluppata dalla singola fibra è funzione, non solo di  $\lambda$ , ma di  $\frac{\lambda}{x}$ , dato che ci interessa il rapporto che genera tensione all'interno della fibra, e vale:

$$f\left(\frac{\lambda}{x}\right) = \begin{cases} k(\lambda_1 - 1) = k \frac{\lambda - x}{x} & \lambda > x \\ 0 & \lambda \leq x \end{cases}$$

$k$ =costante elastica  
 $\lambda_1 - 1 = \epsilon_i$   $\epsilon$  di riferimento, valore rispetto alla lunghezza di riferimento meccanica reale.

Per tener conto del fatto che ci sono questi rapporti di raddrizzamento  $x$ , con valori diversi mano a mano che la struttura si allunga, utilizziamo una funzione che descrive il reclutamento delle fibre: a partire da  $\lambda = 1$  (fibre accorciate), per  $\lambda$  che cresce, un po' alla volta vengono reclutate tutte le fibre. La funzione che descrive il reclutamento delle fibre è  $D(x)$  ed è del tipo:



L'integrale della parte in grigio tra  $x$  e  $x+dx$  fornisce la proporzione delle fibre che si reclutano per  $x < \lambda < x+dx$ . Per  $\lambda=1$  nessuna fibra viene reclutata, poi mano a mano che  $\lambda$  cresce, sempre più fibre vengono reclutate, fino a che  $\lambda \rightarrow \infty$  tutte le fibre sono reclutate.

$x+dx$  fornisce la proporzione delle fibre che si reclutano per  $x < \lambda < x+dx$ . Per  $\lambda=1$  nessuna fibra viene reclutata, poi mano a mano che  $\lambda$  cresce, sempre più fibre vengono reclutate, fino a che  $\lambda \rightarrow \infty$  tutte le fibre sono reclutate.

$$D(x)dx = \frac{\text{n° fibre reclutate (per } x < \lambda < x + dx)}{\text{n° totale di fibre}}$$

Quindi:  $\int_1^{\infty} D(x)dx = 1$  perché all' $\infty$  tutte le fibre sono state reclutate

Ovviamente la forma della curva dipende dalle caratteristiche del legamento: potremmo avere il picco più vicino all'origine (se tutte le fibre intervengono subito, cioè se la struttura deve essere pronta a sviluppare subito molta forza) oppure più lontano (se la struttura deve frenare alla fine).

Ciò che ci interessa è definire la tensione sviluppata dalla struttura gerarchica in risposta all'allungamento. Per far ciò serve un parametro  $q$  che descriva il volume della singola fibra rispetto al volume totale del legamento, che può essere assimilato all'area della fibra divisa per l'area totale del legamento. Cioè:

$$q = \frac{V_{fib}}{V_{tot}} = \frac{A_{fib}}{A_{tot}}$$

Allora la tensione sviluppata dal legamento nella sua totalità è dato dalla tensione sviluppata dalla singola fibra ( $f\left(\frac{\lambda}{x}\right)$ ) moltiplicato per il numero di fibre che sviluppano tensione per un certo valore di  $\lambda$  (integrale da 1 a  $\lambda$  di  $D(x)$  in  $dx$ ), riferito alla sezione (cioè moltiplicato per  $q$ ):

$$T^{(s)}(\lambda) = \int_1^{\lambda} q f\left(\frac{\lambda}{x}\right) D(x) dx = qk \int_1^{\lambda} \frac{\lambda - x}{x} D(x) dx \quad \text{RISPOSTA ELASTICA ISTANTANEA}$$

La risposta elastica istantanea è non lineare anche se le singole fibre si comportano in maniera lineare. Infatti partendo da una risposta elastica totalmente lineare otteniamo, per la struttura gerarchica, una risposta elastica non lineare.

**Il reclutamento permette di ottenere un comportamento meccanico non lineare a partire da materiali lineari, operando sull'organizzazione della geometria della struttura** (come un fascio di elastici di gomma in cui i singoli

elementi sono elastici lineari: se andiamo a tagliarli a lunghezze diverse e a legarli alle estremità, otteniamo una struttura totale con un comportamento non lineare).

Calcoliamoci la derivata rispetto a  $\lambda$  della risposta elastica istantanea:

$$\frac{dT^{(e)}(\lambda)}{d\lambda} = qk \int_1^\lambda \frac{D(x)}{x} dx$$

Però, i tendini, i legamenti reali sono visco-elastici. La tensione è in realtà una funzione di tutta la storia di deformazione, ma il principio base rimane: la risposta visco-elastica di tutti il legamento riflette la somma dei contributi di tutte le sue singole componenti.

Quindi possiamo sfruttare, come per le fibre visco-elastiche lineari, la teoria di Boltzmann.

$$F(t) = \int_0^t k(t-\tau) \frac{d\lambda(\tau)}{d\tau} d\tau$$

L'unica modifica che facciamo è quella di considerare la risposta normalizzata: anziché avere un K, avremo un KG(t). Quindi il comportamento visco-elastico completo di una singola fibra visco-elastica lineare è espresso dall'integrale di Boltzmann:

$$f\left(\frac{\lambda}{x}\right) = \begin{cases} k \int_0^t G(t-\tau) \frac{d\lambda_t}{d\tau} d\tau & \lambda > x \\ 0 & \lambda \leq x \end{cases}$$

Tale comportamento, come vediamo, è funzione di  $\frac{\lambda}{x}$  perché tutta la trattazione fatta prima si riferiva alla lunghezza di riferimento meccanica. In questo caso, poiché la lunghezza di riferimento meccanica è diversa per le varie fibre, a livello macroscopico abbiamo che il rapporto di allungamento del legamento è convenzionale (non è necessariamente la lunghezza di riferimento meccanica). Quello che prima era  $\lambda$ , ora è  $\lambda_t = \frac{\lambda}{x}$ .

Quindi, procedendo in maniera del tutto analoga al caso precedente, avremo:

$$T(\lambda, t) = \int_1^{\lambda(t)} qD(x)k \int_0^t G(t-\tau) \frac{\dot{\lambda}(\tau)}{x} d\tau dx =$$

- Risposta della singola fibra
- Reclutamento delle fibre

Abbiamo una parte delle variabili che dipende dal tempo e una che da esso dipende solo attraverso la dipendenza da  $\lambda$ . Quindi inverto il ruolo degli integrali, dividendo ciò che dipende dal tempo da ciò che dipende da  $\lambda$ .

$$\int_0^t G(t-\tau) qk \int_1^{\lambda(t)} \underbrace{\frac{D(x)}{x} dx \frac{d\lambda(t)}{d\tau}}_{\frac{dT^{(e)}(\lambda)}{d\lambda}} d\tau =$$

$$\int_0^t G(t-\tau) qk \frac{dT^{(e)}(\lambda)}{d\lambda} \frac{d\lambda(\tau)}{d\tau} d\tau$$

LEGGE DELLA VISCO-ELASTICITA' QUASI-LINEARE DI FUNG

Abbiamo visto quindi, come da un comportamento visco-elastico lineare degli elementi di base, possiamo ottenere un comportamento complessivo che, a rigore, è visco-elastico non lineare, ma che rispecchia da un punto di vista meccanico il comportamento visco-elastico quasi-lineare che avevamo adottato.

La teoria della visco-elasticità quasi-lineare non è semplicemente un modello approssimato che descrive in certe situazioni il comportamento di un materiale che, a rigore, è visco-elastico non lineare. In realtà infatti è una teoria in cui il mix di aspetti lineari e non lineari dal punto di vista meccanico, rispecchia una condizione molto specifica in cui abbiamo un materiale di base (fibre) che ha un comportamento visco-elastico lineare. Tuttavia dall'organizzazione geometrica del materiale otteniamo un comportamento complessivo che non è più lineare.

Quindi i legamenti sono tutti uguali dal punto di vista della struttura di base, ma otteniamo delle caratteristiche meccaniche molto diverse a causa della diversa organizzazione delle fibre, cioè dalla diversa modalità di reclutamento delle fibre stesse.