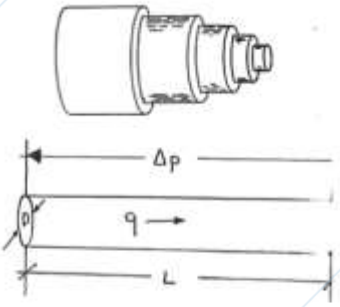
MODELLO DI POISEUILLE (1842)

Parte da approssimazioni meramente sperimentali che erano tese ad andare a sperimentare quale era la resistenza opposta al fluido, tratta condizioni stazionarie che a rigore sono scorrette e valgono solo se faccio una trattazione per valori medi del valori di pressione.

Fa una serie di esperimenti con dei tubi di vetro di lunghezza e sezione diversi e trova quella che è la relazione fondamentale tra caduta di pressione e portata nei condotti.

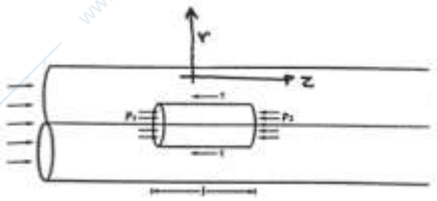


$$q = \frac{KD^4 \Delta p}{L}$$

mi compare il diametro dei tubi, una costante k che non conosce e la lunghezza del condotto quindi una relazione che riguarda geometria. Per dettagliare questa relazione Hagenbach poco tempo dopo è il primo che dà la definizione di viscosità ipotizzando che essendo necessaria l'esistenza di questa relazione che in quel k ci sia qualcosa associato alle forze che si sviluppano all'interno del fluido in moto per il fatto che è viscoso, in particolare la definizione che viene data è di sforzo di taglio associata al concetto di viscosità per un condotto cilindrico a parete rigida in cui si vede visivamente sperimentalmente che compare un profilo di velocità non piatto.

$$\tau = \mu \frac{dw}{dr} (< 0)$$

Consideriamo il nostro condotto:



Considero un elemento infinitesimo è un generico volumetto cilindrico centrato nell'asse di lunghezza dz e di raggio r interna al nostro condotto.Le forze che agiscono sul volumetto sono le pressioni nei due punti del condotto e lo sforzo di taglio.

Se il nostro elemento è in equilibrio abbiamo che l'azione del taglio è bilanciata da quella della pressione. Azione pressione sulle facce deve essere uguale ad azione del taglio laterale.

$dP \pi r^2 = \tau 2\pi r dz \rightarrow$ sforzi di taglio agenti esterni ad una lamina di raggio r

gradiente di pressione longitudinale

$$\tau = +\frac{r}{2}\frac{dp}{dz} (< 0)$$

tau=0 in corrispondenza dell'asse, tau=max alla parete

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial r}$$

Eguaglio tau poi integro imponendo condizione aderenza:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{\mu} \frac{r}{2} \frac{dp}{dz}$$

$$\int_0^L \int_0^r \frac{\partial u}{\partial r} drdz = \frac{1}{\mu} \int_0^L \int_0^r \frac{r}{2} \frac{dp}{dz} drdz$$

$$u(r) = u(r) = \frac{r^2}{4\mu L} \Delta P + k = \frac{\Delta P}{4\mu L}(r^2 - R^2)$$

u (R)=0

$$Q = \frac{\Delta P}{4\mu L} \int_0^R 2\pi r (r^2 - R^2) dr = \frac{\pi \Delta P}{2\mu L}\left[\frac{r^4}{4} - \frac{r^2 R^2}{2}\right] = \frac{\pi R^4}{8\mu L} - \Delta P$$

$R = \frac{-\Delta P}{Q} = \frac{8\mu L}{\pi R^4}$ Abbiamo trovato la stessa resistenza usando solo il bilancio di forz

Ottengo questa resistenza che va a caratterizzare la resistenza opposta da un condotto di lunghezza L con raggio r per un fluido viscoso newtoniano di viscosità μ al flusso stabilendo quello che è una relazione stazionaria tra caduta di pressione e portata. Per quanto riguarda l'applicabilità dell'equazione di Poiseuille alla circolazione questo è il modello più semplificato ma che funziona meglio perché sperimentalmente posso vedere il valore della resistenza benchè valido a rigore in maniera cosi semplificata va a fare una valutazione di tipo sperimentale sui valori di resistenza è un valore numerico che rimane valido anche quando molte ipotesi vengono a decadere però è valido a rigore per fluido newtoniano incomprimibile sul sangue questa è un approssimazione accetabile anche se dipendente dall'ematocrito rispetto a quello che è la caratterizzazione del profilo di velocità è quello che si osserva è un lieve appiattimento della parte centrale.

<u>**Applicabilità di Poiseuille alla circolazione:**</u>
TUBO CILINDRICO UNIFORME: non è assolutamente vero perchè c'è una conicità strutturale dell'albero circolatorio dovuta al fatto che partiamo da grandi vasi e andiamo verso i capillari più una conicità indotta dovuta al fatto che questi condotti sono deformabili dovuta da sbalzo pressorio e dal flusso. La conicità assume un aspetto rilevante quando siamo in prossimità di valvole(è un fenomeno naturale) o stenosi(non è fenomeno naturale).
FLUSSO LAMINARE: l'assunzione di flusso laminare è ottima perchè in condizioni fisiologiche tutte I fenomeni fisiologici che guidano la struttura tendono a portare verso una condizione in grado da mantenere flusso laminare se abbiamo lesione o placca arteriosclerotica questo decade.
ADERENZA ALLA PARETE:garantitissima in quanto avere una viscosità alta per cui aderisce in maniera perfetta
MOTO STAZIONARIO: impossibile ho regime pulsatile
MOTO IRROTAZIONALE: soddisfatta ho vorticità nulla all'interno del flusso.

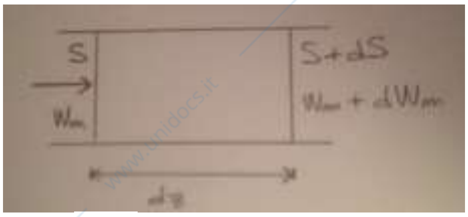
<u>Analogia elettrica</u> dovute a forze dissipative quelle associate a resistenza sono quelle associate alla viscosità. L'aspetto importante è che è un fenomeno dissipativo che dipende dalla componente viscosa del sangue e non da fenomeno di turbolenza. resistenza→fenomeno dissipativo!
<u>Modello Windkessel</u>
L'altro aspetto che sussiste è che le pareti dei vasi sono deformabili,vuol dire che se ho delle variazioni medie di pressioni,se cambia pressione al loro interno varia il volume all'interno di un tratto di condotto.
Il reverendo Stephen Hales, seduto, introdusse la misura invasiva della pressione sanguigna nel 1733 e dimostrò la natura pulsatile del cuore ma alla periferia la natura pulsatile spariva.
Nel giro di un centinaio di anni Otto Frank sviluppò quello che dava un modello meccanico della circolazione sanguigna per puro parallelismo qualcosa che era in grado di replicare il comportamento dei fluido costante alla periferia con una pompa pulsatile a monte.
Il modello Windkessel per la modellazione del sistema circolatorio nasce da un approccio tipo sovrapposizione degli effetti, nel senso che parte dal presupposto che dei condotti cilindrici o similcilindrici attraversati da un fluido viscoso oppongono una resistenza, per cui si assume che ci sia un parametro di resistenza concentrata che caratterizza l'albero circolatorio e si assume che questo sia paragonabile alla resistenza di Poiseuille originariamente ottenuta senza utilizzare una forma generalizzata del problema fluidodinamico, ma semplicemente partendo dalle considerazioni del fatto che si ha a che fare con un fluido viscoso, che la geometria è cilindrica e che deve esistere un bilanciamento di forze tra l'azione della pressione associata all'esistenza del flusso e la presenza dello sforzo di taglio che si oppone al flusso. La parte che riguarda la geometria della struttura ricadeva nella geometria sulla quale si andava a far il bilancio delle forze e l'imposizione delle condizioni al contorno quando la si andava a integrare e da quella ci veniva fuori quello che è un parametro di resistenza: $R=\frac{(8\mu)}{(\pi a^4)}$ In aggiunta a questo si associa un'osservazione sperimentale originata dal fatto di aver una pompa pulsatile a monte che determina un flusso quasi costante a valle, come nelle macchine per lo spegnimento degli incendi, e dal parallelismo di modello meccanico di macchina per lo spegnimento degli incendi in cui quello che si ha è un'unica sacca compliante(appunto il Windkessel) che filtrava tutta la pulsatilità della pompa pulsatile e in uscita avevamo un flusso quasi costante, nel modello Windkessel per il circolatorio si dice questo tipo di condizione determina questa modalità di funzionamento con pompa pulsatile e flusso quasi continuo a valle, per cui analogamente, così come nell'altro abbiamo una resistenza opposta dal condotto, nella parte a valle del serbatoio deformabile associamo un unico paramentro concentrato C che ci dice come il volume complessivo cambia in funzione della pressione.
Da quest'assunto tipo sovrapposizione degli effetti nasce il modello RC fatto così :

In cui abbiamo due parametri concentrati che descrivono delle larghe sezioni di comportamento, è vero che possiamo adattarlo a un generico tratto, ma in realtà il ragionamento fatto sul Windkessel si presta generalmente ad esser applicato a tutta la parte della circolazione arteriosa, in cui possiamo andare realmente a distinguere un'area a monte che è quella dei grandi vasi in cui abbiamo veramente la parte compliante e un'area a valle, quella del microcircolo o comunque dei piccoli vasi, in cui è concentrato il grosso della resistenza, soprattutto quello che abbiamo è un parallelismo con l'ipotesi di base di similitudine con il sistema di riferimento in cui abbiamo una pompa pulsatile a monte e un flusso praticamente costante a valle.

<u>FENOMENI PROPAGATORI:</u> Adottiamo un approccio sistematico, utilizziamo l'equazione di continuità e l'equazione di Navier-Stokes ricordandoci che la utilizziamo perchè il sangue rispetta le condizioni di incomprimibilità, omogeneità, fluido viscoso newtoniano ed è isotropo. Introduciamo delle ipotesi semplificative, perchè se no se dovessimo aggiungere tutte le caratteristiche geometriche e la non stazionarietà non riusciremmo a farlo in forma chiusa, quindi consideriamo:

- vaso rettilineo con sezione circolare;
- abbandoniamo la conicità, anche perchè quello che ci interessa è la portata;
- pareti dei vasi deformabili, con una caratteristica o elastica non lineare o viscoelastica;
- sangue incomprimibile, viscoso newtoniano(per questo possiamo usare l'equazione di Navier-Stokes);
- moto laminare(nell'albero circolatorio effettivamente lo è, salvo stranezze), monodimensionale(la maggior parte del profilo si sviluppa in maniera assiale perchè lo scopo della struttura è garantire una portata, ci potranno in generale essere componenti di velocità ortogonali alla direzione del flusso non nulle dovute alla conicità(che stiamo trascurando), ma a noi interessa la componente dominante del flusso associata al moto assiale e quindi lo consideriamo in approssimazione monodimensionale) e non stazionario;
- consideriamo la struttura ad albero di diametro maggiore perchè la caratterizzazione del microcircolo è diversa e in più il microcircolo dal punto di vista fluidodinamico interessa meno perchè sono vasi piccoli a pareti rigide e sono in sostanza dominati dalla componente di resistenza, per cui in realtà gli altri fenomeni interessano poco.

Condotto di lunghezza dz che all'ingresso presenta velocità media Wm(non stiamo dicendo che non sia viscoso, ma che ci interessa la portata per cui trascuro il profilo) dove Wm è la portata diviso la sezione e S è la sezione del nostro condotto, a valle essendo si il fluido incomprimibile, ma le pareti sono deformabili, avremo una generica superficie S+dS che può esser anche negativa, ed un Wm+dWm, con il fatto che le pareti si possono deformare possono essere cambiate sia la sezione che la velocità in uscita.



L'equazione di continuità del mio fluido incomprimibile mi dice che:

$$\frac{dV}{dt}=S\,W_m-(S+dS)(W_m+dW_m)=\frac{dS}{dt}dz$$

il fatto che il volume di materiale cambi nel tempo è dovuto al fatto che la variazione di volume è uguale a quello che è entrato – quello che è uscito.

Dove $\frac{dV}{dt}$ considerando che il vaso si dilata, non è che si allunga, è quindi: $\frac{dV}{dt}=\frac{dS}{dt}dz$ cioè il vaso non si allunga, cambia di sezione nel tempo, la variazione della sezione nel tempo moltiplicata per la lunghezza è la variazione di volume.

Questo mi dà: $\frac{dV}{dt}=SW_m-W_m dS-dSW_m=\frac{dS}{dt}dz$ con dSW_m che è il solito infinitesimo di ordine superiore e quindi lo semplifico, porto tutto da una parte e ottengo, scrivendo per le derivate parziali e dividendo per dz: $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{\partial SW_m}{\partial z}=0$ ed è la mia equazione di continuità.

Vediamo ora l'equazione di Navier-Stokes, ne scriviamo una perchè ci interessa solo una componente di velocità, cioè Wm, sappiamo che avrà un profilo più o meno parabolico, però siamo anche in condizioni non stazionarie, per cui in certi momenti della pulsazione sarà effettivamente parabolico, in altri momenti assumerà un' altra forma, anche se della stessa tipologia più o meno, ci scriviamo quindi la nostra Wm, ricordando che siamo in condizioni non stazionarie e quindi la nostra velocità può cambiare nel tempo.

Quindi: $\rho\frac{\partial W_m}{\partial t}+\rho W_m\frac{\partial W_m}{\partial z}+\frac{\partial\rho}{\partial z}+F=0$ con : $\rho\frac{\partial W_m}{\partial t}$ parte relativa alla derivata materiale, $\rho\frac{\partial W_m}{\partial z}$ parte relativa alla convezione;
$\frac{\partial\rho}{\partial z}$ caduta di pressione che è quello che era dall'altra parte dell'equazione di Navier-Stokes, F un parametro che ha a che fare con i fenomeni dissipativi, che dipenderà dalla viscosità.

Trascuriamo le forze di massa assumendo che il condotto sia pari, di solito la forza di massa è la forza di gravità che contribuisce nello sbalzo pressorio da una posizione ad un'altra se abbiamo un condotto verticale.

Questa è l'equazione di Navier-Stokes che è associata all'equazione di continuità detta prima $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{\partial SW_m}{\partial z}=0$ e a questa si associa quella che è la caratteristica della parete, dove in generale dipende dalla pressione perchè ha proprietà viscoelastiche o elastiche, dalla coordinata perchè in teoria può aver conicità intrinseca e dal tempo, z è la coordinata longitudinale del nostro condotto, t è il tempo, la pressione è funzione sia della coordinata che del tempo perchè siamo in condizioni non stazionarie e dipende dalla coordinata, S è l'area della sezione trasversa del nostro condotto, Wm è funzione della coordinata z longitudinale, non di quelle trasverse essendo la velocità media sulla sezione, del tempo e di ρ che è la densità del nostro fluido.

Avremo $\frac{dV}{dt}=0$ essendo in condizioni stazionarie, poi $\frac{dV}{dz}=0$ per l'equazione di continuità perchè S non cambia nel tempo, quindi nel caso in cui ci trovavamo e in cui eravamo capaci di scrivere F, avevamo che ci rimaneva $\frac{-dp}{dz}=F$ in quel caso $\frac{dp}{dz}$ in condizioni stazionarie condotto cilindrico parete rigida sezione costante fluido viscoso newtoniano incomprimibile isotropo è la condizione in cui avevamo stimato la resistenza di Poiseuille, quindi in queste condizioni qui viene fuori $\frac{-\partial f}{\partial z}=F=\frac{(8\mu)}{(\Pi a^4)}Q$ dove essendo la sezione circolare di raggio a e Wm la velocità media sulla sezione,questo Q è legato a Wm in questo modo: $Q=\pi a^2 W_m$ il nostro F in quel caso era quindi $F=8\frac{\mu}{a^2}Wm$, questa è la condizione in cui questa è la nostra soluzione del nostro problemino fluidodinamico scritto sotto tutte le nostre condizioni, che non è vero a rigore in condizioni non stazionarie e a parete deformabile, ma se si vanno a far le misure e si va a fittare il modello in condizioni non stazionarie con le pareti deformabili nei limiti della funzionalità del sistema circolatorio in realtà questo parametro va bene numericamente, a rigore è sbagliato metter questo parametro che è giusto a rigore per condotti cilindrici a pareti rigide in condizioni stazionarie, ma se si vanno a far le misure e dalla misura si estrapola il dato relativo alla resistenza, che riguarda i fenomeni dissipativi che descrivono come cade l'andamento della pressione media nel condotto, in relazione con la portata media, in realtà questo parametro nonostante sia sbagliato il concetto di base numericamente funziona, è il processo inverso del Windkessel che era stata ottenuto in un contesto specifico e ci si era chiesto se funzionasse anche in condizioni non stazionarie e la risposta era no, il parametro resistenza invece è vero che è giusto per un altro contesto, però funziona anche qua per descrivere quella parte del fenomeno che riguarda solo il fenomeno dissipativo, è sbagliato ma usiamo questa forma del parametro perchè fitta bene l'andamento del fenomeno dissipativo.

Quindi in definitiva scriviamo: $\frac{-\partial p}{\partial z}=F=\frac{(8\mu)}{(\pi a^4)}Q=\frac{(8\mu)}{(\pi a^4)}\pi a^2 W_m=8\frac{\mu}{a^2}W_m$

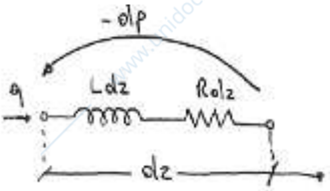
Cerchiamo ora di trovare la relazione tra la portata e la pressione in condizioni generali, cioè vogliamo considerare sia la non stazionarietà che la deformabilità del vaso.
Ipotizziamo che i due fenomeni siano indipendenti, quindi prima consideriamo solo la pulsatilità e poi andiamo ad aggiungere la deformabilità del vaso. In prima istanza osserviamo la pulsatilità, prendiamo il nostro tratto di vaso cilindrico di lunghezza dz a parete rigida, l'equazione diventa:

- $\rho\frac{\partial W_m}{\partial t}$ rimane perchè ci rappresenta la non stazionarietà
- $\rho dW_m\frac{\partial W_m}{\partial z}=0$ perchè il condotto è cilindrico e a pareti rigide, se fosse conico sarebbe diverso da 0, quindi non cambia né per geometria, né per la pressione, quindi per l'equazione di continuità $\frac{\partial W_m}{\partial z}=0$

quindi per un pezzo di vaso di lunghezza dz l'equazione è diventata: $\rho\frac{\partial W_m}{\partial t}+\rho dW_m\frac{\partial W_m}{\partial z}+\frac{\partial \rho}{\partial z}+8\frac{\mu}{a^2}W_m$

ora consideriamo la relazione tra Wm e la portata e il fatto che stiamo considerando che nel nostro tratto dz il nostro condotto è cilindrico a pareti rigide: $\frac{\rho}{(\pi a^2)}\frac{\partial Q}{\partial t}+8\frac{\mu}{(\pi a^2)}Q$ quindi abbiamo due contribuiti:
uno è quello dissipativo della resistenza di Poiseuille che non ha una dipendenza del tempo, quindi anche se quella forma a rigore sarebbe valida in condizioni non stazionarie, questa parte comunque mi descrive bene il fenomeno dissipativo della relazione a basse frequenze tra la caduta di pressione e la portata, ed è la nostra parte resistiva $R=8\frac{\mu}{(\pi a^2)}Q$ poi abbiamo un termine legato alla non stazionarietà, dato dalla densità della massa diviso la sezione e questo termine va sotto il nome di inertanza, questo contributo alla caduta di pressione dovuto alla non stazionarietà del fenomeno è fisicamente dovuto al fatto che in condizioni non stazionarie è legato all'inerzia del fluido, ci son due termini legati alla forza d'inerzia: la massa e l'accelerazione, il fatto che io abbia un termine di forza è associato sia alla massa che è associata sia alla densità che alla sezione, ma ciò che è rilevante è che questo venga continuamente accelerato e decelerato, contribuisce all'effetto della pressione perchè quando viene accelerato cerca di continuare ad andare della sua velocità il fatto che fosse accelerato prima mi rende più difficile cercar di cambiarne l'accelerazione dopo, infatti in quel termine quello che mi compare è come varia nel tempo la portata, che mi determina un contributo aggiuntivo alla caduta di pressione. È ovviamente un parametro positivo, quindi se ho accelerazione tende ad aumentarmi la caduta di pressione, la decelerazione a ridurre la caduta di pressione, questo è uno sfruttare meglio il moto del sangue all'interno del condotto che deve vincere i fenomeni resistivi, è un contributo in più a quel tipo di fenomeno che può aver andamento positivo o negativo in base a com'è l'andamento della portata $L=\frac{\rho}{(\pi a^2)}$

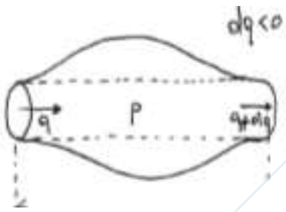
stiamo facendo un'analisi con una forma d'onda con diversi contributi in frequenza e quello che vogliamo tirare fuori è perchè su un'onda compaiono frequenze alte e sull'altra spariscono, quindi non abbiamo un Windkessel o essendo passa-basso sarebbero sparite su tutte e due le curve, l'analogo elettrico di questo tipo di segnale è:



assumendo un tratto di lunghezza dz, abbiamo un'impedenza longitudinale:

$$Z_L = \frac{\frac{-(dP(j\omega))}{dz}}{(Q(j\omega))} = R + j\omega L$$

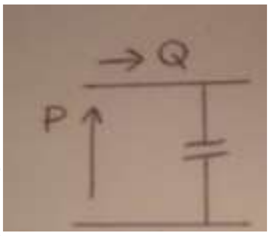
Ora prendiamo in esame la <u>deformabilità della parete</u>, esaminando sempre un tratto di lunghezza dz



se la parete si deforma abbiamo una S che cambia in dipendenza dalla pressione, quindi la nostra equazione di continuità è l'equazione che ne risente per prima e la scriviamo come: $\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S W_m}{\partial z} = 0$ con $SW_m = Q$, è la portata

S=S(p,z,t), qui trascuriamo la dipendenza dalla z, perchè abbiamo z infinitesima, quindi è eventualmente l'integrazione lungo la lunghezza del condotto che potrà tener conto del fatto che la sezione può cambiare.L'ipotesi semplificativa che facciamo è il fatto che assumiamo che il **comportamento della parete del vaso sia totalmente passivo**, cioè la sezione cambia solo in funzione della pressione, trascuriamo la dipendenza dal tempo che non sia legata a quella della pressione, nel senso che dipende dal tempo solo attraverso il fatto che la pressione varia nel tempo, dicendo che non esiste un $\frac{dS}{dt}$ vuol dire che trascuro fenomeni attivi come quelli della muscolatura liscia.

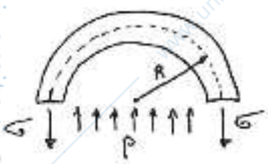
$\frac{\partial S}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial z} = 0$ dove $\frac{\partial S}{\partial p} = C$ è la nostra complianza, non è più come nel Windkessel $\frac{\partial V}{\partial p} = C$ da cui abbiamo l'analogo elettrico:



con la nostra ammettenza trasversale nel dominio delle frequenze:

$$Y_T = \frac{-\left(\frac{\partial Q}{\partial z}\right)}{p} = j\omega C$$

CALCOLO DELLA C: C descrive il comportamento passivo della parete, descrive come la sezione del vaso cambia in funzione della pressione.Sezione S del vaso, al cui interno c'è la pressione p:



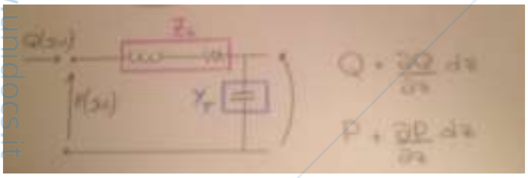
Una pressione all'interno del vaso determina nella parete del vaso una tensione, quindi l'azione di p è controbilanciata dall'azione di una σ in parete. ricordando che S è circolare:

$C = \frac{dS}{dp} = d\frac{(\pi R^2)}{dp}$ R al momento può cambiare, esisterà però un punto di riferimento in cui la tensione in parete è nulla, chiamiamo R_0 il raggio, studiamo le variazioni rispetto questo punto di lavoro $C = \frac{dS}{dp} = d\frac{(\pi R^2)}{dp} = 2\pi R_0 \frac{dR}{dp}|_0$ moltiplicando e dividendo per R_0 : $C = \frac{dS}{dp} = d\frac{(\pi R^2)}{dp} = 2\pi R_0 \frac{dR}{dp}|_0 = 2\pi R_0^2 \frac{dR/R_0}{dp}|_0$

$\frac{dR}{R_0} = \varepsilon$ è la deformazione tangenziale della parete del vaso, dp è la variazione di pressione che ha generato la variazione di raggio rispetto la condizione di riferimento, quindi avevamo una condizione di riferimento con raggio R_0, abbiamo avuto una variazione dp che ha generato la nostra condizione dR. Abbiamo che l'azione di σ sulla parete che ha spessore h(consideriamo la tensione media) deve esser uguale all'azione di p sul raggio, cioè l'azione della pressione che si controbilancia con la tensione lungo le pareti, quindi: $2Rp = 2h\sigma$ il raggio sarebbe $R_0 + dR$, ma dR è un infinitesimo rispetto R_0 quindi consideriamo R_0.

Secondo il bilancio se: $R_0 dp = h\sigma$ dp sarà uguale a $dp = h\dfrac{\sigma}{R_0}$ sempre riferendoci alla nostra condizione di riferimento.Quindi otteniamo assumendo la nostra parete elastica: $C = 2\pi R_0^2 \left(\dfrac{\dfrac{\varepsilon}{(h\sigma)}}{R_0}\right) = \left(2\pi \dfrac{R_0^3}{(h\dfrac{\sigma}{\varepsilon})}\right)$ considerando $\dfrac{\sigma}{\varepsilon} = E$ essendo viscoelastico in realtà: $C = 2\pi \dfrac{R_0^3}{hE}$

A questo punto sovrapponiamo la non stazionarietà che ci ha determinato l'impedenza longitudinale Z_L e l'ammettenza trasversale Y_T associata alla deformabilità della parete e vediamo il modello complessivo per il tratto di vaso di lunghezza dz che ci descrive il comportamento delle due curve iniziali considerando la non stazionarietà:



$Q + \dfrac{\partial Q}{\partial z} dz \quad P + \dfrac{\partial P}{\partial z} dz$ modello RLC che ci dà le seguenti equazioni(equazioni dei telegrafisti o di Maxwell).Ricavo le equazioni di pressione e portata che regolano questo circuito per veder quali possono essere le soluzioni di questo circuito che descrive il nostro tratto di lunghezza dz

Facendo il bilancio per la nostra caduta di pressione(moltiplichiamo per dz perchè i valori di Z_L sono per unità di lunghezza per come abbiamo caratterizzato il parametro e quindi lo dobbiamo moltiplicare per la lunghezza del tratto che stiamo osservando, stesso discorso per Y_T :

$$P(j\omega) = QZ_L dz + \frac{\partial p}{\partial z} dz + P$$

$$Q(j\omega) = Q + \frac{\partial Q}{\partial z} dz + Y_T dz \left(P + \frac{\partial p}{\partial z} dz\right)$$

trascurando gli infinitesimi di ordine superiore(dz^2)rimane quindi:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial z} = -Z_L Q \rightarrow \dfrac{\partial^2 p}{\partial^2 z} = Z_L Y_T P \\ \dfrac{\partial Q}{\partial z} = -Y_{TP} \end{cases}$$

avendo derivato la prima equazione un'altra volta otteniamo un'equazione differenziale del secondo grado che ha soluzioni del tipo: $P(j\omega, z) = P_{f0} e^{-(\gamma z)} + P_{r0} e^{(\gamma z)}$

Dove γ ? Derivo due volte:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\gamma P_{f0} e^{-(\gamma z)} + P_{r0} e^{(\gamma z)}$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial^2 z} = \gamma^2 P_{f0} e^{-(\gamma z)} + \gamma^2 P_{r0} e^{(\gamma z)}$$

da cui

$\gamma = \sqrt{Z_L Y_T}$ in generale γ avrà una forma: $\gamma = \alpha(\omega) + j\beta(\omega) = \sqrt{Z_L Y_T}$ dove $Z_L = \dfrac{R}{(j\omega L)}$ e $Y_T = j\omega C$, questo genera un'espressione che ha una parte reale $\alpha(\omega)$ e una parte immaginaria $\beta(\omega)$, per la trattazione delle componenti in alta frequenza in realtà la parte reale ci interessa poco, è importante, ma ha un effetto di attenuazione che possiamo trattare a parte quando ci interessa farlo, determina solo un'attenuazione dell'ampiezza, non ha effetto sulle frequenze, trascuriamo quindi la parte reale di attenuazione, cioè trascuriamo la parte resistiva, la R del nostro Z_L e così ci rimane solo la parte immaginaria, non vuol dire che la resistenza R sia fisicamente trascurabile, non è vero perchè il fluido è viscoso e c'è ha un sacco di resistenza nel fenomeno, la trascuriamo soltanto dal punto di vista dell'analisi in frequenza e gliela aggiungiamo a parte, è solo per veder l'effetto sulle diverse componenti in frequenza del nostro segnale, quindi se trascuriamo e **consideriamo la linea a basse perdite**, diventa $\gamma = j\omega\sqrt{LC}$

$\gamma = j\beta(\omega) = \sqrt{Z_L Y_T} = j\omega\sqrt{LC}$ linea a basse perdite vuol dir trascurare la parte reale.

Abbiamo risolto la dipendenza dalla pressione, quello che ci interessava era il comportamento della portata in termini di pressione, se andiamo a valutare il comportamento per la portata possiamo utilizzare un approccio analogo, deriviamo quindi due volte l'espressione della portata, qualitativamente anche l'onda di portata avrà due componenti, uno che va in $e^{-(\gamma z)}$ e uno che va in $e^{(\gamma z)}$ che si sovrappongono. utilizziamo la derivata della pressione considerando che: $-Z_L Q = \dfrac{\partial p}{\partial z}$ il nostro $\dfrac{\partial p}{\partial z}$ come visto prima è $\dfrac{\partial p}{\partial z} = -\gamma P_{f0} e^{-(\gamma z)} + P_{r0} e^{(\gamma z)}$, con $\gamma = \sqrt{Z_L Y_T}$ otteniamo:

$$Q=\frac{-1}{Z_L}\left(-\sqrt{Z_L Y_T}\,P_{f0}e^{-(\gamma z)}+P_{r0}e^{(\gamma z)}\right)$$ quindi: $$Q=\sqrt{\frac{Y_T}{Z_L}}P_{f0}e^{-(\gamma z)}-\sqrt{\frac{Y_T}{Z_L}}P_{r0}e^{(\gamma z)}$$

con $P_{f0}e^{-(\gamma z)}=P_f$, $P_{r0}e^{(\gamma z)}=P_r$ che sono le due onde che compongono la pressione, quindi se la nostra pressione è uguale alla somma delle due onde: $P=P_f+P_r$ la portata è uguale a: $Q=\frac{(P_f-P_r)}{z_0}$ ove z_0 va sotto il nome di impedenza caratteristica della linea ed è: $z_0=\sqrt{\frac{Z_L}{Y_T}}\simeq\sqrt{\frac{L}{C}}$ l'approssimazione è valida se consideriamo linee a basse perdite.

Perché le ho chiamate f ed r? Come si propagano queste onde lungo l'albero circolatorio? Consideriamo la nostra onda di pressione e la consideriamo direttamente con la nostra linea a basse perdite tanto la parte reale ci dà soltanto uno smorzamento esponenziale quindi non ha nessun influenza sulla propagazione dell'onda ma solo sull'ampiezza dell'onda stessa.

Questa è la nostra P scritta secondo le basse perdite:

$$P(jw,z)=P_{f0}e^{-jw\sqrt{LC}z}+P_{r0}e^{jw\sqrt{LC}z}$$

che nel dominio dei tempi diventa

$$P(t)=P_{f0}\cos(wt-w\sqrt{LC}z+\varphi)+P_{r0}\cos(wt+w\sqrt{LC}z+\delta)$$

(sono passata dal dominio delle frequenze al dominio dei tempi per vedere come si propaga nel tempo la nostra onda lungo la coordinata z longitudinale al nostro albero circolatorio. La propagazione dell'onda è data da come avanzano i fronti equifase della nostra onda, quindi come avanza il valore dell'argomento del nostro coseno. Quindi di fatto vogliamo vedere come si muovono i fronti per cui:

$$wt-w\sqrt{LC}z+\varphi=cost \quad ; \quad wt+w\sqrt{LC}z+\delta=cost$$

Derivandole rispetto al tempo, cioè vedendo come avanzano nel tempo queste superfici:

$$w-w\sqrt{LC}\frac{dz}{dt}=0 \quad ; \quad w+w\sqrt{LC}\frac{dz}{dt}=0$$

Indipendentemente dal valore specifico di w ottengo la velocità di fase ossia come si sposta il mio fronte di fase lungo z:

$$\frac{dz}{dt}=v_f=\frac{1}{\sqrt{LC}}=\frac{w}{\beta(w)} \quad ; \quad \frac{dz}{dt}=v_r=-\frac{1}{\sqrt{LC}}=-\frac{w}{\beta(w)}$$

Ottengo quindi:

Vf=velocità di forward. Onda che procede in avanti lungo z.

Vr=velocità di rewind. Onda che procede indietro lungo z.

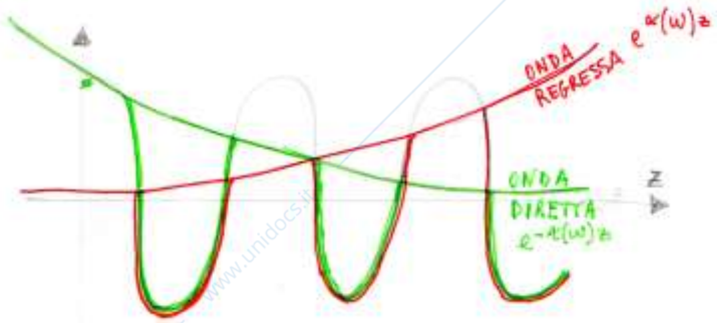
Questa velocità di fase non dipende specificatamente dalla pulsazione ma in questo caso non è altro che $\frac{w}{\beta(w)}$ da cui segue la relazione che abbiamo tra velocità di fase, lunghezza d'onda e il nostro beta di omega che è l'argomento che riguarda le caratteristiche della pulsazione quindi della fase delle nostre onde. Com'è legata la lunghezza d'onda alla velocità di fase:

$$\lambda=v_f*T=\frac{v_f}{\frac{w}{2\pi}}=\frac{w}{\beta(w)}\times\frac{2\pi}{w}=\frac{2\pi}{\beta(w)}$$ T=periodo

Tutto questo l'abbiamo fatto trascurando le perdite lungo la linea. In realtà in questo caso l'assunzione delle basse perdite non è un'approssimazione nel senso che le perdite sono piccole ma in realtà in questo caso abbiamo il fluido viscoso, dei condotti che diventano sempre più stretti per cui va da se che in realtà la parte di smorzamento è rilevante all'interno dell'albero circolatorio. Dal punto di vista però dell'andamento qualitativo questo non ha un grosso effetto nel senso che la descrizione di come avanzano i nostri fronti d'onda corrisponde a quello che viene dato da questa assunzione. Che cosa succede andando a considerare le perdite? Le perdite di solito sono associate al fatto che nell'esponenziale gamma è uguale a:

$$\gamma=\alpha(w)+j\beta(w)$$

quindi di fatto queste due onde che si sovrappongono a formare l'onda di pressione (che sono due sinusoidi) vengono ad essere sovrapposte ad uno smorzamento esponenziale associato ad alfa di omega ossia:



queste onde sinusoidali, una per ogni valore di frequenza che vanno a comporre tutte le componenti della nostra onda di pressione e della nostra onda di portata finale si sovrappongono, nel caso dell'onda diretta, ad una caduta esponenziale $e^{-\alpha(w)z}$, nel caso dell'onda riflessa invece ad una caduta esponenziale $e^{\alpha(w)z}$. In entrambi i casi abbiamo uno

smorzamento dell'ampiezza della nostra onda. Quindi non è vero che non esiste, lo smorzamento c'è ed è in relazione alla lunghezza finale dell'albero circolatorio, però in tutti i modi qualitativamente influisce sullo sfasamento di quelle onde e fa si che si sovrappongano, vadano in opposizione di fase o siano nella stessa fase per cui in un caso si annullano, nell'altro si sommano.
Rimanendo sulla velocità di fase, in particolare per quanto concerne la dipendenza dai nostri parametri LC, la nostra velocità di fase com'è influenzata dai parametri caratteristici del nostro sistema? Se consideriamo sempre la linea a basse perdite, se consideriamo la nostra velocità di fase come

$$v_f \simeq \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Ed andiamo a sostituire le espressioni di L e di C

$$= \sqrt{\frac{E \cdot h}{\rho \cdot 2 \cdot a}}\, v_f$$

con a= lume del nostro raggio.
Ossia: il fronte d'onda viaggia tanto più veloce quanto più rigida è la parete del nostro vaso. (rigida in senso lato visto che in questa relazione compare sia il modulo di Young che lo spessore della parete quindi quell'h è la rigidezza strutturale della nostra parete del vaso) e tanto più lenta quanto maggiore è la densità di massa, in quanto maggiore è il lume del vaso. Tutto sommato ha senso: maggiore è il lume del vaso minore è la velocità per garantire la medesima portata, maggiore è la densità di massa e maggiore sarà inerzia quindi onda più lenta. La propagazione dell'onda pressoria o di portata è tanto maggiore quanto più rigida è la parete del vaso perché non abbiamo tutti quei fenomeni di complianza che tendono a smorzare le frequenze.
Questo per quanto riguarda la caratterizzazione delle nostre equazioni di maxwell che come detto valgono per qualunque coppia d'onda che viaggi su qualcosa di caratterizzabile con quei tre tipi di parametri che abbiamo legato a quelle che sono le nostre caratteristiche geometriche e meccaniche del nostro problema fluidodinamico. Ovviamente avendo il vostro modellino RLC che vale per il vostro tratto di lunghezza dz, questo può essere generalizzato andando a comporre questi oggetti in serie ed in parallelo per ottenere un modello RLC complessivo di un tratto più o meno lungo di vaso. Questo viene fatto per tutti questi parametri, la densità e la viscosità del sangue saranno gli stessi, mentre lo spessore della parete, la sezione del vaso ed eventualmente il modulo di rigidezza (procedendo dal centro alla periferia) mano a mano cambiano lungo l'albero circolatorio quindi è inevitabile andare ad integrare questi oggetti lungo tutta la lunghezza o comunque lungo il tratto che a noi interessa, ponendo questi oggetti in serie o parallelo a seconda che ci siano o no biforcazioni e via discorrendo. Però al di là del fatto "qualitativo" che le soluzioni che abbiamo sono date dalla sovrapposizione di due onde (una diretta ed una riflessa) non abbiamo nessuna indicazione alla fine di quale possa essere la relazione di fase tra le due onde stesse: non sappiamo altro che per quelle che sono le caratteristiche del condotto abbiamo un'onda diretta ed una riflessa ma la sovrapposizione di queste due onde nella loro relazione di fase sulla pressione è opposta a quella che si ha sulla portata. Qualunque cosa prevede la sovrapposizione di due onde, in generale, va bene come soluzione di questo sistema. Che cos'è che determina come queste due onde interferiscono? In che relazione sono l'onda diretta e l'onda riflessa? E da che cosa dipende. Dobbiamo valutarlo perchè dalla relazione che c'è tra queste due onde, dal fatto che queste si annullino o si sovrappongano in maniera costruttiva dipende pesantemente la relazione tra pressione e portata.

RIFLESSIONE IN UNA LINEA DI TRASMISSIONE UNIFORME:

avendo il vostro modellino RLC che vale per il vostro tratto di lunghezza dz, questo può essere generalizzato andando a comporre questi oggetti in serie ed in parallelo per ottenere un modello RLC complessivo di un tratto più o meno lungo di vaso. possiamo andare a comporre il nostro RLC ponendo, con i parametri cambiati, in serie e parallelo, tanti pezzettini fino a comporre un unico RLC globale da cui estrapolare i nostri parametri e che possiamo caratterizzare con una resistenza caratteristica z_c che è la radice di z_l (impedenza longitudinale) diviso y_t (ammettenza trasversale), ed ipotizziamo di avere tutta la nostra linea di lunghezza L, lungo una coordinata longitudinale chiamata x, che nel nostro caso si chiude sui capillari: avevamo detto che tutto ciò va bene finché non arriviamo ai capillari che hanno un lume della dimensione delle cellule che sono in sospensione nel sangue, per cui tutto questo discorso nei capillari non avrebbe più significato però è anche vero che nei nostri capillari abbiamo una sezione molto molto piccola e che le pareti sono di fatto rigide, che gli sbalzi pressori sono bassi per cui la complianza è praticamente zero, per cui in nostri capillari li possiamo in generale, se non vogliamo entrare nel dettaglio di quello che succede a queste particelle sospese che sbattono lungo contro le altre nel fluido, semplificare con una resistenza molto alta visto che a valle dei capillari tutti i fenomeni pulsatili sono estinti. Definiamo una variabile, il coefficiente di riflessione, che è espresso come il rapporto tra l'onda riflessa e l'onda diretta :

$$\Gamma(x) = \frac{P_r}{P_f} = \frac{P_{r0}\, e^{\gamma x}}{P_{f0}\, e^{-\gamma x}} = \frac{P_{r0}}{P_{f0}}\, e^{2\gamma x}$$

Questo qui è un parametro che dipende dalle caratteristiche della nostra linea mentre P_{r0} e P_{f0} sono delle condizioni al contorno (potrebbero essere anche totalmente indipendenti tra di loro) su cui abbiamo uno scarso controllo. Esprimiamo

$$\frac{P_{r0}}{P_{f0}} = \Gamma(x)\, e^{-2\gamma x}$$

quindi P_{r0} e P_{f0} in funzione del coefficiente di riflessione.
In particolare questo sarà vero per il valore di chiusura, ossia in l. Quella linea si chiude sulla resistenza. Il nostro generico di coefficiente di riflessione può essere espresso in funzione del coefficiente di riflessione in fondo alla linea.

$$\frac{P_{r0}}{P_{f0}} = \Gamma(l)\, e^{-2\gamma l}$$

$$\Gamma(x) = \Gamma(l)\, e^{2\gamma(x-l)}$$

Il rapporto tra onda riflessa ed onda diretta in qualunque punto della linea dipende da qual è il coefficiente di riflessione sulla chiusura della linea e da quanto sono distante da quel punto. Perchè ci fa comodo questo? Perchè in realtà noi abbiamo detto che la nostra linea è chiusa su una resistenza R quindi noi abbiamo che:

$$R = \frac{P(l)}{Q(l)} = \frac{P_{f0}\, e^{-\gamma x \to l} + P_{r0}\, e^{\gamma x \to l}}{\dfrac{P_{f0}\, e^{-\gamma x \to l} - P_{r0}\, e^{\gamma x \to l}}{Z_0}}$$

per ora abbiamo ragionato a monte, ora sfruttiamo quello che sappiamo per ragionare a valle: quel Q(l) quel P(l) devono essere compatibili con la descrizione della linea prima quindi con tutto il discorso dell'interferenza tra onde ecce cc ma devono anche essere compatibili con il fatto che si chiudono su una resistenza.
Dividendo numeratore e denominatore per pf0e^(gamma x) :

$$R = Z_0 \cdot \frac{1+\Gamma(l)}{1-\Gamma(l)}$$

Da cui andando ad esprimere il nostro coefficiente di riflessione sulla chiusura della linea in funzione di R.

$$\Gamma(l) = \frac{R-Z_0}{R+Z_0} \quad \rightarrow \quad 1 \quad per\ R \rightarrow \infty$$

Nel nostro caso abbiamo messo una resistenza molto elevata come chiusura della linea, consideriamo che questa resistenza sia idealmente infinita, abbiamo allora che il coefficiente di riflessione sulla chiusura è uguale a 1.
Consideriamo, sempre perchè la parte reale ci interessa poco dato che incide solo sullo smorzamento dell'ampiezza, la nostra linea a basse perdite in cui il nostro gamma risulta essere:

$$\gamma = \alpha(\omega) + j\beta(\omega)$$

Ricordandoci che beta di omega è in relazione con la lunghezza d'onda diventa:

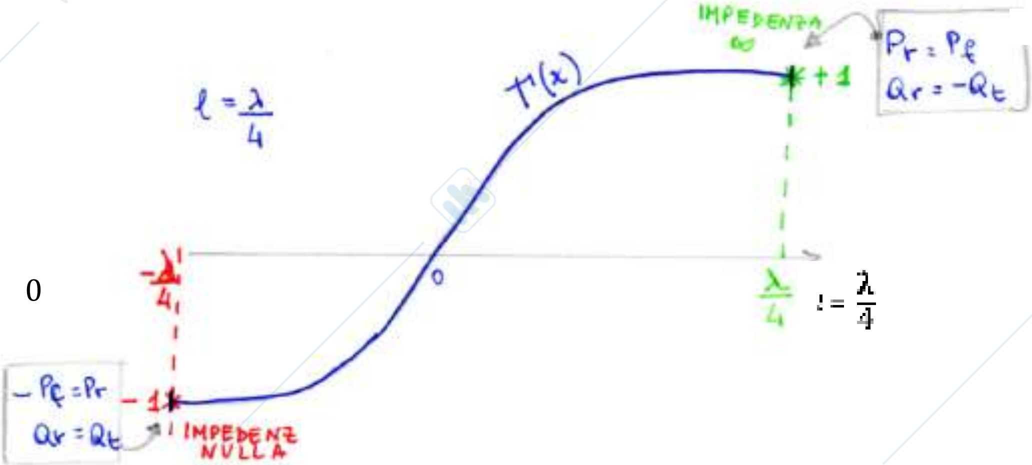
$$\gamma = 2j\frac{\pi}{\lambda}$$

Da cui vediamo un coefficiente di riflessione all'origine:

$$\Gamma(0) = \Gamma(l)\, e^{-2\gamma l} = e^{-j\frac{4\pi l}{\lambda}}$$

Abbiamo delle considerazioni da fare:
Visto dal carico, dove questo L cos'è? È un pezzo della nostra linea quindi visto dal cuore, o comunque subito a valle della nostra valvola, quello che abbiamo è un comportamento diverso per le diverse componenti dell'onda emessa perchè qui avrò un valore che se non è 1 è qualcosa di molto vicino ad esso. Però come vengono trattate le diverse componenti che sono caratterizzate da diverse lunghezze d'onda? il fatto che siano in fase, differenza di fase, interferite in qualche modo dipende dal rapporto tra la specifica lunghezza d'onda della componente che stiamo considerando e la lunghezza dell'albero quindi determina un comportamento ed una visione diversa dal nostro cuore per le diverse componenti dell'onda che viene emessa in base al rapporto tra la lunghezza d'onda e la lunghezza dell'albero circolatorio ma quello che abbiamo è anche che l'impedenza varia lungo tutto l'albero. Perchè? Qui ovviamente c'è $\frac{1\pi}{\lambda}$ quindi il modulo di

riferimento è $\frac{\lambda}{4}$ o suoi multipli di l. Facciamo finta di assumere che $l = \frac{\lambda}{4}$ giusto perchè ci serve a dettagliare il comportamento, e consideriamo come varia $\Gamma(x)$ per una determinata lunghezza d'onda lambda: essa mano a mano che mi sposto lungo x assume dei valori rappresentabili in questo modo.



Questa è $\Gamma(x)$ non $\Gamma(0)$. Ho che in relazione alla lunghezza della linea l'impedenza varia, quindi in punti diversi della linea passano amplificate o smorzate componenti diverse. Per x=0 con la mia $l = \frac{\lambda}{4}$ vedo un $\Gamma(0)$=-1. In questo caso al cuore vedo un coefficiente di riflessione uguale a -1. che $P_t = -P_r$ ma anche che $Q_r = Q_f$ quindi P=0, Q=$2Q_t$=$2Q_f$, quindi qui l'impedenza è nulla. In questo punto il risultato finale di quell'interferenza è che per quella specifica lunghezza d'onda, in quel punto, non vedo nessun impedenza.
In $l = \frac{\lambda}{4}$ invece Qr=-Qf e Pr=Pf quindi l'impedenza è infinita.

Quindi con questo tipo di comportamento quello che ottengo è ciò che va sotto il nome di "adattatore d'impedenza" ossia considerando l'interazione tra le caratteristiche della linea ottenete una linea che oppone punto per punto impedenze diverse per lunghezze d'onda diverse, quindi si comporta adattandosi alla lunghezza d'onda ma non solo, la stessa lunghezza d'onda viene trattata in maniera diversa in punti diversi della linea