

**Università di Padova**  
**Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica**  
**Corso di Laurea Magistrale in Bioingegneria**  
**Anno Accademico 2018-2019**

**Insegnamento di Biomeccanica (48 ore, 6 CFU)**  
**Introduzione al corso**

**Riferimenti**

**Docente**

**Piero Pavan (prof. Associato di Bioingegneria Industriale)**

**Dipartimento di Ingegneria Industriale (DII)**

**Sede di lavoro: DII, via Venezia 1 (quinto piano)**

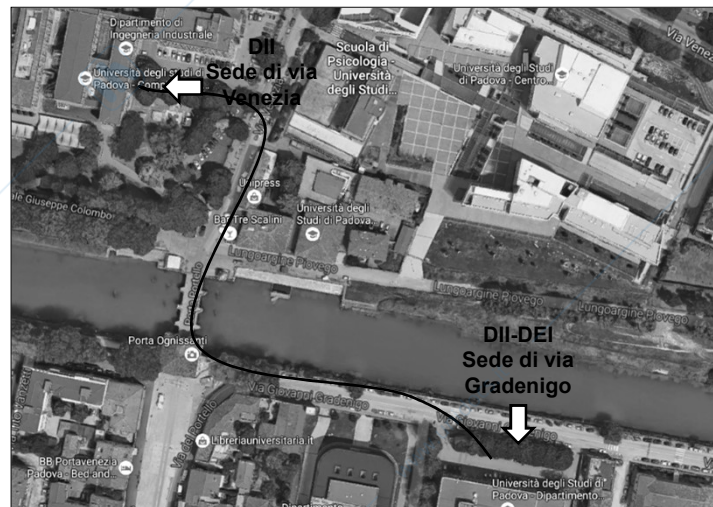
**Ricevimento**

**Giovedì, dalle 14.30 alle 15.30**

**Tel. 049 827 6830**

**E-mail: [piero.pavan@unipd.it](mailto:piero.pavan@unipd.it)**

## Come trovarmi



## Calendario del corso e degli esami

**Calendario del corso: dal 03/10/2018 al 09/01/2018 (salvo modifiche)**

**Lezioni: Mercoledì, 12.30-14.30, Aula Ve**

**Giovedì, 16.30-18.30, Aula Ve**

**Date d'esame:**

- I appello: 24/01/2019, ore 14.30
- II appello: 21/02/2019, ore 14.30
- III appello: 25/06/2019, ore 14.30
- IV appello: 17/09/2019, ore 14.30

**Le date d'esame sono pubblicate in: <https://elearning.dei.unipd.it/>**

**Modalità di esame**

**Modalità d'esame**

**Prova scritta. La prova scritta consiste in (1+4) esercizi su tematiche svolte a lezione. La prova ha durata massima compresa tra 2<sup>h</sup>00<sup>m</sup> e 2<sup>h</sup>30<sup>m</sup>.**

**Modalità di iscrizione all'esame**

**Iscrizione tramite Uniweb; l'aula di svolgimento è segnalata nella fase di iscrizione.**

**Modalità di esame**

**Configurazione dell'insegnamento di Biomeccanica a partire dal prossimo A.A. (2019-2020)**

**L'insegnamento di Biomeccanica passerà a 72 ore (9 CFU) e si svolgerà su due canali.**

### **Materiale didattico**

#### **Testi di riferimento**

- Casini P, Vasta M, "Scienza delle Costruzioni" terza edizione, Città Studi Edizioni, 2016

#### **Materiale didattico**

- Dispense relative agli esercizi svolti a lezione (documenti .pdf)
- Appunti dalle lezioni (a cura dello studente)

#### **Altri riferimenti bibliografici**

- Oomens C, Brekelmans M, Baaijens F, "Biomechanics – Concepts and computation", Cambridge University Press, 2009
- Corradi dell'Acqua L, "Meccanica delle strutture" (vol. 1), McGraw-Hill, 1992

### **Materiale didattico**

**Il materiale didattico in .pdf è scaricabile tramite Uniweb. Il materiale sarà caricato progressivamente, seguendo le date di presentazione degli argomenti. Anche il programma di dettaglio sarà pubblicato su Uniweb.**

- Per scaricare il materiale didattico è necessario iscriversi al corso di Biomeccanica 18/19 presente in Uniweb
- Per l'iscrizione usare la chiave di iscrizione Biomecc18
- Le iscrizioni saranno possibili sino al 31 ottobre 2018

### **Materiale didattico**

#### **Riviste scientifiche**

- **Journal of Biomechanics**
- **Medical Engineering & Physics**
- **Journal of Biomechanical Engineering – Transactions of ASME**
- **Journal of Applied Biomechanics**
- **Biomaterials**
- ....

#### **Motori di ricerca**

- <https://www.sciencedirect.com/>
- <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/>

### **Biomeccanica**

#### **Cos'è la Biomeccanica ?**

**Applicazione dei principi e dei metodi della meccanica allo studio dei sistemi biologici, quali l'essere umano, gli animali e le piante, dal livello di apparato al livello cellulare.**

#### **Obiettivi generali (possibili) dello studio:**

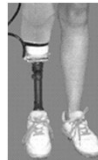
- **Comprensione delle caratteristiche funzionali meccaniche di apparati, organi, tessuti e cellule (con applicazioni alla ingegneria del movimento, alla protesica, alla meccanica dei tessuti biologici, etc.)**



**Obiettivi specifici?**

## Biomeccanica

### Ripristino delle capacità funzionali tramite protesi



### Miglioramento delle performance di attrezzature sportive

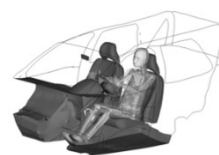


## Biomeccanica

### Miglioramento del livello di ergonomia sul posto di lavoro



### Miglioramento del livello di sicurezza degli autoveicoli



...e MOLTO altro ancora...

## Biomeccanica

**Discipline dell'ingegneria coinvolte nei problemi della biomeccanica:**

- **Meccanica del corpo rigido e dei sistemi 'multi-body' (studio del movimento, ...)**
- **Meccanica dei continui deformabili e meccanica delle strutture (meccanica dei tessuti e delle protesi, ...)**
- **Meccanica dei fluidi (problemi cardio-vascolari)**
- **Sistemi multi-fisica (problemi di campo accoppiati, ad esempio termo-meccanici ...)**

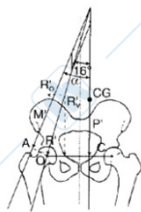
**I problemi possono essere affrontati in ambito sperimentale, di formulazione analitica e analisi computazionale (meglio se gli approcci sono fra loro combinati)**

## Contenuti del corso

**Scelta dei contenuti:**

**Focalizzazione sui temi della meccanica dei continui deformabili e delle strutture nelle sue potenziali applicazioni alla meccanica delle strutture biologiche e alla meccanica dei sistemi protesici**

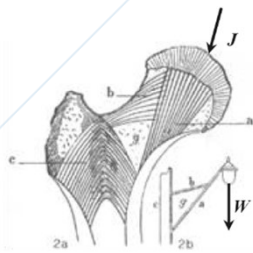
**Esemplificazione: valutazione meccanica di una protesi d'anca**



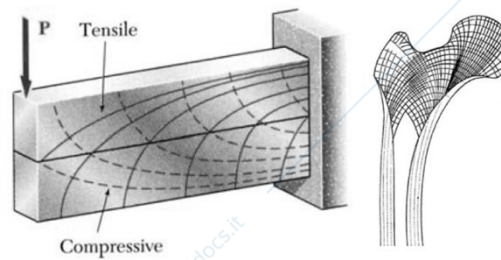
**Cinematica e forze applicate**  
**Antropometria**  
**Kinesiologia**  
**Stima delle forze**  
**Meccanica dei materiali**  
**Deformazione**  
**Tensione**  
**Modelli costitutivi**  
**Criteri di resistenza**  
**Comportamento strutturale**  
**Modello a trave**  
**Modello continuo 3D**

**Bio - MECCANICA**

**Un esempio sulle affinità tra meccanica del tessuto osseo e principi della meccanica delle strutture:**



**similitudine strutturale tra epifisi di femore (sx) e struttura di lampione (dx)**



**similitudine tra disposizione delle trabecole ossee del femore (dx) e conformazione delle linee isostatiche di tensione (sx)**

**Bio - MECCANICA**

**Potenziati applicazioni della teoria della trave**

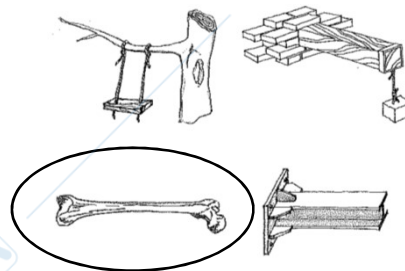
4  
Modellazione

4.1 Obiettivi

Come si è visto, la trave è un elemento strutturale avente una dimensione prevalente sulle altre. Pertanto tutti i corpi aventi funzioni strutturali e forma allungata, Fig. 4.1, sono assimilabili a travi: risultano in questa categoria il pilastro di una struttura in cemento armato o in acciaio, il ramo di un albero, il fessore di un vertebrato, un asse di legno ecc.

Figures 4.1 Corpi assimilabili a travi

Una trave in equilibrio risponde alle azioni esterne in due modi: a) cambia posizione e forma (ad esempio si allunga se sottoposta ad una forza di trazione, oppure si incurva se sottoposta a flessione); b) manifesta l'insorgere di azioni interne (caratteristiche della sollecitazione, tensioni). Si deve definire un opportuno modello matematico in grado di descrivere la risposta strutturale di una trave in termini di spostamenti, deformazioni e tensioni interne, ricavando le equazioni che permettano di determinare le suddette



**introduzione al modello di trave in Casini P, Vasta M, "Scienza delle Costruzioni"**

### **Programma di massima**

- **Equilibrio statico dei corpi: modelli di vincolo dei corpi, modelli di forze agenti sui corpi**
- **Elementi di antropometria e valutazione delle forze agenti in differenti distretti anatomici**
- **Introduzione alla meccanica dei corpi deformabili: tensione e deformazione, legame costitutivo elastico lineare, note sul criterio di resistenza di Von Mises**
- **Il problema di De Saint Venant (teoria della trave): esempi applicativi in ambito biomeccanico**
- **Instabilità dell'equilibrio elastico: esempi di applicazione a problemi di ambito biomeccanico**

### **Il percorso formativo in ambito biomeccanico**

- **Biomeccanica (Pavan)**
- **Meccanica dei Biomateriali ( secondo semestre, Pavan)**
  - **Comportamento meccanico di Materiali metallici, polimerici, ceramici ad uso biomedico**
  - **Meccanica dei materiali compositi**
  - **Criteri di resistenza dei biomateriali**
  - **Meccanica della frattura e calcolo fatica di elementi protesici**
- **Meccanica dei Tessuti Biologici (Natali)**
- **Biomeccanica Computazionale (Natali)**
- **Meccanica delle Strutture Biologiche (Carniel)**

### Biomeccanica

**Aspetti caratteristici della Biomeccanica: variabilità, complessità, varietà**

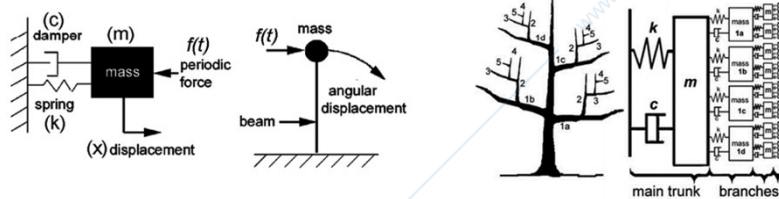
**Variabilità...** delle caratteristiche meccaniche dell'oggetto principale di studio: il corpo umano. Esistono forti variazioni (per non dire indeterminazioni) di molti fattori antropometrici e di caratteristiche meccaniche dei tessuti, dovute ad aspetti genetici, di età, di stato di salute, etc. etc.

**Complessità...** il comportamento meccanico dei tessuti biologici è spesso altamente non lineare e le morfologie di tessuti / organi / apparati sono parimenti complesse.

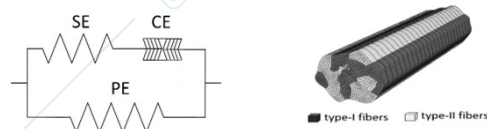
**Varietà...** delle tematiche di studio, che includono problemi caratterizzati da scale dimensionali assai diverse, anche restando nell'ambito della solca meccanica dei continui deformabili, a titolo d'esempio...

### Biomeccanica

**Modelli di crescita di alberi (dimensioni  $\approx 100$  m)**



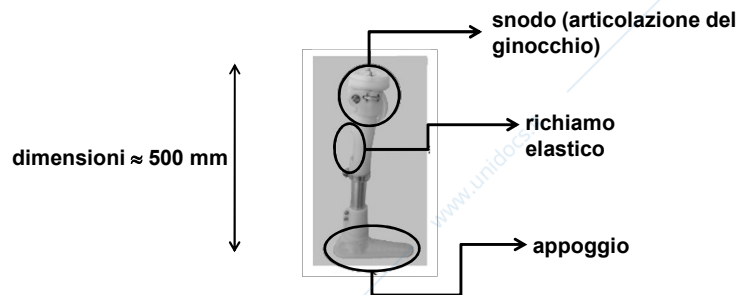
**Modelli meccanici di fibre muscolari (dimensioni  $\approx 50 \mu\text{m}$ )**



**Esempi di tesi in ambito biomeccanico**

**Problema strutturale di protesi per amputati trans-femorali:**

- modellazione strutturale della protesi mediante metodi numerici
- verifica strutturale delle differenti componenti strutturali in base alle normative vigenti (ISO 10328-2006 Prosthetics - Structural testing of lower-limb prostheses - Requirements and test methods)

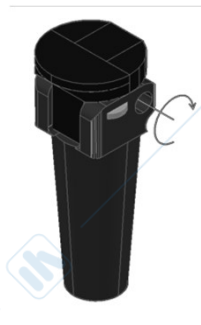


**Esempi di tesi in ambito biomeccanico**

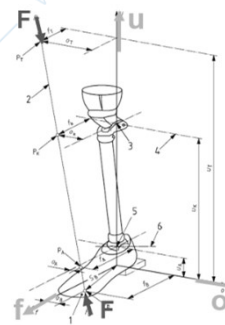
**Problema strutturale di protesi per amputati trans-femorali:**



modello fisico



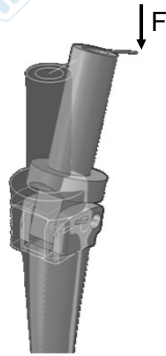
modello numerico



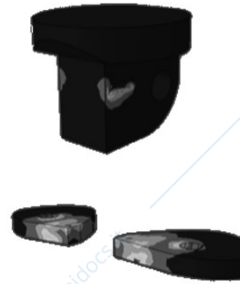
schema delle forze applicate

### Esempi di tesi in ambito biomeccanico

Problema strutturale di protesi per amputati trans-femorali:



condizione di carico simulata



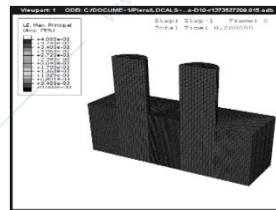
mappe degli sforzi meccanici sugli elementi strutturali più critici

### Esempi di tesi in ambito biomeccanico

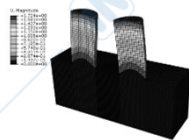
Studio dell'interazione tra substrato di silicone e cardiomiociti per lo studio di fenomeni di meccano-trasduzione cellulare



contrazione dei cardiomiociti



simulazione numerica dell'interazione con il substrato



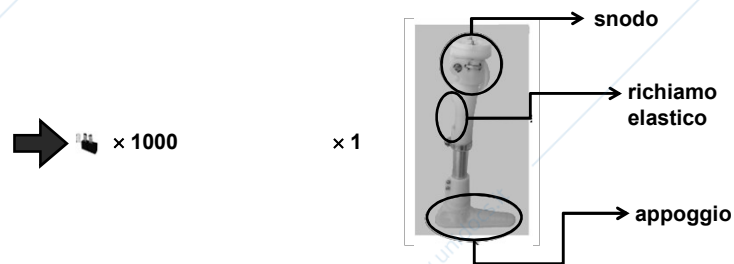
modello numerico per la misura indiretta delle forze di contrazione

dimensioni  $\approx 50 \mu\text{m}$

### Scale dimensionali

Rapporto tra le dimensioni caratteristiche delle due strutture:

$$\frac{500 \text{ mm}}{50 \cdot 10^{-3} \text{ mm}} = 1 \cdot 10^4$$



rappresentazione comparata delle dimensioni del substrato in silicone (sx) e della protesi (dx)

### Scale dimensionali dei problemi in biomeccanica

I metodi di studio di problemi così differenti si basano spesso sull'applicazione di medesimi principi e metodi di indagine, con una doverosa attenzione alle condizioni specifiche che caratterizzano il sistema che si sta investigando. Si consideri, a titolo dimostrativo, che i precedenti problemi sono stati risolti facendo ricorso alla teoria dei corpi continui deformabili e al medesimo programma di simulazione al computer del comportamento meccanico delle strutture in esame.

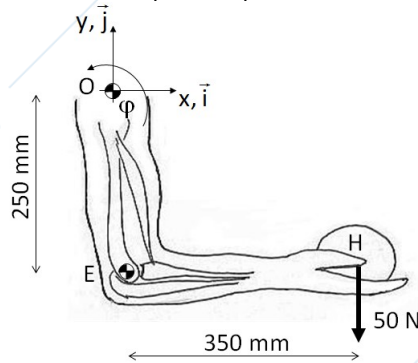
La comprensione il più possibile approfondita della meccanica dei continui deformabili è fondamentale in ambito biomeccanico.

In particolare, è essenziale comprendere i limiti di applicabilità dei metodi e delle teorie che si adottano, in relazione allo specifico problema in esame.

**BIOMECCANICA A.A. 2018-19  
ESERCIZI SU SISTEMI DI FORZE**

### 1. CALCOLO DEL MOMENTO DI UNA FORZA

Determinare il momento della forza indicata rispetto al punto di articolazione del gomito e della spalla.



Rispetto al sistema di riferimento indicato (destrorso), orientato dai versori  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ , i segmenti orientati che interessano per il calcolo sono:

$$OE = (0 \quad -250 \quad 0) \quad OH = (350 \quad -250 \quad 0) \quad EH = (350 \quad 0 \quad 0)$$

Il vettore forza applicato nel punto H è dato da

$$\vec{F} = (0 \quad -50 \quad 0)$$

Il momento della forza rispetto al punto E (articolazione del gomito) è dato dal determinante indicato nel seguito:

$$\vec{M}_E = EH \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 350 & 0 & 0 \\ 0 & -50 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot 0 + \vec{j} \cdot 0 + \vec{k} \cdot [350 \cdot (-50)] = -17500\vec{k} \text{ Nmm}$$

Il momento è quindi di verso orario rispetto al punto E (negativo, secondo la convenzione adottata). Il momento della forza rispetto al punto O (articolazione della spalla) è dato da:

$$\vec{M}_O = OH \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 350 & -250 & 0 \\ 0 & -50 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot 0 + \vec{j} \cdot 0 + \vec{k} \cdot [350 \cdot (-50) + 0 \cdot (-250)] = -17500\vec{k} \text{ Nmm}$$

Il momento è quindi uguale se calcolato rispetto ai punti E oppure O.

Una forza applicata nel punto H con componenti

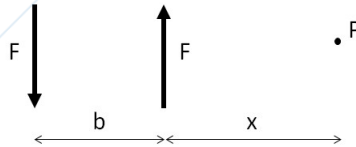
$$\vec{F} = (35 \quad -25 \quad 0)$$

è una forza con retta di applicazione passante per O (si costruisca per esercizio la rappresentazione grafica). Il momento di questa rispetto all'articolazione della spalla deve risultare nullo, come si ricava dal calcolo:

$$\vec{M}_O = OH \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 350 & -250 & 0 \\ 35 & -25 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot 0 + \vec{j} \cdot 0 + \vec{k} \cdot [350 \cdot (-25) + 35 \cdot (-250)] = 0$$

## 2. MOMENTO DATO DA UNA COPPIA DI FORZE DI VERSO OPPOSTO

Si calcoli il momento dato dal sistema di forze indicato, rispetto al punto P.



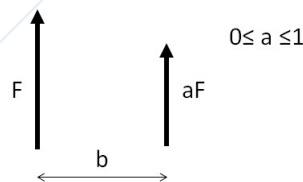
Dato che il sistema di forze è planare, il vettore momento sarà perpendicolare al piano di giacenza e con segno positivo se antiorario o negativo se orario. Procedendo in modo più agile rispetto a quanto fatto nell'esercizio precedente, si ottiene

$$M_p = F \cdot (b+x) - F \cdot x = Fb$$

Si noti che il modulo del momento della coppia di forze è pari a  $Fb$ , a prescindere dal punto rispetto al quale si calcola.

## 3. RISULTANTE DI UN SISTEMA DI FORZE

Si determini la retta di applicazione della risultante del sistema di forze indicato in figura.



La risultante ha modulo  $R = F \cdot (1+a)$  ed è parallela alle forze indicate, con medesimo verso. Per determinare la posizione della retta di applicazione calcoliamo il momento rispetto al punto di applicazione della retta di sinistra (si sarebbe potuto scegliere qualsiasi altro punto):

$$M = aF \cdot b$$

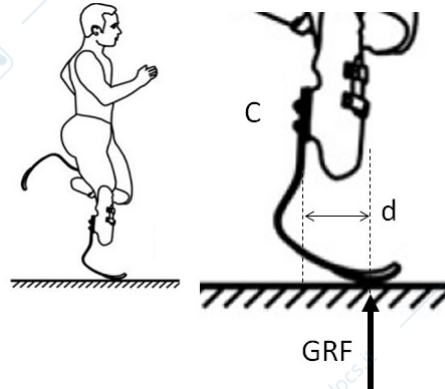
La distanza della retta di applicazione della risultante da quella di  $F$  è pari a:

$$d = \frac{M}{R} = \frac{aF \cdot b}{(1+a)F}$$

Si noti che per  $a=1$  la risultante è in posizione simmetrica rispetto alle forze indicate in figura. Per  $a \rightarrow 0$ , la risultante tende a coincidere con la forza di sinistra.

#### 4. SOLLECITAZIONI SU UNA PROTESI

Si calcolino risultante e momento risultante della reazione al suolo in appoggio monopodalico per l'atleta con protesi trans-tibiali descritto in figura.



Dati del soggetto: massa  $m = 80$  kg, altezza  $h = 180$  cm

Per la configurazione indicata in figura e per i dati antropometrici e di protesi dell'atleta, si stima che  $d$  sia pari a 15.2 cm.

Da misure sperimentali la reazione sul terreno GRF è ragionevolmente pari a 1.8 Wb, dove Wb è la forza peso dell'atleta. Si ricava pertanto:

$$Wb = 80 \text{ kg} \cdot 9.8066 \text{ m/s}^2 = 784.5 \text{ N}$$

$$GRF = 1.8 \cdot Wb = 1.8 \cdot 784.5 = 1412.1 \text{ N}$$

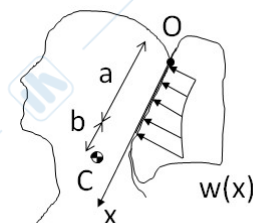
Risultante e momento risultante rispetto a C sono dati da

$$R = GRF = 1412.1 \text{ N} \quad (\text{nella direzione e nel verso di GRF})$$

$$M = GRF \cdot d = 1412.1 \cdot 15.2 / 100 = 214.64 \text{ Nm} \quad (\text{verso antiorario})$$

#### 5. RISULTANTE E MOMENTO RISULTANTE DI UN CARICO DISTRIBUITO

Si suppone che il poggiatesta di un'auto applichi al passeggero una pressione sulla nuca riconducibile, in via semplificativa, al carico per unità di lunghezza  $w(x)$  indicato in figura. Si calcoli risultante e momento risultante del carico distribuito rispetto al punto C, corrispondente al giunto cervicale C3-C4.



$$a = 0.15 \text{ m}, \quad b = 0.05 \text{ m}, \quad w(x) = 200(1 + 20x^2) \text{ N/m}$$

Conviene calcolare il sistema statico equivalente rispetto al punto di origine del sistema di riferimento x:  
Risultante in modulo:

$$R = \int_0^{0.15} w(x) dx = \int_0^{0.15} 200(1 + 20x^2) dx = \left[ 200x + \frac{4000}{3}x^3 \right]_0^{0.15}$$

$$= 200 \cdot 0.15 + \frac{4000}{3} \cdot 0.15^3 = 30 + 4.5 = 34.5 \text{ N}$$

Direzione e verso sono concordi al carico distribuito.

Momento risultante in modulo:

$$M_0 = \int_0^{0.15} w(x) \cdot x dx = \int_0^{0.15} 200(x + 20x^3) dx = \left[ 200x^2 + \frac{4000}{4}x^4 \right]_0^{0.15}$$

$$= \frac{200}{2} \cdot 0.15^2 + \frac{4000}{4} \cdot 0.15^4 = 2.25 + 0.506 = 2.76 \text{ Nm}$$

Il verso del momento è orario, pertanto negativo rispetto alla convenzione di segno adottata.

La risultante del carico distribuito è una forza pari a 34.5 N, applicata ad una distanza dal punto O pari a:

$$x = \frac{M_0}{R} = \frac{2.76}{34.5} = 0.08 \text{ m}$$

Il sistema di forze staticamente equivalente al carico distribuito e applicato al punto C, è dato da:

$$R = 34.5 \text{ N}$$

$$M_c = -2.76 + 34.5 \cdot 0.2 = -2.76 + 6.9 = 4.14 \text{ Nm}$$

Il momento risultante  $M_c$  è positivo, pertanto antiorario.

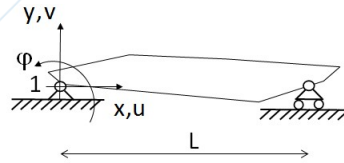
**BIOMECCANICA A.A. 2018-19**  
**ANALISI CINEMATICA E STATICA DI STRUTTURE NELLO SPAZIO BIDIMENSIONALE**  
**STRUTTURE MONOCORPO**

## 1. ANALISI CINEMATICA: STRUTTURA FISSA

Sviluppare l'analisi cinematica della seguente struttura.

Coordinate dei vincoli:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = L \\ y_2 = 0 \end{cases}$$



Preliminarmente, si osserva che la struttura ha 3 gradi di libertà (g.d.l.) e 3 condizioni semplici di vincolo (c.d.v.) applicate. Il numero dei vincoli è quindi strettamente necessario a bloccare ogni moto rigido della struttura nel piano.

Si assumono come incognite del problema cinematico le componenti di spostamento  $(u_1, v_1, \varphi)$  (si ricorda che la rotazione è comune a tutti i punti del medesimo corpo rigido).

Sulla base delle prestazioni cinematiche dei vincoli applicati nei punti 1 e 2 si scrive il sistema dato dalle equazioni di vincolo:

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ v_1 = 0 \\ v_2 = 0 \end{cases}$$

Si esprime la componente di spostamento  $v_2$  in funzione delle incognite cinematiche assunte. Per fare ciò, si considera la formula generale di relazione tra le componenti di spostamento di due punti generici P e Q di un corpo rigido vincolato ad un piano:

$$u_Q = u_P - \varphi(y_Q - y_P)$$

$$v_Q = v_P + \varphi(x_Q - x_P)$$

Considerando la seconda equazione e particularizzandola al caso in esame, si ottiene:

$$v_2 = v_1 + \varphi(L - 0) = v_1 + \varphi L$$

Il sistema di partenza viene pertanto riscritto come:

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ v_1 = 0 \\ v_1 + L\varphi = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} u_1 = 0 \\ v_1 = 0 \\ \varphi = 0 \end{cases}$$

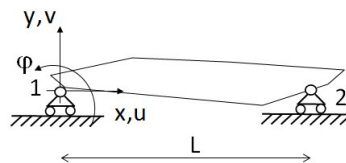
Il sistema ammette la sola soluzione nulla. In base alle relazioni precedenti ciò significa che ogni punto della struttura avrà componenti di spostamento nulle. La struttura è fissa.

## 2. ANALISI CINEMATICA: STRUTTURA LABILE

Sviluppare l'analisi cinematica della seguente struttura.

Coordinate dei vincoli:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = L \\ y_2 = 0 \end{cases}$$



La struttura ha 3 g.d.l. e 2 c.d.v. applicate. Si può quindi affermare che la struttura ha almeno 1 grado di labilità.

Si assumono come incognite del problema cinematico le componenti di spostamento  $(u_1, v_1, \varphi)$ . Sulla base delle prestazioni cinematiche dei vincoli applicati nei punti 1 e 2 si scrive il sistema dato dalle equazioni di vincolo:

$$\begin{cases} v_1 = 0 \\ v_2 = 0 \end{cases}$$

Si esprime la componente di spostamento  $v_2$  in funzione delle incognite cinematiche assunte, ottenendo:

$$v_2 = v_1 + \varphi(L - 0) = v_1 + \varphi L$$

ricavando, di conseguenza:

$$\begin{cases} v_1 = 0 \\ v_1 + L\varphi = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_1 = \bar{u} \\ v_1 = 0 \\ \varphi = 0 \end{cases}$$

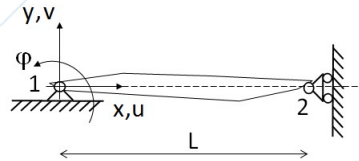
Si deduce che sono nulle le componenti di traslazione verticale del punto 1 e di rotazione, così come di ogni altro punto della struttura. Rimane arbitrario lo spostamento in direzione orizzontale del punto 1 e, di conseguenza, del corpo rigido. La struttura ha pertanto 1 grado di labilità.

### 3. ANALISI CINEMATICA: STRUTTURA LABILE

Sviluppare l'analisi cinematica della seguente struttura.

Coordinate dei vincoli:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = L \\ y_2 = 0 \end{cases}$$



La struttura ha 3 g.d.l. e 3 c.d.v. applicate. Il numero dei vincoli è quindi strettamente necessario a bloccare ogni moto rigido della struttura nel piano. Non si può tuttavia affermare a priori che la struttura è fissa, senza una analisi cinematica.

Si assumono come incognite del problema cinematico le componenti di spostamento  $(u_1, v_1, \varphi)$ . Sulla base delle prestazioni cinematiche dei vincoli applicati nei punti 1 e 2 si scrive il sistema dato dalle equazioni di vincolo:

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ v_1 = 0 \\ u_2 = 0 \end{cases}$$

Si esprime la componente di spostamento  $u_2$  in funzione delle incognite cinematiche assunte, ricavando

$$u_2 = u_1 - \varphi(0 - 0) = u_1$$

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ v_1 = 0 \\ u_1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_1 = 0 \\ v_1 = 0 \\ \varphi = \bar{\varphi} \end{cases}$$

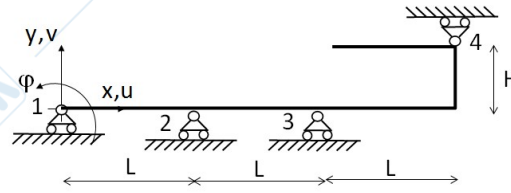
La soluzione trovata suggerisce che esistono  $\infty^1$  in dipendenza del valore infinitesimo dell'angolo di rotazione attorno al punto 1. La struttura ha pertanto 1 grado di labilità, nonostante siano uguali g.d.l. e c.d.v. del corpo.

#### 4. ANALISI CINEMATICA: STRUTTURA SOVRAVINCOLATA E LABILE

Sviluppare l'analisi cinematica della seguente struttura.

Coordinate dei vincoli:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = L \\ y_2 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x_3 = 2L \\ y_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = 3L \\ y_4 = H \end{cases}$$



La struttura ha 3 g.d.l. e 4 c.d.v. applicate. Il numero dei vincoli è sovrabbondante rispetto alla necessità di bloccare ogni moto rigido della struttura nel piano. Anche in questo caso non si può però affermare a priori che la struttura è fissa, senza una analisi cinematica.

Si assumono come incognite del problema cinematico le componenti di spostamento  $(u_1, v_1, \varphi)$ . Sulla base delle prestazioni cinematiche dei vincoli applicati nei punti 1, 2, 3 e 4 si scrive il sistema dato dalle equazioni di vincolo:

$$\begin{cases} v_1 = 0 \\ v_2 = 0 \\ v_3 = 0 \\ v_4 = 0 \end{cases}$$

Si esprimono le componenti di spostamento verticali in funzione delle incognite cinematiche assunte:

$$v_2 = v_1 + \varphi(L - 0) = v_1 + \varphi L$$

$$v_3 = v_1 + \varphi(2L - 0) = v_1 + 2\varphi L$$

$$v_4 = v_1 + \varphi(3L - 0) = v_1 + 3\varphi L$$

$$\begin{cases} v_1 = 0 \\ v_1 + \varphi L = 0 \\ v_1 + 2\varphi L = 0 \\ v_1 + 3\varphi L = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_1 = \bar{u} \\ v_1 = 0 \\ \varphi = 0 \end{cases}$$

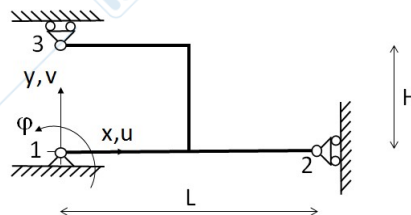
La soluzione trovata mostra che esistono  $\infty^1$  in dipendenza del valore di traslazione in direzione orizzontale. La struttura ha pertanto 1 grado di labilità, nonostante vi sia una sovrabbondanza di c.d.v. rispetto ai g.d.l. del corpo.

#### 5. ANALISI CINEMATICA: STRUTTURA LABILE

Sviluppare l'analisi cinematica della seguente struttura.

Coordinate dei vincoli:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = L \\ y_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = 0 \\ y_3 = H \end{cases}$$



La struttura ha 3 g.d.l. e 4 c.d.v. applicate. Si assumono come incognite del problema cinematico le componenti di spostamento  $(u_1, v_1, \varphi)$ . Il sistema delle equazioni di vincolo è:

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ v_1 = 0 \\ u_2 = 0 \\ v_3 = 0 \end{cases}$$

Si esprimono le componenti di spostamento  $u_2$  e  $v_3$  in funzione delle incognite cinematiche assunte, ricavando

$$u_2 = u_1 - \varphi(0-0) = u_1$$

$$v_3 = v_1 + \varphi(0-0) = v_1$$

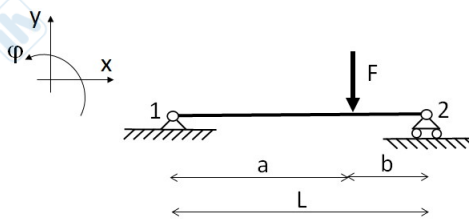
Si può quindi riscrivere il sistema precedente come segue:

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ v_1 = 0 \\ u_2 = 0 \\ v_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_1 = 0 \\ v_1 = 0 \\ \varphi = \bar{\varphi} \end{cases}$$

La soluzione trovata suggerisce che esistono  $\infty^1$  in dipendenza del valore infinitesimo dell'angolo di rotazione attorno al punto 1. La struttura ha pertanto 1 grado di labilità, nonostante vi sia una sovrabbondanza di c.d.v. rispetto ai g.d.l. del corpo.

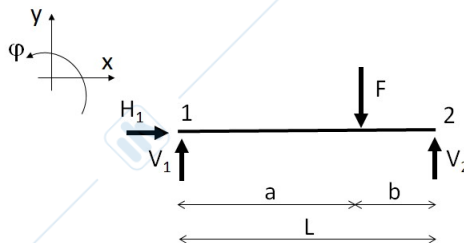
## 6. ANALISI STATICA: STRUTTURA ISOSTATICA

Sviluppare l'analisi statica della seguente struttura.



Si osservi che la struttura corrisponde nella disposizione dei vincoli a quella studiata dal punto di vista cinematico nell'esercizio 1.

Nell'analisi statica si assumono come incognite che le componenti delle reazioni vincolari ( $H_1, V_1, V_2$ ). A partire dalla struttura effettiva si ricava il sistema di corpo libero, eliminando idealmente le componenti cinematiche dei vincoli e sostituendole con le corrispondenti componenti statiche.



Si scrive il sistema delle equazioni di equilibrio alla traslazione in direzione x, y e di equilibrio alla rotazione attorno ad un punto arbitrario.

$$\begin{cases} \sum_i F_{xi} = 0 \\ \sum_i F_{yi} = 0 \\ \sum_i M_{i,p} = 0 \end{cases}$$

Scegliendo il punto 1 per l'equilibrio alla rotazione si ottiene:

$$\begin{cases} H_1 = 0 \\ V_1 + V_2 - F = 0 \\ -Fa + V_2L = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} H_1 = 0 \\ V_1 = Fb/L \\ V_2 = Fa/L \end{cases}$$

I valori precedenti rappresentano la soluzione (unica) delle componenti di reazione vincolare che garantiscono l'equilibrio della struttura soggetta alla forza verticale indicata.

Si può notare che:

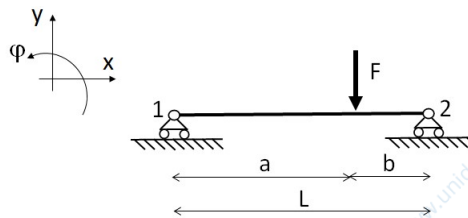
- 1) La discussione algebrica del sistema permette di dire che esiste una soluzione (unica) per ogni sistema di forze si consideri. In altri termini, la struttura è in equilibrio per qualsiasi sistema di forze;
- 2) Le componenti di reazione vincolare sono ottenute facendo ricorso a sole equazioni di equilibrio; tale condizione si riassume dicendo che la struttura è staticamente determinata.

Una struttura che risponde alle condizioni 1 (in equilibrio rispetto a qualsiasi sistema di forze) e 2 (staticamente determinata) si dice isostatica.

Richiamando i risultati dell'analisi cinematica svolta nell'esercizio 1, si noti che la condizione di isostaticità corrisponde al fatto che la struttura è fissa, con un numero di c.d.v. pari ai g.d.l. del sistema.

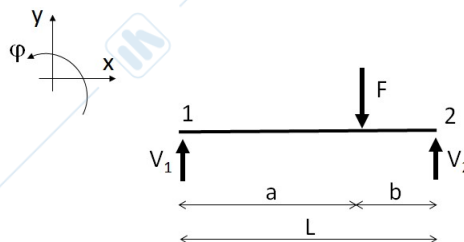
## 7. ANALISI STATICA: STRUTTURA LABILE

Sviluppare l'analisi statica della seguente struttura.



La struttura corrisponde nella disposizione dei vincoli a quella studiata dal punto di vista cinematico nell'esercizio 2.

Nell'analisi statica si assumono come incognite le componenti di reazione vincolare ( $V_1, V_2$ ). Procedendo come nell'esercizio 6, a partire dalla struttura effettiva si ricava il sistema di corpo libero, eliminando idealmente le componenti cinematiche dei vincoli e sostituendole con le corrispondenti componenti statiche.



Si scrive il sistema delle equazioni di equilibrio alla traslazione in direzione  $x$ ,  $y$  e di equilibrio alla rotazione attorno ad un punto arbitrario, scelto nuovamente nel punto 1:

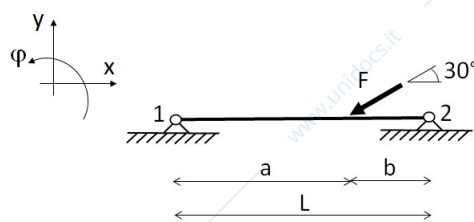
$$\begin{cases} V_1 + V_2 - F = 0 \\ -Fa + V_2L = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} V_1 = Fb/L \\ V_2 = Fa/L \end{cases}$$

Si è trovata una soluzione di equilibrio, facendo ricorso a sole condizioni di equilibrio. La struttura è quindi staticamente determinata. L'equilibrio, però, non è garantito per qualsiasi sistema di forze. Infatti, l'equilibrio statico non sarebbe garantito applicando una forza esterna in direzione x. Ciò dipende dal fatto che il numero di c.d.v. è inferiore ai g.d.l. della struttura. La struttura è detta ipostatica.

La condizione di ipostaticità si può legare ai risultati della discussione cinematica fatta nell'esercizio 2, dove si è determinato che la struttura è labile.

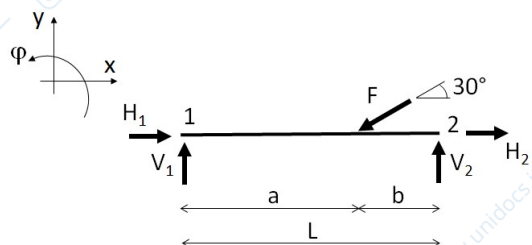
## 8. ANALISI STATICA: STRUTTURA IPERSTATICA

Sviluppare l'analisi statica della seguente struttura.



Preliminarmente, si osserva che la struttura ha 4 c.d.v., maggiori dei g.d.l. del sistema, che sono 3. Ciò basta a dire che la struttura non è, in generale, staticamente determinata.

Nell'analisi statica si assumono come incognite le componenti delle reazioni vincolari  $(H_1, V_1, H_2, V_2)$ . Il sistema di corpo libero è rappresentato nella figura sottostante:



Si scrive il sistema delle equazioni di equilibrio alla traslazione in direzione x, y e di equilibrio alla rotazione attorno al punto 1:

$$\begin{cases} H_1 + H_2 - F\sqrt{3}/2 = 0 \\ V_1 + V_2 - F/2 = 0 \\ -aF/2 + V_2L = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} H_1 + H_2 = F\sqrt{3}/2 \\ V_1 = Fb/2L \\ V_2 = Fa/2L \end{cases}$$

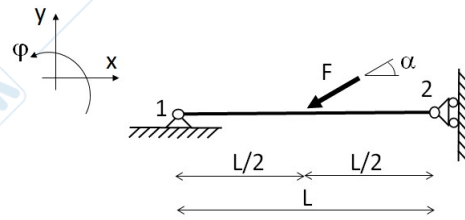
Si nota che esiste sempre una condizione di equilibrio e che, anzi, ve ne sono  $\infty^1$ : si può infatti assegnare un valore arbitrario ad una delle componenti  $H_1$  e  $H_2$ . Ciò dipende dalla sovrabbondanza dei vincoli. La struttura non è staticamente determinata perché il valore delle componenti di reazione vincolare non si può calcolare facendo uso delle sole equazioni di equilibrio. La struttura è detta iperstatica.

Il fatto che esista sempre una condizione di equilibrio corrisponde al risultato dell'analisi cinematica della struttura, che dimostrerebbe che la struttura è fissa.

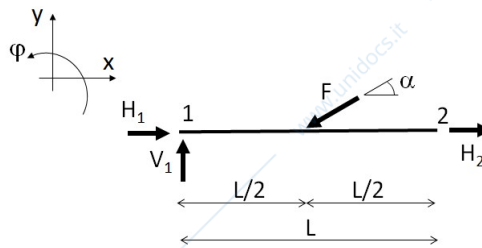
Se non vi fossero componenti di forza in direzione x non sussisterebbe l'indeterminazione delle componenti orizzontali delle reazioni vincolari. Ciò sarebbe comunque legato ad una condizione specifica delle forze esterne applicate.

**9. ANALISI STATICA: STRUTTURA LABILE E IPERSTATICA**

Sviluppare l'analisi statica della seguente struttura per valori dell'angolo  $\alpha$  pari a 0 e  $\pi/2$ , rispettivamente.



Si assumono come incognite le componenti delle reazioni vincolari  $(H_1, V_1, H_2)$ . Il sistema di corpo libero è rappresentato nella figura sottostante:



Si scrive il sistema delle equazioni di equilibrio alla traslazione in direzione x, y e di equilibrio alla rotazione attorno al punto 1:

$$\begin{cases} H_1 + H_2 - F\cos\varphi = 0 \\ V_1 - F\sin\varphi = 0 \\ -F\sin\varphi \cdot L/2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} H_1 + H_2 = F\cos\varphi \\ V_1 = F\sin\varphi \\ F\sin\varphi \cdot L/2 = 0 \end{cases}$$

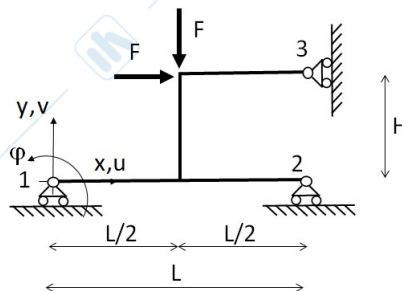
Posto che sia  $F \neq 0$ , l'equilibrio della struttura può sussistere solo per  $\varphi = 0$ . Si nota, inoltre, come la struttura sia iperstatica, poiché non è determinabile con le sole equazioni di equilibrio il valore delle componenti  $H_1$  e  $H_2$ . Il risultato può legarsi all'analisi cinematica fatta nell'esercizio 3. Pur essendo verificata la condizione di uguaglianza tra g.d.l. e c.d.v., la particolare configurazione dei vincoli determina, contemporaneamente, l'introduzione di 1 grado di labilità e di 1 grado di iperstaticità. Si confronti il risultato ottenuto con quello riportato negli esercizi 6 e 1.

**10. ANALISI STATICA: STRUTTURA ISOSTATICA**

Sviluppare l'analisi cinematica e statica della seguente struttura.

Coordinate dei vincoli:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases} \begin{cases} x_2 = L \\ y_2 = 0 \end{cases} \begin{cases} x_3 = L \\ y_3 = H \end{cases}$$



La struttura ha 3 g.d.l. e 3 c.d.v. applicate. Il numero dei vincoli è quindi strettamente necessario a bloccare ogni moto rigido della struttura nel piano.

Si assumono come incognite del problema cinematico le componenti di spostamento  $(u_1, v_1, \varphi)$ . Sulla base delle prestazioni cinematiche dei vincoli si scrive il sistema dato dalle equazioni di vincolo:

$$\begin{cases} v_1 = 0 \\ v_2 = 0 \\ u_3 = 0 \end{cases}$$

Si esprimono le componenti di spostamento  $v_2$  e  $u_3$  in funzione delle incognite cinematiche assunte:

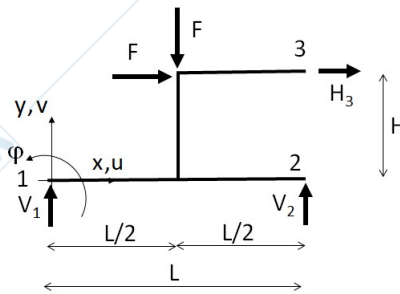
$$v_2 = v_1 + \varphi(L-0) = v_1 + \varphi L$$

$$u_3 = u_1 - \varphi(H-0) = u_1 - \varphi H$$

Il sistema di partenza viene pertanto riscritto come:

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ v_1 + \varphi L = 0 \\ u_1 - \varphi H = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_1 = 0 \\ v_1 = 0 \\ \varphi = 0 \end{cases}$$

Il sistema ammette la sola soluzione nulla, conseguentemente la struttura è fissa. Considerando che il numero di c.d.v. è uguale al numero dei g.d.l., si può dire che la struttura sarà anche isostatica. Ci si deve quindi aspettare di trovare la soluzione (unica) di equilibrio statico utilizzando le sole equazioni di equilibrio. Il sistema di corpo libero è rappresentato nella seguente figura:



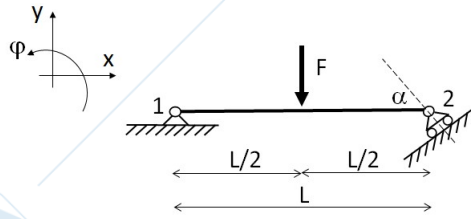
dove le componenti delle reazioni vincolari  $(V_1, V_2, H_3)$  costituiscono le incognite del problema statico. Si considerano le equazioni di equilibrio alla traslazione in direzione  $x$  e  $y$  e l'equazione di equilibrio alla rotazione attorno al punto di applicazione delle forze esterne attive:

$$\begin{cases} H_3 + F = 0 \\ V_1 + V_2 - F = 0 \\ -V_1 \cdot L/2 + V_2 \cdot L/2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} H_3 = -F \\ V_1 = F/2 \\ V_2 = F/2 \end{cases}$$

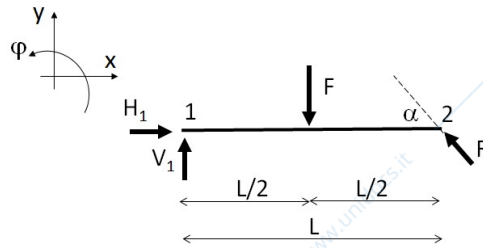
La soluzione precedente rappresenta l'unica soluzione di equilibrio corrispondente alla specifica configurazione di forze esterne attive applicate alla struttura.

## 11. ANALISI STATICA: STRUTTURA ISOSTATICA

Sviluppare l'analisi statica della seguente struttura per valori dell'angolo  $0 < \alpha \leq \pi/2$ .



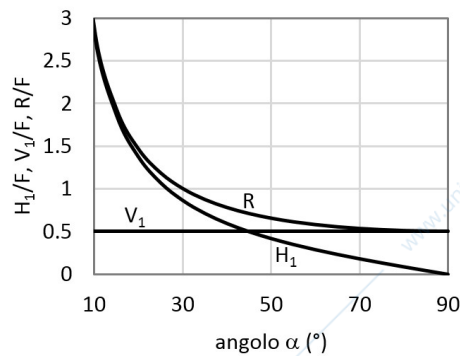
Si assumono come incognite le componenti delle reazioni vincolari ( $H_1, V_1, R$ ) e si considera  $\varphi$  come parametro variabile. Il sistema di corpo libero è rappresentato nella figura sottostante:



Le equazioni di equilibrio alla traslazione orizzontale e verticale e alla rotazione attorno al punto 1, forniscono:

$$\begin{cases} H_1 - R \cos \varphi = 0 \\ V_1 + R \sin \varphi - F = 0 \\ -FL/2 + R \sin \varphi \cdot L = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} H_1 = R \cos \varphi \\ V_1 = F - R \sin \varphi \\ R = F / (2 \sin \varphi) \end{cases}$$

Gli andamenti delle componenti della reazione vincolare sono rappresentati, con valori normalizzati rispetto alla forza esterna attiva  $F$ , nel grafico sottostante. Per facilità di lettura il grafico è limitato all'intervallo  $10^\circ - 90^\circ$ :



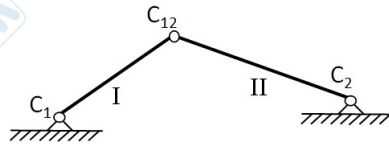
Si osservi che:

- Per  $\varphi = \pi/2$  si ottiene la soluzione già trovata nell'esercizio 6.
- Per angoli diversi da  $\pi/2$  la componente  $H_1$  (componente orizzontale) è diversa da 0, anche in presenza della sola forza esterna attiva verticale.
- Per  $\varphi \rightarrow 0$  le componenti  $H_1, R$  tendono ad un valore  $\infty$ .
- La componente verticale  $V_1$  e la componente verticale di  $R$  sono sempre pari a  $F/2$ .
- Per un angolo  $\alpha$  pari a 0 la struttura non può essere equilibrata, per le condizioni di carico esterno attivo indicate.

**BIOMECCANICA A.A. 2018-19**  
**ANALISI CINEMATICA E STATICA DI STRUTTURE NELLO SPAZIO BIDIMENSIONALE**  
**STRUTTURE A DUE CORPI**

## 1. ANALISI CINEMATICA: STRUTTURA FISSA

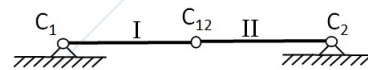
Si proceda con l'analisi cinematica della struttura mediante la determinazione della posizione relativa di centri assoluti e relativi dei corpi, determinando poi la condizione di ipostaticità, isostaticità o iperstaticità della struttura.



Le cerniere esterne costituiscono i centri di rotazione assoluti dei corpi I e II, rispettivamente indicati con  $C_1$  e  $C_2$ . La cerniera interna è il centro di rotazione relativo dei corpi I e II. Poiché in sistemi con due corpi, condizione necessaria e sufficiente perché sia permesso un moto rigido è che risultino allineati sulla medesima retta i punti  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_{12}$ , la struttura risulta fissa. Si noti, inoltre, che le c.d.v. sono pari ai g.d.l.; la struttura risulta quindi isostatica.

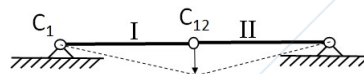
## 2. ANALISI CINEMATICA: STRUTTURA LABILE

Si proceda con l'analisi cinematica della struttura mediante la determinazione della posizione relativa di centri assoluti e relativi dei corpi, determinando poi la condizione di ipostaticità, isostaticità o iperstaticità della struttura.



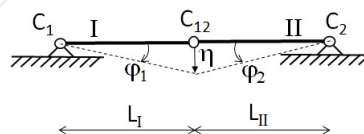
Le cerniere esterne costituiscono i centri di rotazione assoluti dei corpi I e II, rispettivamente, indicati con  $C_1$  e  $C_2$ . La cerniera interna è il centro di rotazione relativo dei corpi I e II. Poiché in sistemi con due corpi condizione necessaria e sufficiente perché sia permesso un moto rigido è che risultino allineati sulla medesima retta i punti  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_{12}$ , la struttura risulta labile. Si noti che pur essendo le c.d.v. pari ai g.d.l., la struttura risulta labile e iperstatica.

È concesso un moto rigido corrispondente ad un abbassamento (o innalzamento), infinitesimo, della cerniera interna, in direzione perpendicolare alla retta congiungente la cerniera interna con le cerniere esterne. Si noti che ogni punto dei due corpi rigidi I e II si sposta perpendicolarmente alla congiungente con il rispettivo centro di rotazione assoluto.



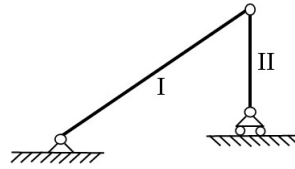
Assegnato lo spostamento della cerniera interna, rimane determinato il moto rigido, poiché le rotazioni rigide dei corpi I e II sono determinabili come:

$$\varphi_1 = \frac{\eta}{L_I}, \quad \varphi_2 = \frac{\eta}{L_{II}}$$

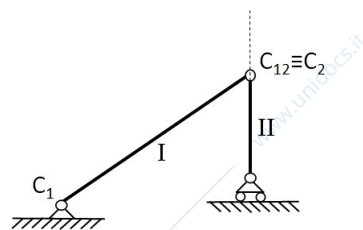


### 3. ANALISI CINEMATICA: STRUTTURA LABILE

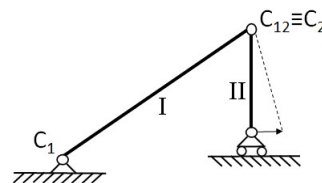
Si proceda con l'analisi cinematica della struttura mediante la determinazione della posizione relativa di centri assoluti e relativi dei corpi, determinando anche la condizione di ipostaticità, isostaticità o iperstaticità della struttura.



Dato che la struttura ha 6 g.d.l. e 5 c.d.v. applicate, la struttura avrà almeno un grado di labilità, risultando ipostatica.



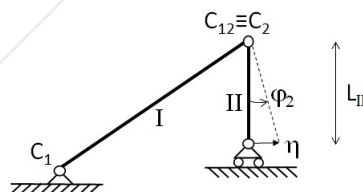
Il centro assoluto  $C_1$  del corpo I coincide con la cerniera esterna. Il centro relativo dei corpi I e II coincide con la cerniera interna. Guardando al vincolo esterno del corpo II, si può dire che il centro assoluto di questo deve appartenere alla retta passante per il carrello e perpendicolare alla sua linea di scorrimento. Perché ci sia possibilità di un moto rigido è necessario che i punti  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_{12}$  siano allineati. Tale condizione si ritrova ipotizzando che i punti  $C_2$  e  $C_{12}$  coincidano. Quest'ultima condizione è sufficiente a determinare la possibilità di un moto rigido.



Il cinematicismo prevede che il carrello si sposti in direzione orizzontale, di una quantità infinitesima, in corrispondenza ad una rotazione del corpo II attorno al punto  $C_2$ . Ogni punto del corpo II si sposta in direzione perpendicolare alla congiungente con il centro  $C_2$ . Si noti che in tale moto rigido infinitesimo il corpo I non si sposta.

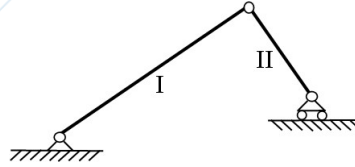
Imposto lo spostamento della cerniera interna, rimane determinato il moto rigido, che prevede una rotazione rigida del corpo II pari a:

$$\varphi_2 = \frac{\eta}{L_{II}}$$



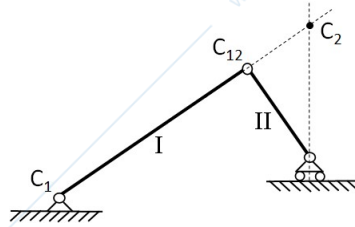
#### 4. ANALISI CINEMATICA: STRUTTURA LABILE

Si proceda con l'analisi cinematica della struttura mediante la determinazione della posizione relativa di centri assoluti e relativi dei corpi, determinando la condizione di ipostaticità, isostaticità o iperstaticità della struttura.



Anche in questo caso la struttura sarà ipostatica, con almeno 1 grado di labilità, dato che ha 6 g.d.l. e 5 c.d.v., similmente al caso precedente.

Il centro assoluto  $C_1$  del corpo I coincide con la cerniera esterna. Il centro relativo dei corpi I e II coincide con la cerniera interna. Il centro assoluto del corpo II deve poi appartenere alla retta passante per il carrello e perpendicolare alla sua linea di scorrimento. Perché ci sia possibilità di un moto rigido è necessario che i punti  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_{12}$  siano allineati. Tale condizione si ritrova ipotizzando che il punto  $C_2$  si trovi all'intersezione delle rette indicate in tratteggio. Quest'ultima condizione è sufficiente a determinare la possibilità di un moto rigido.

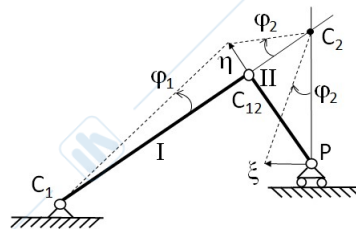


Il cinematicismo prevede che il carrello si sposti in direzione orizzontale, di una quantità infinitesima, in corrispondenza ad una rotazione del corpo II attorno al punto  $C_2$ . Ogni punto del corpo II si sposta in direzione perpendicolare alla propria congiungente con il centro  $C_2$ . Fissato il valore della rotazione rigida del corpo II, rimane determinato il moto rigido della struttura. Ciò significa che la struttura ha 1 grado di labilità. Infatti, nello spostamento rigido del corpo II, assegnata la rotazione si ottiene:

$$\xi = \varphi_2 |PC_2|, \quad \eta = \varphi_2 |C_{12}C_2|$$

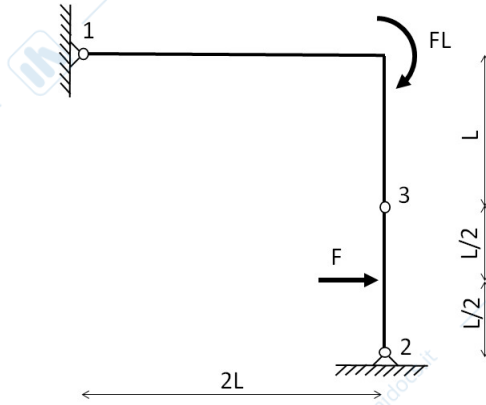
Notando poi che il punto  $C_{12}$  appartiene anche al corpo I, si può dedurre la rotazione rigida di questo attorno al punto  $C_1$ :

$$\varphi_1 = \frac{\eta}{|C_1C_{12}|} = \frac{\varphi_2 |C_{12}C_2|}{|C_1C_{12}|}$$

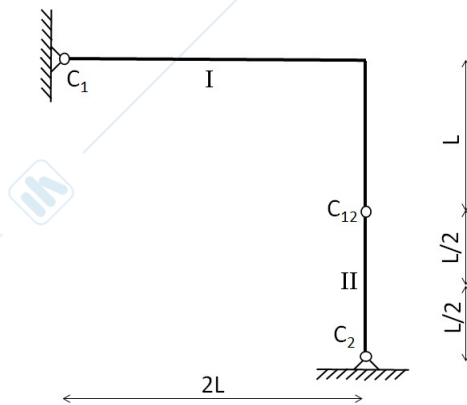


### 5. ANALISI STATICA: STRUTTURA ISOSTATICA

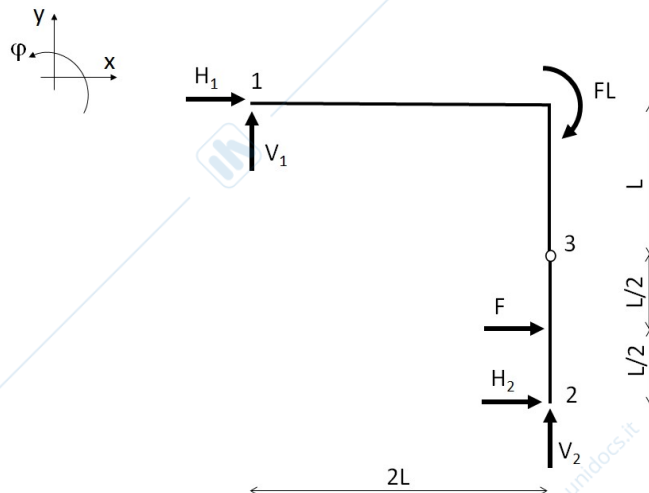
Si proceda con il calcolo delle componenti statiche delle reazioni vincolari della seguente struttura, dopo averne determinato l'effettiva isostaticità.



Considerando vincoli interni ed esterni, la posizione dei centri assoluti e relativi dei due corpi rappresentati nella figura sottostante permette di dire che la struttura è fissa, dato che  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_{12}$  non sono allineati.



Poiché i g.d.l. della struttura sono  $2 \times 3 = 6$  e le c.d.v. sono pari a  $2+2+2 = 6$ , siamo nella condizione per cui la struttura è resa fissa con un numero di vincoli strettamente sufficiente a renderla tale. La struttura è quindi isostatica e ci si deve aspettare di poter calcolare le componenti di reazione vincolare facendo ricorso alle sole equazioni di equilibrio.



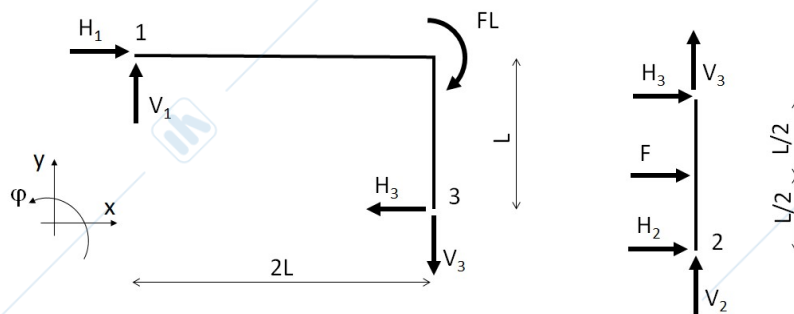
Per risolvere il problema statico consideriamo il sistema di corpo libero dedotto dalla struttura effettiva sostituendo i vincoli nei punti 1 e 2 con le componenti statiche che questi possono esplicare. Si assumono quindi come incognite statiche le componenti  $H_1, V_1, H_2$  e  $V_2$ .

Il sistema delle equazioni di equilibrio deve includere 4 equazioni. Queste sono date dalle condizioni di equilibrio globale per le forze in direzione  $x$  e  $y$  e dall'equilibrio globale dei momenti calcolati rispetto al punto 1. La quarta equazione è ottenuta imponendo che sia nullo il momento risultante del corpo II, soggetto alle forze esterne che lo interessano, rispetto alla cerniera interna del punto 3. Quest'ultimo tipo di equazione è detta 'equazione ausiliaria di equilibrio'. Il suo uso si fonda sul fatto che se una struttura è in equilibrio deve essere in equilibrio anche ogni sottostruttura che la componga, sotto l'azione delle forze esterne applicate.

$$\begin{cases} H_1 + H_2 + F = 0 \\ V_1 + V_2 = 0 \\ -FL + F\frac{3}{2}L + H_2 2L + V_2 2L = 0 \\ F\frac{L}{2} + H_2 L = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} H_1 = -F/2 \\ V_1 = -F/4 \\ H_2 = -F/2 \\ V_2 = F/4 \end{cases}$$

Si noti come, in virtù della sua applicazione nel punto di mezzo del corpo II, la forza orizzontale  $F$  insiste per metà sulla cerniera 3 e per metà viene riportata dalla struttura superiore nella cerniera 1.

In forma alternativa, si può procedere sostituendo anche la cerniera interna con le componenti statiche che si esplicano attraverso questa. Si ottiene il seguente schema di corpi liberi, dove la disposizione delle azioni vincolari interne nel punto 3 tiene conto del necessario equilibrio del punto.



Si noti come in questo vi siano 6 incognite statiche: le componenti  $H_1, V_1, H_2, V_2, H_3$  e  $V_3$ . Avendo due corpi è possibile scrivere 6 equazioni di equilibrio (3 per corpo) e dedurre in tal modo il valore delle componenti di reazione vincolare. L'equazione di equilibrio ai momenti del corpo I è scritta con riferimento al punto 1, quella di equilibrio ai momenti del corpo II è scritta con riferimento al punto 3. Le equazioni di equilibrio delle forze in direzione orizzontale e verticale dei due corpi completano il sistema delle equazioni di equilibrio:

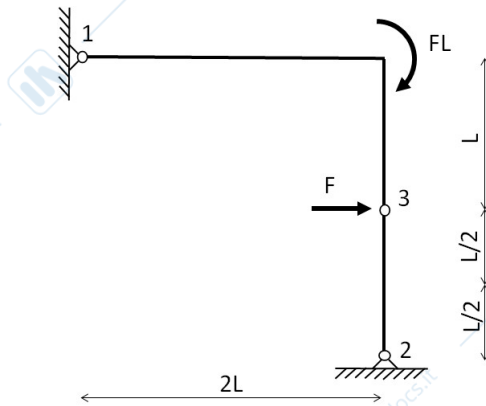
$$\begin{cases} H_1 - H_3 = 0 \\ V_1 - V_3 = 0 \\ -FL - H_3 L - V_3 2L = 0 \end{cases} \rightarrow \text{eq.i corpo I} \quad \begin{cases} H_1 = -F/2 \\ V_1 = -F/4 \\ H_2 = -F/2 \\ V_2 = F/4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_2 + H_3 + F = 0 \\ V_2 + V_3 = 0 \\ F\frac{L}{2} + H_2 L = 0 \end{cases} \rightarrow \text{eq.i corpo II} \quad \begin{cases} H_3 = -F/2 \\ V_3 = -F/4 \end{cases}$$

Si osservi come le componenti vincolari relative ai nodi 1 e 2 sono ovviamente coincidenti con quelle ricavate attraverso lo svolgimento precedente. In questo caso sono direttamente determinate anche le componenti di reazione della cerniera interna. Per altro, a partire dai valori delle componenti  $H_1, V_1, H_2$  e  $V_2$  (risultato dello svolgimento precedente) sarebbe possibile ottenere  $H_3$  e  $V_3$ .

## 6. ANALISI STATICA: STRUTTURA ISOSTATICA

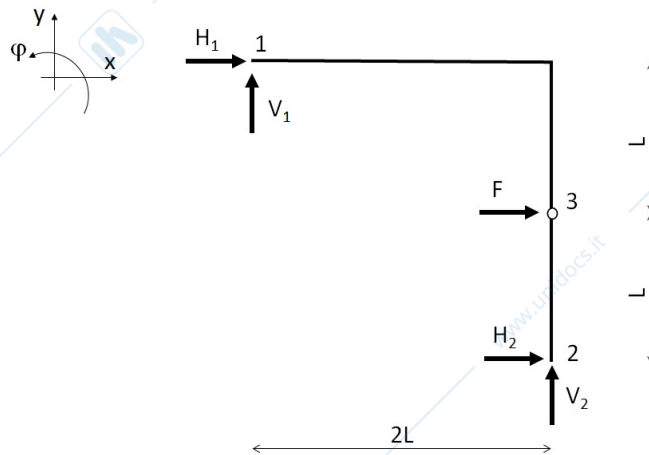
Si calcolino le componenti di reazione vincolare per la struttura precedente, soggetta alla condizione di carico indicata nella seguente figura.



In questo esempio si mostrerà come sia possibile, in generale, calcolare le componenti relative ai singoli carichi, per poi sommare gli effetti trovando la soluzione complessiva.

Carico 1:

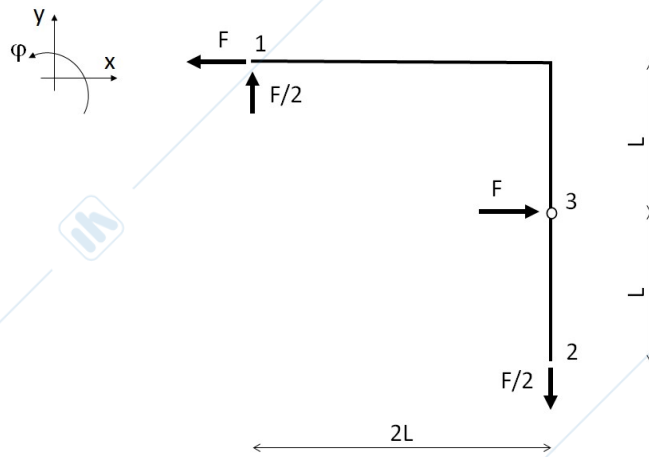
Si considera il sistema di corpo libero soggetto alla sola forza orizzontale.



Le equazioni di equilibrio globali e l'equazione ausiliaria di equilibrio del corpo II porgono il seguente sistema. L'equilibrio globale ai momenti è fatto rispetto al punto 1. L'equazione ausiliaria di equilibrio corrisponde all'equilibrio dei momenti rispetto alla cerniera interna nel punto 3.

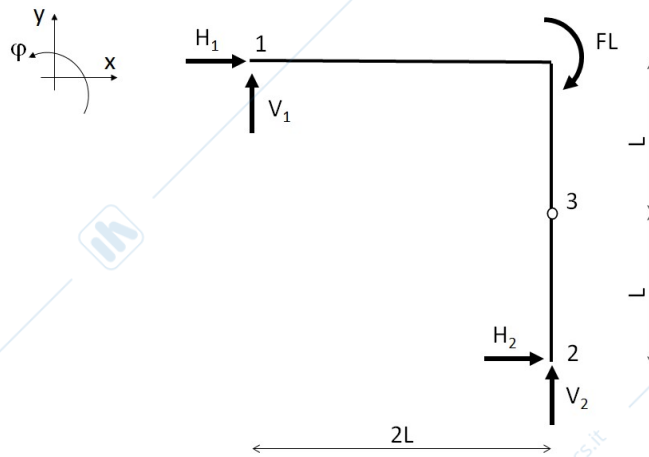
$$\begin{cases} H_1 + H_2 + F = 0 \\ V_1 + V_2 = 0 \\ FL + H_2 2L + V_2 2L = 0 \\ H_2 L = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} H_1 = -F \\ V_1 = F/2 \\ V_2 = -F/2 \\ H_2 = 0 \end{cases}$$

La struttura soggetta all'azione della forza orizzontale  $F$  e delle componenti di reazione vincolare che fanno equilibrio a questa è rappresentata nella figura seguente. Le componenti di reazione vincolare sono disegnate con l'effettivo verso. Si noti come la forza applicata nella cerniera interna 3 eserciti il suo effetto completamente sulla sottostruttura I.

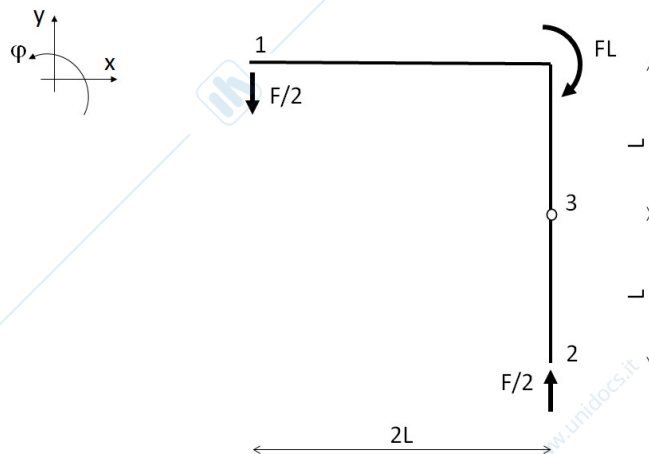


Carico 2:

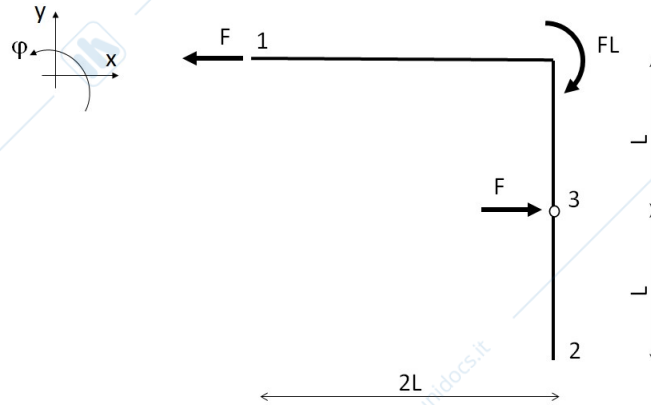
Procedendo in modo similare per la struttura soggetta al solo momento esterno FL si ricava:



$$\begin{cases} H_1 + H_2 = 0 \\ V_1 + V_2 = 0 \\ -FL + H_2 2L + V_2 2L = 0 \\ H_2 L = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} H_1 = 0 \\ V_1 = -F/2 \\ V_2 = F/2 \\ H_2 = 0 \end{cases}$$

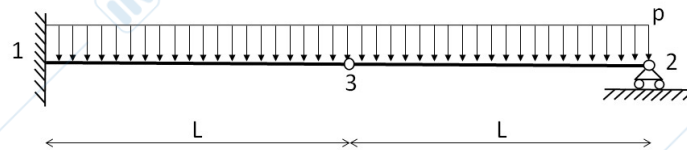


Il valore delle componenti di reazione vincolare corrispondenti alla condizione di carico definita dalla forza  $F$  e dal momento  $FL$  si ottiene dalla somma delle due soluzioni precedenti. Graficamente, la soluzione è rappresentata nella figura seguente.



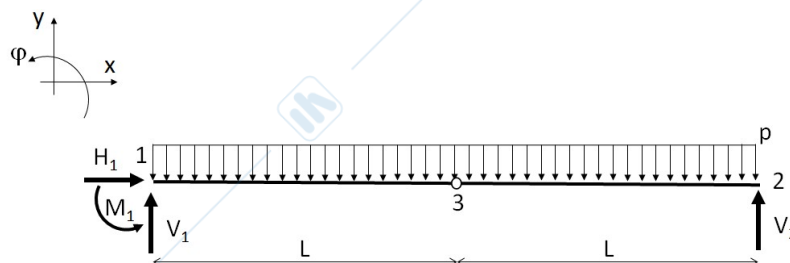
### 7. ANALISI STATICA: STRUTTURA ISOSTATICA

Si calcolino le componenti di reazione vincolare per la struttura indicata in figura, soggetta al carico per un'unità di lunghezza uniformemente distribuito  $p$ .



La struttura è fissa. La porzione di sinistra risulta infatti impedita in ogni componente di spostamento dall'incastro agente nel punto 1. Considerata, di conseguenza, la fissità della cerniera nel punto 3, la parte destra della struttura è già stata studiata in precedenza, ottenendo che anch'essa è fissa. Poiché i g.d.l. della struttura sono  $2 \times 3 = 6$  e le c.d.v. sono pari a  $3 + 2 + 1 = 6$ , la struttura è isostatica.

Il sistema principale adottato è indicato nella figura seguente:



Valutando il carico agente nella sua complessità, si scrivono le equazioni di equilibrio globale e l'equazione ausiliaria di equilibrio del corpo di destra rispetto alla cerniera in 1. L'equazione di equilibrio globale ai momenti è valutata rispetto al punto 1.

$$\begin{cases} H_1 = 0 \\ V_1 + V_2 - p \cdot 2L = 0 \\ M_1 - p \cdot 2L \cdot L + V_2 \cdot 2L = 0 \\ V_2 \cdot L - p \cdot L \cdot L/2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} H_1 = 0 \\ V_1 = 3pL/2 \\ M_1 = pL^2 \\ V_2 = pL/2 \end{cases}$$

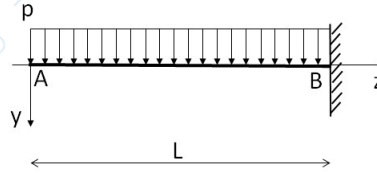
Si osservi che:

- le equazioni di equilibrio globali si possono ottenere considerando la risultante dell'intero carico distribuito agente nel punto di mezzeria del tratto 1-2;
- l'equazione ausiliaria si ottiene considerando la risultante del solo carico distribuito agente nel tratto 2-3, applicato nel punto di mezzeria del tratto 2-3;
- non si può ridurre il carico distribuito nel tratto 1-2 alla sola risultante nella cerniera 3 e non tenere conto dei suoi effetti sul tratto 2-3 nell'equazione ausiliaria di equilibrio.

**BIOMECCANICA A.A. 2018-19**  
**CALCOLO DELLE SOLLECITAZIONI NEI SISTEMI DI TRAVI BIDIMENSIONALI ISOSTATICI**

## 1. CALCOLO DELLE SOLLECITAZIONI CON METODO DI INTEGRAZIONE DELLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Determinare le componenti di sollecitazione  $N$ ,  $T$ ,  $M$  per la mensola indicata in figura, soggetta ad un carico uniformemente distribuito e agente perpendicolarmente all'asse della trave.



Dato il sistema di riferimento indicato in figura, con origine nel punto A, si provvede ad integrare l'equazione differenziale che esprime l'equilibrio dei momenti agenti su un concio di trave di lunghezza infinitesima  $dz$ :

$$\frac{d^2M(z)}{dz^2} = -p$$

Integrando due volte si ottengono gli andamenti della sollecitazione tagliante  $T(z)$  e del momento flettente  $M(z)$ , a meno delle costanti di integrazione.

$$\frac{dM(z)}{dz} = T(z) = -p \cdot z + C_1$$

$$M(z) = -p \cdot \frac{1}{2} z^2 + C_1 \cdot z + C_2$$

Osservando che nella sezione d'estremità libera A non sono applicate forze o momenti concentrati, le sollecitazioni  $T$  e  $M$  devono risultare nulle. Si può quindi scrivere:

$$\begin{cases} T(0) = -p \cdot 0 + C_1 = 0 \\ M(0) = -p \cdot \frac{1}{2} 0^2 + C_1 \cdot 0 + C_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 0 \end{cases}$$

Si sono così determinati i valori delle costanti di integrazione sulla base delle condizioni al contorno. Considerando poi che non vi sono forze di alcun genere nella direzione dell'asse della trave, dall'equazione differenziale

$$\frac{dN(z)}{dz} = 0$$

si deduce facilmente che il valore della sollecitazione assiale è costante e pari a 0 in ogni punto della trave. Le equazioni che forniscono le componenti di sollecitazione  $N$ ,  $T$ ,  $M$  in funzione della coordinata dell'asse della trave  $z$  sono pertanto:

$$N(z) = 0$$

$$T(z) = -p \cdot z$$

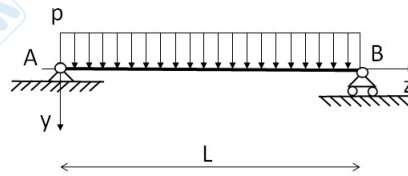
$$M(z) = -p \cdot \frac{1}{2} z^2$$

I diagrammi delle componenti di sollecitazione sono rappresentati nella seguente figura:



## 2. CALCOLO DELLE SOLLECITAZIONI CON METODO DI INTEGRAZIONE DELLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Determinare le componenti di sollecitazione N, T, M per la trave indicata in figura, vincolata agli estremi con cerniera e appoggio e soggetta ad un carico uniformemente distribuito agente in direzione perpendicolare all'asse della trave.



Anche in questo caso, non essendoci forze esterne nella direzione dell'asse della trave, l'integrazione dell'equazione differenziale

$$\frac{dN(z)}{dz} = 0$$

fornisce un valore nullo della sollecitazione assiale in ogni sezione della struttura. L'integrazione doppia dell'equazione differenziale

$$\frac{d^2M(z)}{dz^2} = -p$$

consente di ricavare:

$$\frac{dM(z)}{dz} = T(z) = -p \cdot z + C_1$$

$$M(z) = -p \cdot \frac{1}{2} z^2 + C_1 \cdot z + C_2$$

Le costanti di integrazione si possono ottenere osservando che nelle sezioni della trave in corrispondenza delle cerniere deve risultare nullo il momento flettente:

$$\begin{cases} M(0) = -p \cdot \frac{1}{2} 0^2 + C_1 \cdot 0 + C_2 = 0 \\ M(L) = -p \cdot \frac{1}{2} L^2 + C_1 \cdot L + C_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{pL}{2} \\ C_2 = 0 \end{cases}$$

Gli andamenti del taglio e del momento flettente sono quindi dati da:

$$T(z) = -p \cdot z + \frac{pL}{2}$$

$$M(z) = -p \cdot \frac{1}{2} z^2 + \frac{pL}{2} \cdot z$$

Si osserva che la funzione del taglio ammette uno zero nel punto di mezzera:

$$T(\bar{z}) = -p \cdot \bar{z} + \frac{pL}{2} = 0 \rightarrow \bar{z} = \frac{L}{2}$$

In tale punto la funzione del momento flettente ha il suo massimo, che vale:

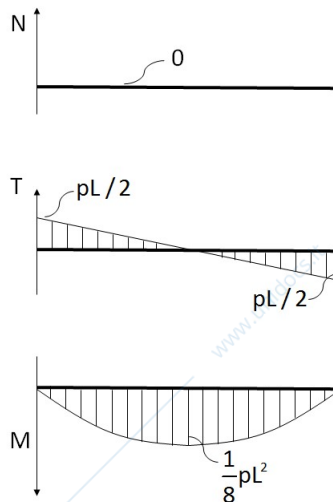
$$M\left(\frac{L}{2}\right) = -p \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{L}{2}\right)^2 + \frac{pL}{2} \cdot \left(\frac{L}{2}\right) = -p \cdot \frac{L^2}{8} + p \cdot \frac{L^2}{4} = \frac{pL^2}{8}$$

La pendenza della funzione di momento nelle sezioni A e B risulta pari a:

$$T(0) = -p \cdot 0 + \frac{pL}{2} = \frac{pL}{2}$$

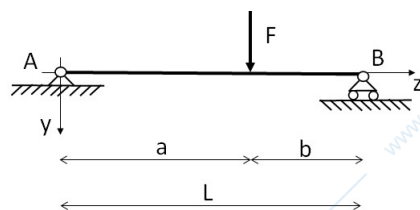
$$T(L) = -p \cdot L + \frac{pL}{2} = -\frac{pL}{2}$$

I diagrammi delle sollecitazioni sono riportati nella figura seguente.

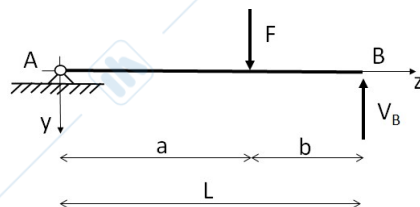


### 3. CALCOLO DELLE SOLLECITAZIONI CON METODO DIRETTO

Determinare le componenti di sollecitazione N, T, M per la trave indicata in figura, vincolata agli estremi con cerniera e appoggio e soggetta ad una forza concentrata in una sezione generica intermedia.

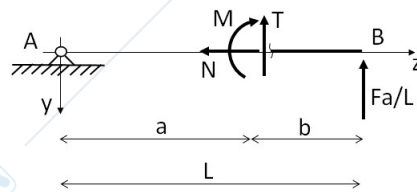


Sostituito il vincolo del punto B con la componente statica esplicita  $V_B$ , si determina quest'ultima considerando l'equazione di equilibrio dei momenti rispetto al punto A:



$$V_B \cdot L - F \cdot a = 0 \rightarrow V_B = \frac{Fa}{L}$$

Si provvede poi ad isolare in forma ideale la porzione di destra della struttura con una sezione generica di ascissa  $a < z < L$ . Nella sezione individuata si considerano le componenti di sollecitazione con il loro verso positivo sulla base della usuale convenzione dei segni e del sistema di riferimento considerato.



Si considerano poi le condizioni di equilibrio delle forze in direzione  $z$ ,  $y$  e dei momenti rispetto alla sezione  $z$ :

$$N(z) = 0$$

$$T(z) + \frac{Fa}{L} = 0$$

$$M(z) - \frac{Fa}{L} \cdot (L - z) = 0$$

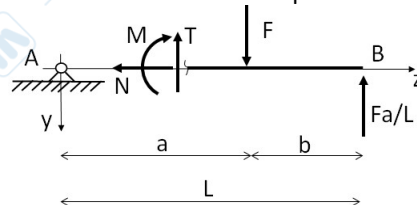
ricavando l'andamento delle componenti di sollecitazione in funzione di  $z$ :

$$N(z) = 0$$

$$T(z) = -\frac{Fa}{L}$$

$$M(z) = \frac{Fa}{L} \cdot (L - z)$$

Analogamente, si considera l'equilibrio della parte di destra della struttura per una sezione generica  $0 < z < a$ , ottenendo l'andamento delle componenti di sollecitazione in questo secondo tratto:



$$N(z) = 0$$

$$T(z) - F + \frac{Fa}{L} = 0$$

$$M(z) + F \cdot (a - z) - \frac{Fa}{L} \cdot (L - z) = 0$$

Dalle precedenti relazioni si ottiene

$$N(z) = 0$$

$$T(z) = \frac{Fb}{L}$$

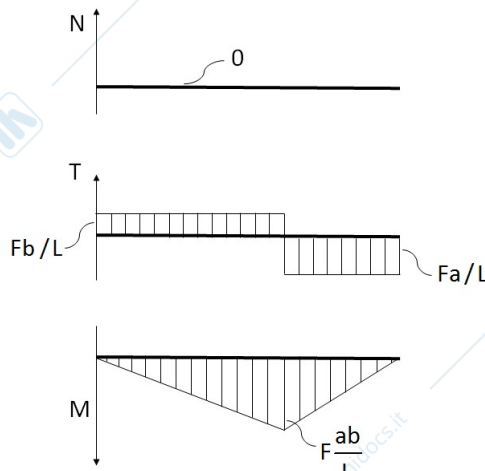
$$M(z) = \frac{Fbz}{L}$$

Si noti che nel punto di applicazione della forza  $F$  il momento flettente è pari a

$$M(a) = \frac{Fab}{L}$$

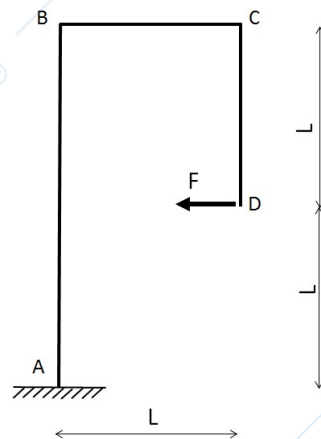
Questo valore si ottiene considerando in modo del tutto equivalente le due equazioni ricavate per il momento flettente, dato che la funzione è continua nel punto considerato. La funzione che descrive l'andamento della sollecitazione tagliante presenta invece, nel medesimo punto, una discontinuità pari a  $F$ . In forma coerente, la

funzione del momento flettente presenta nell'ascissa  $z = a$  un punto angoloso. I diagrammi di sollecitazione sono riportati nella figura seguente.

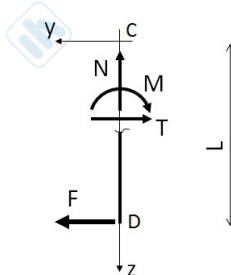


#### 4. CALCOLO DELLE SOLLECITAZIONI CON METODO DIRETTO

Determinare le componenti di sollecitazione N, T, M per la struttura indicata in figura.



Si considera una sezione intermedia nel tratto C-D e si impone l'equilibrio della porzione inferiore di struttura soggetta alle forze esterne e alle componenti di sollecitazione. Si utilizza il sistema di riferimento locale indicato in figura, rispetto al quale i versi delle componenti di sollecitazione indicate sono convenzionalmente positivi.



Per  $0 < z < L$  si ottiene:

$$N(z) = 0$$

$$T(z) - F = 0$$

$$M(z) + F \cdot (L - z) = 0$$

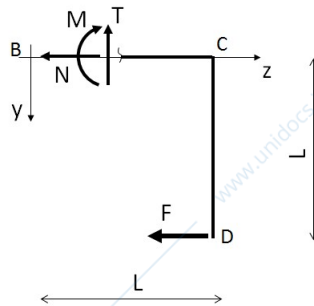
ricavando l'andamento delle componenti di sollecitazione:

$$N(z) = 0$$

$$T(z) = F$$

$$M(z) = F(z - L)$$

Per il calcolo delle componenti di sollecitazione nel tratto B-C si procede con metodo analogo, considerando però il sistema di riferimento locale indicato nella figura seguente:



Le equazioni di equilibrio della porzione di struttura compresa tra la sezione generica  $z$  e il punto D risultano essere:

$$N(z) + F = 0$$

$$T(z) = 0$$

$$M(z) + F \cdot L = 0$$

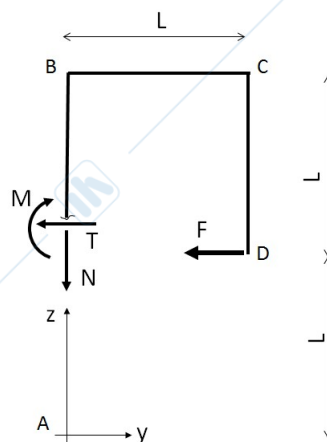
da cui si ricava

$$N(z) = -F$$

$$T(z) = 0$$

$$M(z) = -FL$$

Si procede, infine, considerando una sezione intermedia nel tratto A-B e l'equilibrio della porzione di struttura compresa tra questa e la sezione D.



Le equazioni di equilibrio sono date da

$$N(z) = 0$$

$$T(z) + F = 0$$

$$M(z) + F \cdot (z - L) = 0$$

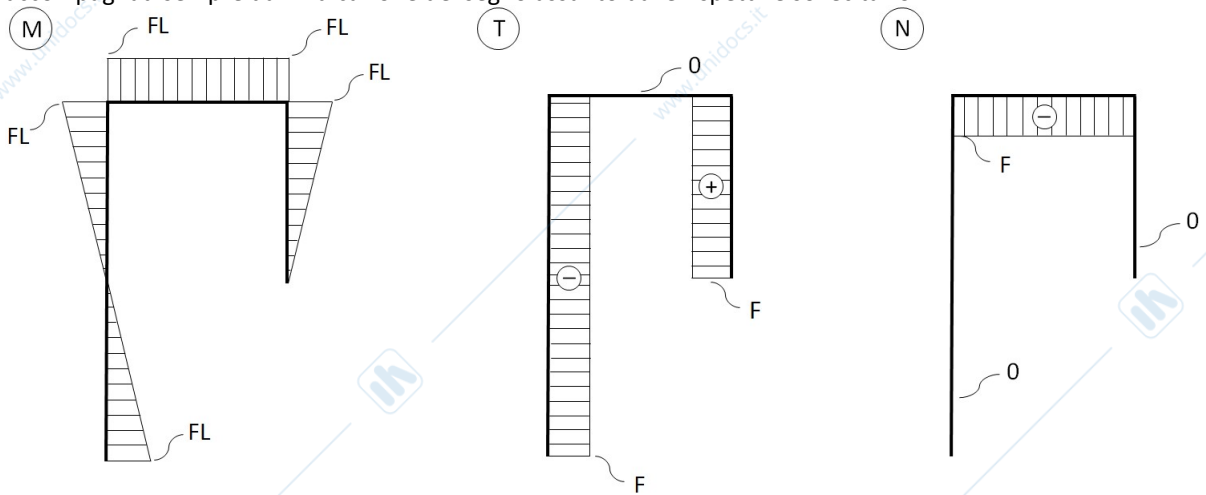
da cui si ricava

$$N(z) = 0$$

$$T(z) = -F$$

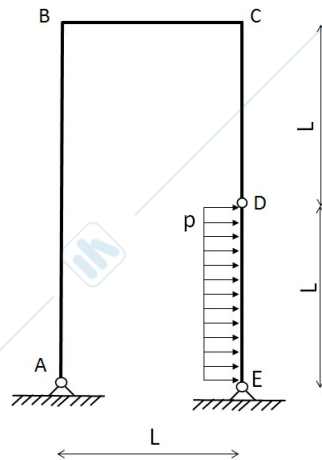
$$M(z) = F(L - z)$$

È così possibile disegnare i diagrammi di sollecitazione, riportati nella figura seguente. Si noti come i diagrammi sono riportati con riferimento agli assi della struttura. Il diagramma di momento flettente non necessita dell'indicazione del segno, ma deve essere comunque riportato dal lato corretto, rispetto al sistema di riferimento locale utilizzato. I diagrammi di sollecitazione tagliante e di sollecitazione assiale devono essere accompagnati sempre dall'indicazione del segno assunto dalle rispettive sollecitazioni.

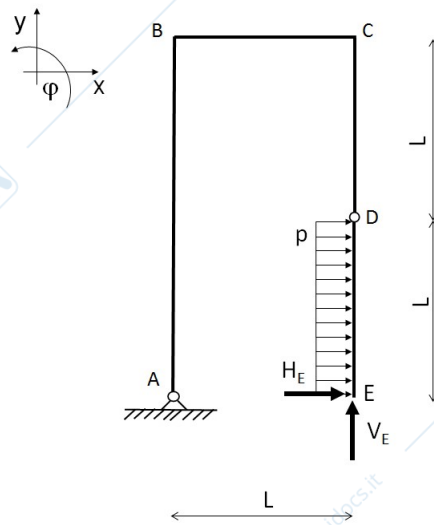


### 5. CALCOLO DELLE SOLLECITAZIONI CON METODO DIRETTO

Determinare le componenti di sollecitazione N, T, M per la struttura indicata in figura.



Per la determinazione dell'andamento delle sollecitazioni M, T nel tratto D-E si possono utilizzare i risultati ottenuti nello svolgimento dell'esercizio 2, essendo i regimi flessionale e tagliante dei due casi identici. Eliminando il vincolo in E e introducendo le componenti statiche, queste si possono determinare con due equazioni di equilibrio di momento rispetto ai punti D e A, rispettivamente:



$$pL \cdot \frac{L}{2} + H_E \cdot L = 0$$

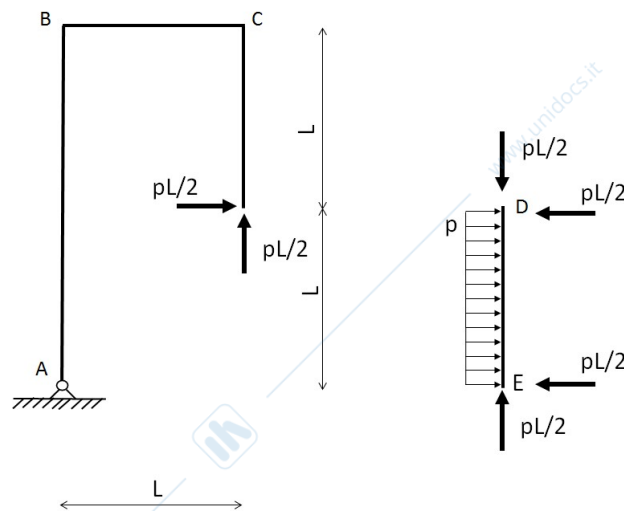
$$-pL \cdot \frac{L}{2} + V_E \cdot L = 0$$

da cui si ricava:

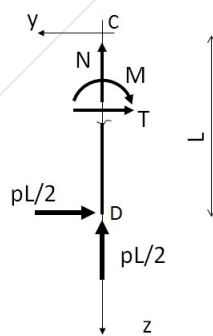
$$H_E = -\frac{pL}{2}$$

$$V_E = \frac{pL}{2}$$

Considerando le mutue reazioni scambiate attraverso la cerniera interna D, le condizioni di equilibrio per la sottostruttura D-E consentono di determinare le azioni che questa esercita sulla rimanente parte di struttura.



Il metodo diretto di calcolo delle componenti M, T, N sul tratto C-D si ottiene considerando la seguente sottostruttura, dalla quale si ricava:



$$N(z) + \frac{pL}{2} = 0$$

$$T(z) + \frac{pL}{2} = 0$$

$$M(z) - \frac{pL}{2} \cdot (L - z) = 0$$

ottenendo, di conseguenza:

$$N(z) = -\frac{pL}{2}$$

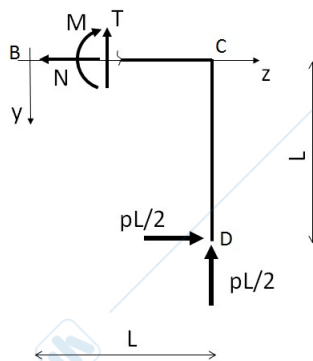
$$T(z) = -\frac{pL}{2}$$

$$M(z) = \frac{pL}{2} \cdot (L - z)$$

In particolare, in corrispondenza della sezione adiacente a C il momento flettente è pari a:

$$M(0) = \frac{pL^2}{2}$$

In modo del tutto simile si ottiene l'andamento delle sollecitazioni nel tratto B-C, considerando l'equilibrio della sottostruttura indicata nella figura seguente.



Le relazioni di equilibrio, in questo caso, risultano:

$$N(z) - \frac{pL}{2} = 0$$

$$T(z) + \frac{pL}{2} = 0$$

$$M(z) - \frac{pL}{2} \cdot L - \frac{pL}{2} \cdot (L - z) = 0$$

ricavando le seguenti relazioni

$$N(z) = \frac{pL}{2}$$

$$T(z) = -\frac{pL}{2}$$

$$M(z) = \frac{pL}{2} \cdot L + \frac{pL}{2} \cdot (L-z) = 0$$

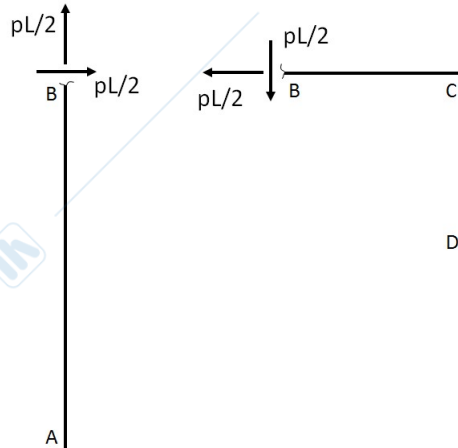
Il momento in corrispondenza della sezione adiacente al punto B è pari a:

$$M(0) = pL^2$$

Il diagramma di momento nel tratto A-B si può ricostruire immediatamente partendo da quest'ultimo valore, notando che esso deve avere andamento lineare e valore nullo nella sezione adiacente alla cerniera in A. Considerando che l'andamento conseguente è decrescente, il valore del taglio sarà pari a:

$$T(z) = -\frac{pL^2}{2L} = -\frac{pL}{2}$$

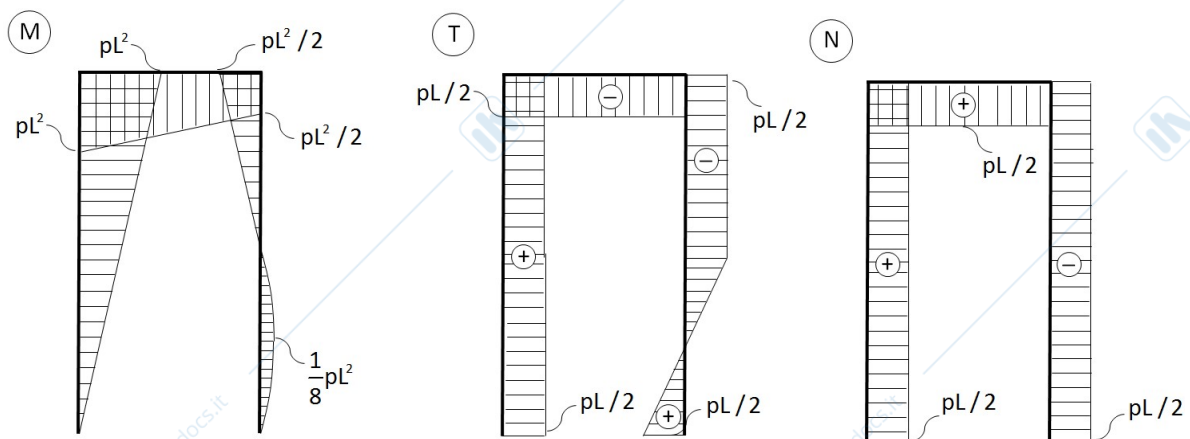
Il valore dello sforzo normale si può dedurre da quello del taglio agente nel tratto B-C in corrispondenza della sezione adiacente a B, secondo lo schema logico che considera l'equilibrio nel punto B:



Si nota come lo sforzo assiale agente sul tratto A-B è costante e pari a:

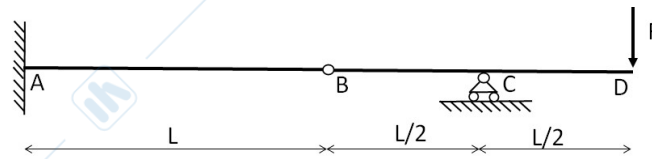
$$N(z) = \frac{pL}{2}$$

I risultati ottenuti con tali ragionamenti sono ovviamente coerenti con quelli deducibili dal metodo di calcolo diretto. I diagrammi di sollecitazione sono riportati di seguito:

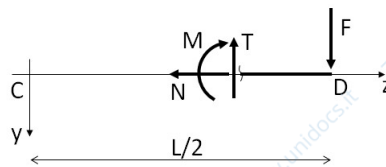


## 6. CALCOLO DELLE SOLLECITAZIONI CON METODO DIRETTO

Determinare le componenti di sollecitazione N, T, M per la struttura indicata in figura.



Considerata una sezione intermedia del tratto C-D l'equilibrio della sottostruttura rappresentata nella figura seguente consente di ricavare l'andamento delle componenti di sollecitazione:



$$N(z) = 0$$

$$T(z) - F = 0$$

$$M(z) + F \cdot \left( \frac{L}{2} - z \right) = 0$$

ottenendo

$$N(z) = 0$$

$$T(z) = F$$

$$M(z) = F \cdot \left( z - \frac{L}{2} \right)$$

La determinazione del diagramma di sollecitazione assiale rappresenta un problema elementare, essendo nullo in tutte le sezioni della struttura. Per quanto riguarda la determinazione del diagramma di momento flettente, si osserva che dovendo avere andamento lineare nel tratto A-C, il valore ricavato dalla relazione precedente per la sezione in C:

$$M = -\frac{FL}{2}$$

e il valore necessariamente nullo nella cerniera interna presente in B, consentono di tracciare il diagramma e di trovare il valore nella sezione adiacente all'incastro con una semplice proporzione:

$$M = \frac{FL}{2} \cdot \frac{L}{L/2} = FL$$

Il diagramma di taglio si può ottenere per derivazione da quello di momento, nel tratto A-B e B-C

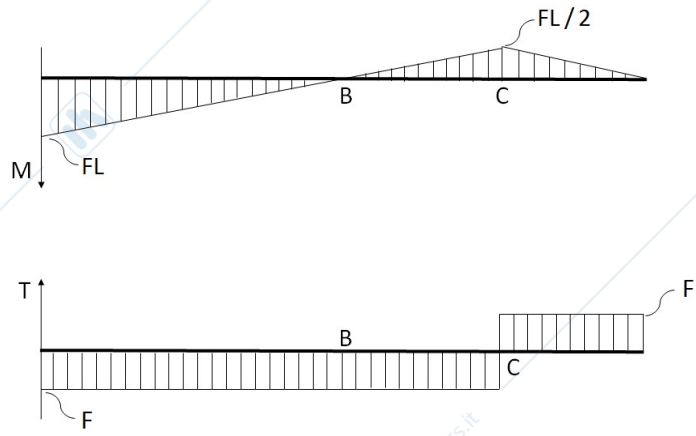
$$T = -\frac{FL}{L} = -\frac{FL/2}{L/2} = -F$$

e nel tratto C-D

$$T = \frac{FL/2}{L/2} = F$$

Si noti come la discontinuità nel diagramma della sollecitazione di taglio presente in corrispondenza della sezione C (pari a 2F) è determinata dal valore della reazione verticale. I diagrammi del momento flettente e

della sollecitazione tagliante sono riportati di seguito, omettendo il diagramma dello sforzo assiale che risulta nullo in ogni sezione della struttura.



**BIOMECCANICA A.A. 2018-19**  
**CALCOLO DELLE SOLLECITAZIONI IN SISTEMI STRUTTURALI CON FUNZIONE BIOMECCANICA**

## 1. PROTESI PER AMPUTATI TRANS-TIBIALI

Considerando, in via semplificativa, un comportamento a trave per la protesi indicata in figura, si individui la sezione soggetta alla massima sollecitazione flettente.

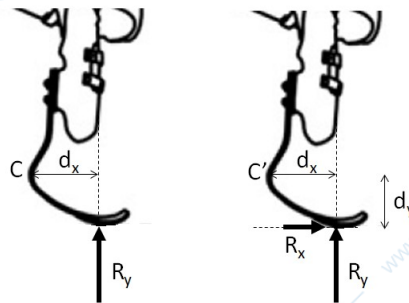


Nella configurazione indicata, ipotizzando che la reazione applicata dal terreno abbia solo componente verticale, la sezione di massimo momento flettente è la sezione C, dove risulta:

$$M = R_y \cdot d_x$$

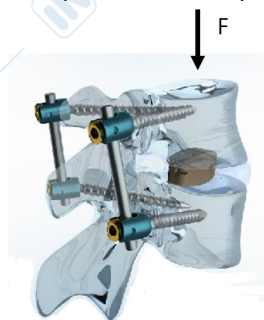
In caso di compresenza di una componente di reazione orizzontale (ciò che garantisce la spinta in avanti dell'atleta), la sezione di massimo momento identificata da quella per cui risulta massimo, in modulo, il valore di momento flettente:

$$M = R_y \cdot d_x + R_x \cdot d_y$$

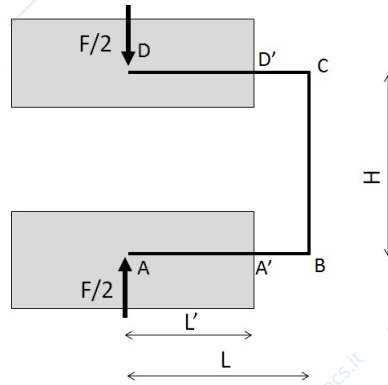


## 2. FISSATORI SPINALI

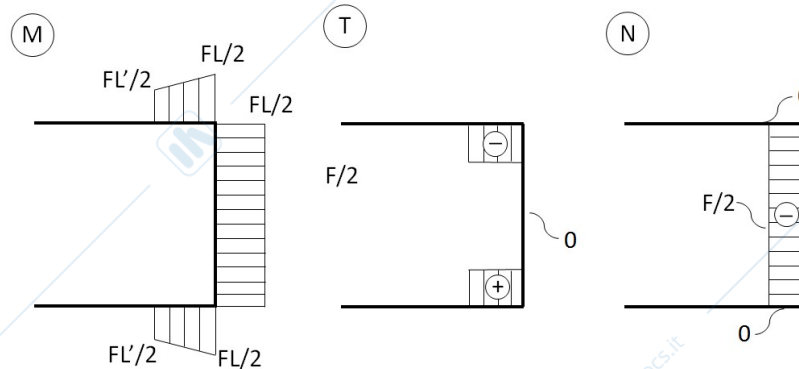
Si valuti in prima approssimazione il regime di sollecitazione indotto sui fissatori spinali indicati in figura, a seguito di forze di compressione agenti sul corpo vertebrale superiore.



La forza di compressione è equilibrata da una pari reazione agente sul corpo vertebrale inferiore. Ipotizzando la simmetria del sistema, la forza sarà equamente ripartita tra le due strutture che compongono il sistema di fissazione. Se la retta di applicazione della forza passa per l'estremità delle viti peduncolari, lo schema statico a cui fare riferimento è il seguente:



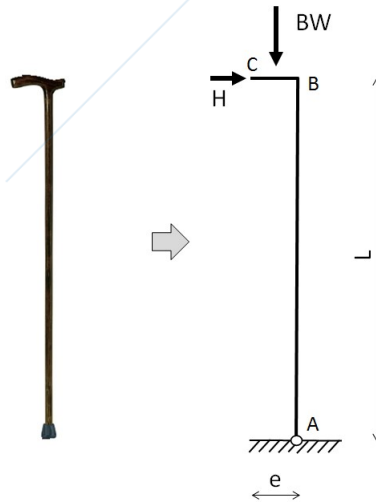
dove gli elementi AB e CD rappresentano le viti peduncolari. In via semplificativa si è ipotizzato che le due strutture siano tra loro parallele (in realtà le coppe di viti peduncolari di ogni vertebra hanno un angolo di convergenza in direzione posteriore-anteriore). Gli andamenti delle componenti di sollecitazione si possono ricavare con metodo diretto a partire dalla sezione A o D, ottenendo i seguenti diagrammi:



I diagrammi di sollecitazione insistono sulla parte di fissatore che non sia in diretta interazione con le vertebre. Nelle regioni di interazione con queste il comportamento meccanico non è riconducibile alla semplice rappresentazione di elementi trave e, di conseguenza, alla rappresentazione mediante diagrammi di sollecitazione

### 3. BASTONE DA PASSEGGIO

Si valuti in prima approssimazione il regime di sollecitazioni indotto su un bastone da passeggio per la configurazione verticale rappresentata in figura.

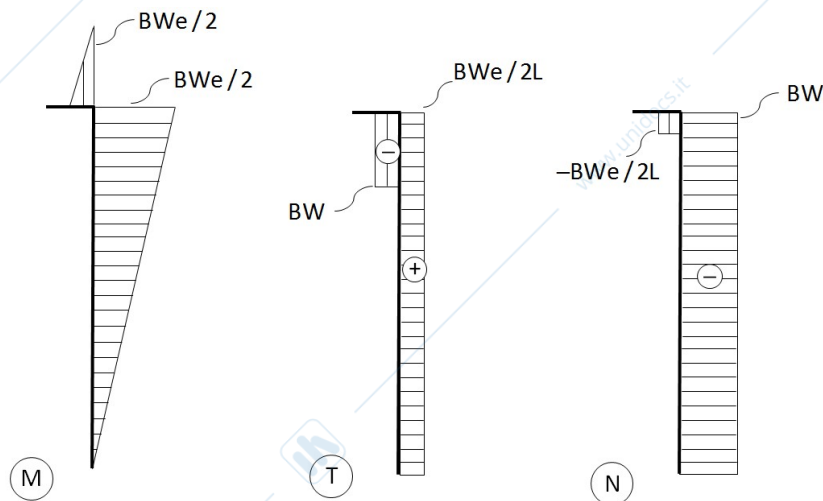


Si approssima la struttura del bastone allo schema a trave indicato. Si suppone che sia applicata una forza verticale concentrata nella mezziera dell'impugnatura e pari, al massimo, al peso proprio del soggetto BW. L'appoggio del bastone al suolo può essere approssimato da una cerniera, nell'ipotesi che le forze verticali siano verso il basso e che l'attrito con la superficie d'appoggio consenta lo svilupparsi di una sufficiente forza orizzontale.

Per equilibrio dei momenti indotti dal sistema di forze rispetto al punto A, il soggetto deve applicare una forza orizzontale H nel verso indicato in figura e tale che:

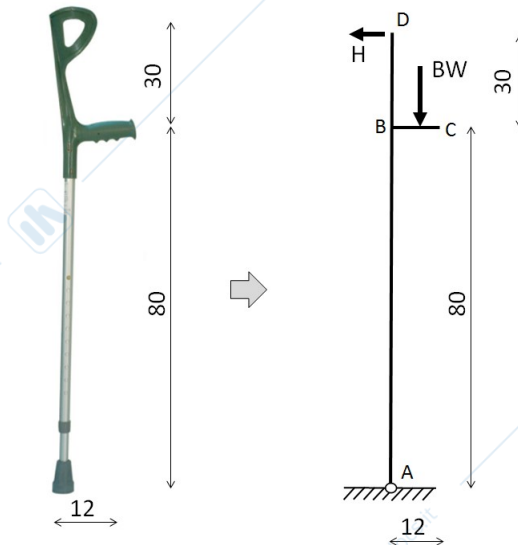
$$H \cdot L = BW \cdot \frac{e}{2} \rightarrow H = \frac{BW}{2} \cdot \frac{e}{L}$$

Supponiamo, in via semplificativa, che anche la forza H sia applicata nel punto di mezziera dell'impugnatura. Il regime di sollecitazioni sulla struttura del bastone si determina facilmente per via diretta a partire dalla sezione C, verso la sezione A e risulta dato dai seguenti diagrammi.



#### 4. STAMPELLA CANADESE

Si valuti in prima approssimazione il regime di sollecitazioni indotto sulla stampella canadese, nella configurazione verticale rappresentata in figura.

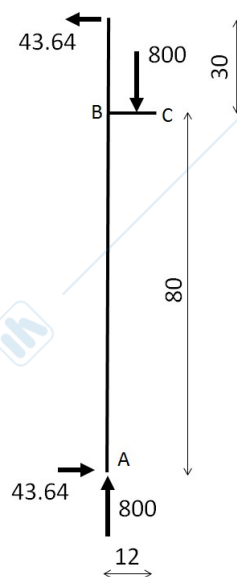


Si ipotizzi che l'utilizzatore abbia un peso corporeo  $BW$  pari a 800 N e che la stampella abbia le dimensioni indicate in figura (altezza dell'impugnatura dal suolo 80 cm, lunghezza dell'impugnatura 12 cm, lunghezza dell'appoggio antibrachiale 30 cm).

Si adotta lo schema statico rappresentato in figura. Come per l'esercizio precedente, l'appoggio al terreno è modellato come una cerniera, nell'ipotesi di forze applicate verso il basso e di sufficiente attrito nel contatto con la superficie di appoggio. Si ipotizza un carico massimo pari al peso proprio del soggetto. In via semplificativa si ipotizza che questo carico sia una forza concentrata applicata nella mezziera dell'impugnatura. Per equilibrio dei momenti rispetto alla cerniera in A, è necessario che il soggetto applichi una forza sull'appoggio antibrachiale come indicato in figura. Si immagina, in via semplificativa, che tale forza  $H$  sia orizzontale e applicata all'estremità dell'appoggio antibrachiale. La forza si deduce dall'equazione di equilibrio:

$$H \cdot (80 + 30) = BW \cdot \frac{12}{2} \rightarrow H = 800 \cdot \frac{6}{110} = 43.64 \text{ N}$$

Le condizioni di equilibrio delle forze in direzione verticale e orizzontale consentono di ricavare in modo immediato le componenti di reazione all'appoggio, rappresentate in figura (lunghezze in cm, forze in N):



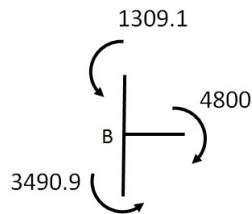
Con metodo diretto è possibile ricavare le componenti di momento flettente nelle sezioni adiacenti al punto B. queste risultano differenti per i vari tratti di struttura:

BA:  $M = 43.64 \cdot 80 = 3490.9 \text{ Ncm}$

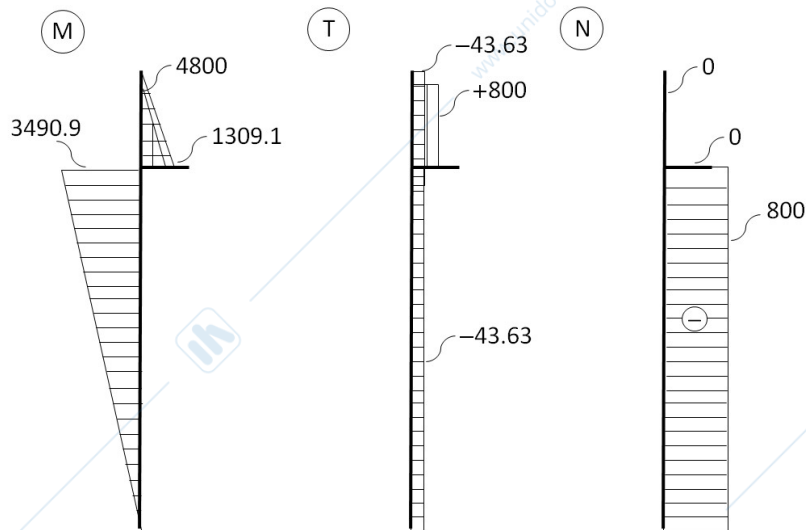
BC:  $M = 800 \cdot 6 = 4800 \text{ Ncm}$

BD:  $M = 43.64 \cdot 30 = 1309.1 \text{ Ncm}$

Si noti che i momenti flettenti applicati sul punto B, in base al loro orientamento deducibile dal verso delle forze esterne, sono globalmente equilibrati:



I diagrammi di sollecitazione sulla struttura in esame sono rappresentati nella seguente figura:



**Università di Padova**  
**Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica**  
**Corso di Laurea Magistrale in Bioingegneria**  
**Anno Accademico 2018-2019**

**Insegnamento di Biomeccanica**  
**Elementi di antropometria**



**CMBM**  
Centre for Mechanics of Biological Materials



University of Padova, Italy  
Department of Industrial Engineering

**Introduzione**

L'antropometria riguarda lo studio delle misure del corpo umano e comprende la valutazione di:

- lunghezze dei segmenti corporei
- circonferenze e larghezze dei segmenti corporei
- composizione del corpo umano (densità dei tessuti...)
- massa dei segmenti corporei
- centri di massa dei segmenti corporei
- momenti d'inerzia dei segmenti corporei

È necessaria nell'analisi delle sollecitazioni agenti sulle varie articolazioni, nella progettazione delle protesi, delle postazioni o degli strumenti di lavoro, nell'industria dell'automobile, etc. etc.



**CMBM**  
Centre for Mechanics of Biological Materials

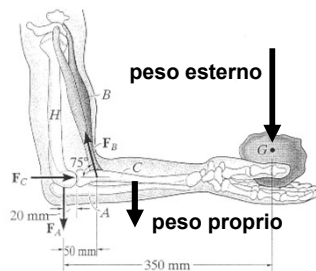


University of Padova, Italy  
Department of Industrial Engineering

## Introduzione

L'analisi delle sollecitazioni su vari distretti corporei richiede la valutazione dei dati antropometrici per stimare parte delle forze e dei momenti di forza esterni e le reazioni interne relative alle varie articolazioni e ai segmenti corporei. Da ciò possono derivarsi le valutazioni sullo stato meccanico delle strutture e dei tessuti biologici.

### Modelli semplificati: calcolo approssimato delle sollecitazioni



- Il calcolo richiede comunque la determinazione dei pesi propri e dei punti di applicazione delle forze peso
- Quant'è la massa della mano? E dell'avambraccio? Dov'è collocato il loro centro di massa e, quindi la risultante della forza peso?



**CMBM**  
Centre for Mechanics of Biological Materials

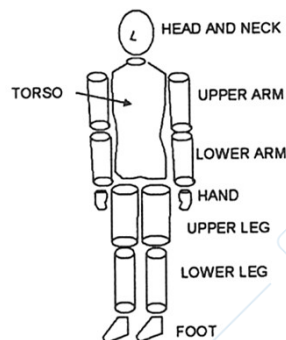


University of Padova, Italy  
Department of Industrial Engineering

3

## Metodi dell'antropometria

Il corpo umano è suddiviso in differenti segmenti corporei, che sono considerati come corpi rigidi opportunamente articolati tra loro



Per ogni segmento è possibile determinare:

- lunghezza (intesa come distanza tra i centri delle articolazioni che li vincolano)
- massa
- posizione dei centri di massa
- momenti d'inerzia



**CMBM**  
Centre for Mechanics of Biological Materials



University of Padova, Italy  
Department of Industrial Engineering

4

### Calcolo dei centri di massa

La densità, definita come massa per unità di volume, varia a seconda del tessuto, influenzando la massa complessiva e la distribuzione di massa del segmento corporeo considerato.

Si può esprimere la densità del tessuto attraverso il rapporto tra peso del tessuto e peso di un quantitativo d'acqua che riempie un volume uguale:

$$\text{osso corticale} = 1.8 \quad \text{muscoli} = 1.0 \quad \text{grasso} = 0.7$$

Attribuendo all'acqua la densità di  $1 \text{ g/cm}^3 = 1 \times 10^{-9} \text{ t/mm}^3$  si deducono i valori assoluti per i componenti precedenti.

Si definisce poi come peso specifico il prodotto della densità per l'accelerazione gravitazionale (attenzione al valore da dare all'accelerazione gravitazionale ...)



CMBM  
Centre for Mechanics of Biological Materials



University of Padova, Italy  
Department of Industrial Engineering

5

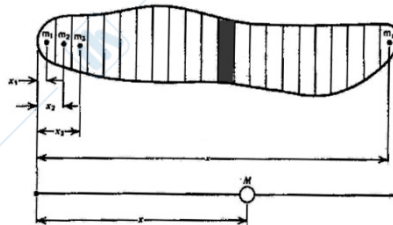
### Calcolo dei centri di massa

Il calcolo del centro di massa si può fare calcolando il punto dove è applicata la forza peso che agisce sul segmento corporeo.

Dividendo il segmento corporeo in più elementi ...

...se consideriamo la densità costante per ogni segmento corporeo (approssimazione) la massa di ogni elemento è pari al suo volume per la densità:  $m_i = V_i \cdot \rho$

Su ogni elemento, è applicata una forza peso nel suo baricentro, proporzionale a massa e accelerazione di gravità:  $p_i = m_i \cdot g$



CMBM  
Centre for Mechanics of Biological Materials



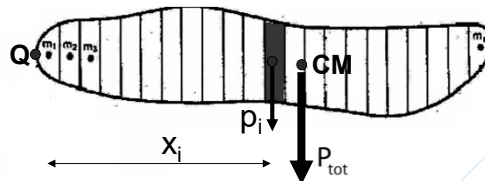
University of Padova, Italy  
Department of Industrial Engineering

6

### Calcolo dei centri di massa

Si calcola la risultante della forza come somma delle forze  $p_i$

$$P_{\text{tot}} = p_1 + p_2 + \dots + p_n$$



Si calcola il momento di ogni forza  $p_i$  rispetto ad un punto generico (Q nella figura) e si sommano i contributi

$$M_{\text{tot},Q} = p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + \dots + p_n \cdot x_n$$



CMBM  
Centre for Mechanics of Biological Materials



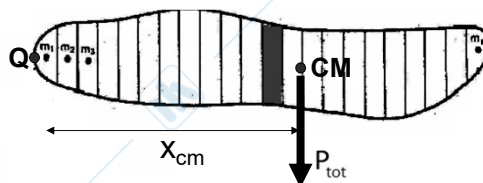
University of Padova, Italy  
Department of Industrial Engineering

7

### Calcolo dei centri di massa

La distanza del centro di massa (CM) dal punto considerato si trova come rapporto tra la somma dei momenti delle forze peso e la forza peso totale del segmento corporeo:

$$x_{\text{cm}} = \frac{M_{\text{tot},Q}}{P_{\text{tot}}} = \frac{p_1 \cdot x_1 + \dots + p_n \cdot x_n}{p_1 + \dots + p_n} = \frac{m_1 \cdot x_1 + \dots + m_n \cdot x_n}{m_1 + \dots + m_n}$$



CMBM  
Centre for Mechanics of Biological Materials



University of Padova, Italy  
Department of Industrial Engineering

8

### Calcolo dei momenti d'inerzia

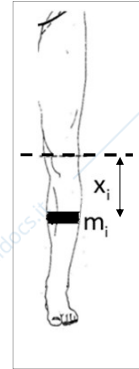
Anche per il calcolo dei momenti d'inerzia si può ragionare, in modo equivalente, in termini di massa o di forza peso applicata sulle singole masse. Il momento d'inerzia rispetto ad un asse è calcolato come somma dei prodotti delle masse per la loro distanza al quadrato dall'asse:

$$I_y = m_1 \cdot x_1^2 + m_2 \cdot x_2^2 \dots + m_n \cdot x_n^2$$

È poi utile definire il raggio d'inerzia:

$$r_y = \sqrt{I_y / m_{\text{tot}}} \rightarrow I_y = m_{\text{tot}} \cdot r_y^2$$

come distanza alla quale si dovrebbe concentrare tutta la massa  $m$  per ottenere il momento d'inerzia  $I_y$ .



asse  $y$  di calcolo del momento d'inerzia



CMBM  
Centre for Mechanics of Biological Materials

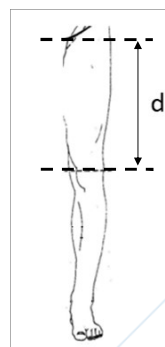


University of Padova, Italy  
Department of Industrial Engineering

9

### Calcolo dei momenti d'inerzia

Avendo calcolato il momento d'inerzia rispetto ad un asse baricentrico del segmento corporeo in esame, il momento d'inerzia rispetto ad un asse generico, parallelo a quello baricentrico si ottiene in base al teorema di trasposizione secondo la formula:



asse  $y$  generico

asse  $y_G$  baricentrico per  
coscia-gamba-piede

$$I_y = I_{yG} + m_{\text{tot}} \cdot d^2$$



CMBM  
Centre for Mechanics of Biological Materials



University of Padova, Italy  
Department of Industrial Engineering

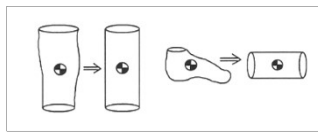
10 10

### Metodi di studio

I metodi di studio dei dati antropometrici possono essere:

- dati su cadavere
- metodi radiografici
- utilizzo di modelli geometrici
- tecniche di immagine
- metodi statistici basati su dati precedenti

### Utilizzo di modelli geometrici



Consistono in una approssimazione dei segmenti in solidi semplici, di cui si calcolano le proprietà di geometria e massa.



**CMBM**  
Centre for Mechanics of Biological Materials



University of Padua, Italy  
Department of Industrial Engineering

11

### Metodi di studio

#### Metodi statistici

Utilizzano equazioni di regressione per valutare un parametro in funzione di una o più grandezze; ad esempio, la densità media dei segmenti corporei, in prima approssimazione è ricavabile da:

$$\rho = 0.69 + 0.9 \cdot h/BW^{1/3}$$

essendo  $h$  (m) l'altezza del soggetto e  $BW$  (kg) la massa totale del soggetto. Per un'altezza di 170 cm la formula precedente porge:

massa (kg)	60.0	64.0	68.0	72.0	76.0	80.0
$\rho$ (g/cm <sup>3</sup> )	1.081	1.073	1.065	1.058	1.051	1.045

La diminuzione della densità media con l'aumento della massa è dato dalla prevalenza di componenti con densità inferiore a quella del tessuto osseo. In realtà, la densità varia da segmento a segmento.



**CMBM**  
Centre for Mechanics of Biological Materials



University of Padua, Italy  
Department of Industrial Engineering

12

## Metodi di studio

### Studi su cadavere

Si tratta di misure dirette effettuate tramite dissezione di cadaveri. I dati più usati sono quelli dei seguenti autori:

- Dempster (1955)
- Clauser et al. (1969)
- Chandler et al. (1975)

autore	soggetti	età	massa (kg)	altezza (m)
Dempster	8 uomini	52 - 83	49 - 72	1.59 - 1.86
Clauser et al.	13 uomini	28 - 74	54 - 88	1.62 - 1.85
Chandler et al.	6 uomini	45 - 65	51 - 89	1.64 - 1.81



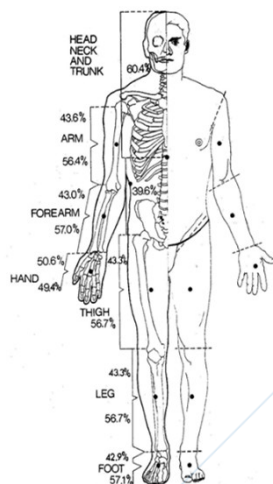
**CMBM**  
Centre for Mechanics of Biological Materials



University of Padova, Italy  
Department of Industrial Engineering

13

## Posizioni relative dei centri di massa



Con i metodi precedenti è possibile determinare la posizione dei centri di massa dei vari segmenti corporei e la distanza percentuale dai centri di rotazione delle articolazioni a cui fanno capo i segmenti.

La valutazione dei valori medi calcolati su un certo numero di soggetti ha permesso di ottenere dati da applicare ad individui che si avvicinino ragionevolmente a tale media.



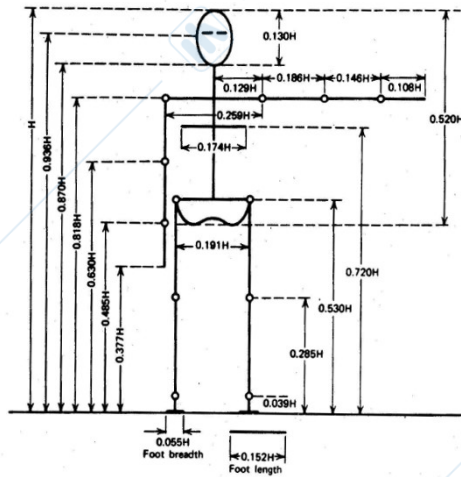
**CMBM**  
Centre for Mechanics of Biological Materials



University of Padova, Italy  
Department of Industrial Engineering

14

### Lunghezze dei segmenti corporei



Con medesime valutazioni sulle lunghezze dei differenti segmenti è stato possibile determinarne i valori medi delle varie lunghezze come frazione della statura del soggetto.

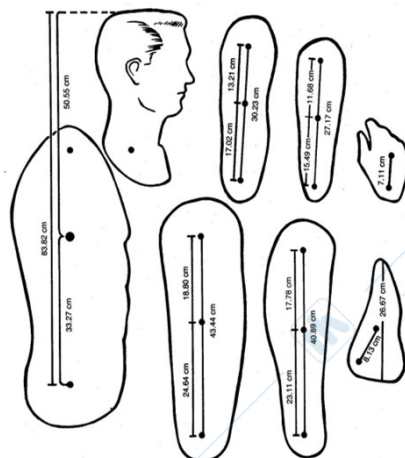


**CMBM**  
Centre for Mechanics of Biological Materials



University of Padova, Italy  
Department of Industrial Engineering

### Lunghezze dei segmenti corporei



Con la serie di dati precedenti, data l'altezza del soggetto è possibile ricavare le distanze assolute dei centri di massa dei segmenti corporei dai centri di articolazione.

Similarmente si può procedere nel determinare i momenti di inerzia.



**CMBM**  
Centre for Mechanics of Biological Materials



University of Padova, Italy  
Department of Industrial Engineering

### Masse dei segmenti corporei

Valutazioni statistiche consentono di ricavare il peso di vari segmenti corporei espresso come frazione del peso totale del soggetto.

Segment	Definition	Segment Weight/ Total Body Weight
Hand	Wrist axis/knuckle II middle finger	0.006
Forearm	Elbow axis/ulnar styloid	0.016
Upper arm	Glenohumeral axis/elbow axis	0.028
Forearm and hand	Elbow axis/ulnar styloid	0.022
Total arm	Glenohumeral joint/ulnar styloid	0.050
Foot	Lateral malleolus/head metatarsal II	0.0145
Leg	Femoral condyles/medial malleolus	0.0465
Thigh	Greater trochanter/femoral condyles	0.100
Foot and leg	Femoral condyles/medial malleolus	0.061
Total leg	Greater trochanter/medial malleolus	0.161



**CMBM**  
Centre for Mechanics of Biological Materials



University of Padova, Italy  
Department of Industrial Engineering

17

### Tabelle riassuntive di dati antropometrici

TABLE 3.1 Anthropometric Data

Segment	Definition	Segment Weight/ Total Body Weight	Center of Mass/ Segment Length		Radius of Gyration/ Segment Length			Density
			Proximal	Distal	C of G	Proximal	Distal	
Hand	Wrist axis/knuckle II middle finger	0.006	0.506	0.494	0.297	0.587	0.577	1.16
Forearm	Elbow axis/ulnar styloid	0.016	0.430	0.570	0.303	0.526	0.647	1.13
Upper arm	Glenohumeral axis/elbow axis	0.028	0.436	0.564	0.322	0.542	0.645	1.07
Forearm and hand	Elbow axis/ulnar styloid	0.022	0.682	0.318	0.468	0.827	0.565	1.14
Total arm	Glenohumeral joint/ulnar styloid	0.050	0.530	0.470	0.368	0.645	0.596	1.11
Foot	Lateral malleolus/head metatarsal II	0.0145	0.50	0.50	0.475	0.690	0.690	1.10
Leg	Femoral condyles/medial malleolus	0.0465	0.433	0.567	0.302	0.528	0.643	1.09
Thigh	Greater trochanter/femoral condyles	0.100	0.433	0.567	0.323	0.540	0.653	1.05
Foot and leg	Femoral condyles/medial malleolus	0.061	0.606	0.394	0.416	0.735	0.572	1.09
Total leg	Greater trochanter/medial malleolus	0.161	0.447	0.553	0.326	0.560	0.650	1.06



**CMBM**  
Centre for Mechanics of Biological Materials



University of Padova, Italy  
Department of Industrial Engineering

18

## Tabelle riassuntive di dati antropometrici

TABLE 3.1 (Continued)

Segment	Definition	Segment Weight/ Total Body Weight	Center of Mass/ Segment Length		Radius of Gyration/ Segment Length			Density
			Proximal	Distal	C of G	Proximal	Distal	
Head and neck	C7-T1 and 1st rib/ear canal	0.081	1.000	—	0.495	0.116	—	1.11
Shoulder mass	Sternoclavicular joint/ glenohumeral axis	—	0.712	0.288	—	—	—	1.04
Thorax	C7-T1/T12-L1 and diaphragm*	0.216	0.82	0.18	—	—	—	0.92
Abdomen	T12-L1/L4-L5*	0.139	0.44	0.56	—	—	—	—
Pelvis	L4-L5/greater trochanter*	0.142	0.105	0.895	—	—	—	—
Thorax and abdomen	C7-T1/L4-L5*	0.355	0.63	0.37	—	—	—	—
Abdomen and pelvis	T12-L1/greater trochanter*	0.281	0.27	0.73	—	—	—	1.01
Trunk	Greater trochanter/ glenohumeral joint*	0.497	0.50	0.50	—	—	—	1.03
Trunk head neck	Greater trochanter/ glenohumeral joint*	0.578	0.66	0.34	0.503	0.830	0.607	—
Head, arms, and trunk (HAT)	Greater trochanter/ glenohumeral joint*	0.678	0.626	0.374	0.496	0.798	0.621	—
HAT	Greater trochanter/mid rib	0.678	1.142	—	0.903	1.456	—	—

\*NOTE: These segments are presented relative to the length between the greater trochanter and the glenohumeral joint.

Source Codes: M, Dempster via Miller and Nelson; *Biomechanics of Sport*, Lea and Febiger, Philadelphia, 1973. P, Dempster via Pagenhofer; *Patterns of Human Motion*, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, NJ, 1971. L, Dempster via Pagenhofer from living subjects; *Patterns of Human Motion*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1971. C, Calculated.



**CMBM**  
Centre for Mechanics of Biological Materials



University of Padova, Italy  
Department of Industrial Engineering

19

**BIOMECCANICA A.A. 2018-19**  
**CALCOLO DI DATI ANTROPOMETRICI E DI FORZE AGENTI SULLE ARTICOLAZIONI**

## 1. DISTRIBUZIONE DELLA MASSA NELL'AVAMBRACCIO

Calcolare i dati di massa relativi all'avambraccio di un soggetto di massa corporea  $BM = 80$  kg e altezza  $H = 182$  cm.

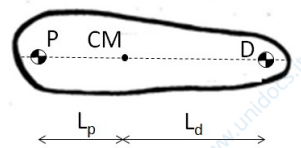
Dalle tabelle antropometriche (riportante in allegato) la lunghezza dell'avambraccio è stimata pari a

$$L = 0.146 \cdot H = 0.146 \cdot 182 = 26.57 \text{ cm}$$

Sempre in base alle tabelle antropometriche, le distanze prossimali e distali relative del centro di massa sono 0.43 e 0.57, rispettivamente. Con riferimento alla figura seguente si ottiene pertanto:

$$L_p = 0.43 \cdot L = 0.43 \cdot 26.57 = 11.43 \text{ cm}$$

$$L_d = 0.57 \cdot L = 0.57 \cdot 26.57 = 15.14 \text{ cm}$$



In base ai dati medi antropometrici, la massa dell'avambraccio risulta pari a:

$$m = 0.016 \cdot BM = 0.016 \cdot 80 = 1.28 \text{ kg}$$

Per il calcolo dei momenti d'inerzia si può fare riferimento ai valori relativi dei raggi d'inerzia rispetto all'asse baricentrico, all'asse prossimale (punto P) e a all'asse distale (punto D). In base alle tabelle antropometriche si ricava:

$$r_{cm} = 0.303 \quad r_p = 0.526 \quad r_d = 0.645$$

I raggi d'inerzia effettivi, indicati di seguito con i medesimi simboli per non appesantire la notazione, sono ricavati a partire dai valori precedenti e dalla lunghezza del segmento corporeo in esame:

$$r_{cm} = 0.303 \cdot 26.57 = 8.05 \text{ cm} \quad r_p = 0.526 \cdot 26.57 = 13.98 \text{ cm} \quad r_d = 0.645 \cdot 26.57 = 17.14 \text{ cm}$$

Si ricorda che, in generale, il raggio d'inerzia è definito come

$$r = \sqrt{I/m}$$

essendo  $I$  il momento d'inerzia rispetto all'asse considerato e  $m$  la massa del sistema. Il momento d'inerzia può essere pertanto ricavato come

$$I = m \cdot r^2$$

I momenti d'inerzia rispetto all'asse baricentrico, prossimale e distale sono ottenuti come:

$$I_{cm} = m \cdot r_{cm}^2 = 1.28 \cdot 8.05^2 = 82.95 \text{ kg cm}^2$$

$$I_p = m \cdot r_p^2 = 1.28 \cdot 13.98^2 = 250.16 \text{ kg cm}^2$$

$$I_d = m \cdot r_d^2 = 1.28 \cdot 17.14^2 = 376.04 \text{ kg cm}^2$$

In via alternativa, i momenti d'inerzia rispetto agli assi prossimale e distale possono anche determinarsi attraverso il teorema di trasposizione, a partire dal valore calcolato rispetto all'asse baricentrico:

$$I_p = I_{cm} + m \cdot L_p^2 = 82.95 + 1.28 \cdot 11.43^2 = 250.18 \text{ kg cm}^2$$

$$I_d = I_{cm} + m \cdot L_d^2 = 82.95 + 1.28 \cdot 15.14^2 = 376.35 \text{ kg cm}^2$$

Le differenze tra i valori ora calcolati e i precedenti sono dovute alle approssimazioni dopo la virgola.

## 2. MOMENTI D'INERZIA DELL'ARTO INFERIORE

Si calcoli il momento d'inerzia della gamba e del piede rispetto: i) all'asse baricentrico dei due segmenti corporei, ii) all'asse passante per l'articolazione del ginocchio, iii) all'asse passante per l'articolazione coxo-femorale.

Dati del soggetto: massa  $BM = 75$  kg, altezza  $H = 178$  cm

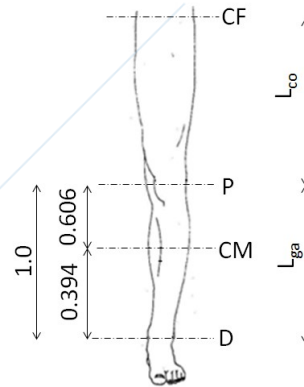
In base alle tabelle antropometriche, i dati relativi a gamba+piede sono riportati con riferimento alla lunghezza del segmento corporeo della gamba (tra articolazione del ginocchio e articolazione della caviglia). La massa del segmento gamba+piede è pari a:

$$m = 0.061 \cdot BM = 0.061 \cdot 75 = 4.575 \text{ kg}$$

La lunghezza dei segmenti corrispondenti alla gamba alla coscia si determina per sottrazione in base alle misure riportate nella tabella dei dati antropometrici in funzione dell'altezza del soggetto:

$$L_{ga} = (0.285 - 0.039) \cdot H = 0.246 \cdot 178 = 44.0 \text{ cm}$$

$$L_{co} = (0.530 - 0.285) \cdot H = 0.245 \cdot 178 = 43.6 \text{ cm}$$



Il momento d'inerzia rispetto all'asse baricentrico è dato da:

$$I_{cm} = m \cdot r_{cm}^2 = 4.575 \cdot (0.416 \cdot 44.0)^2 = 1532.8 \text{ kgcm}^2$$

Il calcolo del momento d'inerzia rispetto all'asse prossimale (ginocchio) si può fare applicando il teorema di trasposizione:

$$I_p = I_{cm} + m \cdot L_p^2 = 1532.28 + 4.575 \cdot (0.606 \cdot 44.0)^2 = 4785.5 \text{ kgcm}^2$$

Il valore precedente si poteva ricavare anche con la formula diretta:

$$I_p = m \cdot r_p^2 = 4.575 \cdot (0.735 \cdot 44.0)^2 = 4784.9 \text{ kgcm}^2$$

Il momento d'inerzia del segmento gamba+piede rispetto all'asse dell'articolazione coxo-femorale  $I_{cf}$  è dato da:

$$I_{cf} = I_{cm} + m \cdot (L_p + L_{co})^2$$

Dove  $L_{co}$  rappresenta la lunghezza della coscia. Si ottiene pertanto:

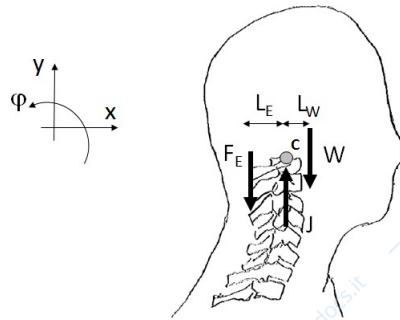
$$I_{cf} = 1532.8 + 4.575 \cdot (0.606 \cdot 44.0 + 43.6)^2 = 24119.7 \text{ kgcm}^2$$

Si noti il rapporto risultante tra i due valori del momento d'inerzia:

$$\frac{I_{cf}}{I_p} = \frac{24119.7}{4785.5} \cong 5.0$$

### 3. CALCOLO DELLE FORZE AGENTI SUL GIUNTO ATLANTO-OCCIPITALE

Si calcolino le forze agenti sul giunto atlanto-occipitale nella configurazione statica indicata in figura, per un soggetto con peso corporeo pari a 700 N. Il braccio della risultante dei muscoli estensori ( $F_E$ ) è pari a  $L_E = 20$  mm e il braccio della forza peso del capo è pari a  $L_W = 40$  mm. Si consideri la risultante  $F_E$  agente in direzione verticale.



Dalle tabelle dei dati antropometrici, il peso proprio del capo  $W$  è pari al 7% del peso complessivo del corpo  $BW$ . L'equilibrio delle componenti di momento rispetto al punto di articolazione  $C$  prevede che sia:

$$\sum M_{i,C} = 0 \rightarrow F_E \cdot L_E - W \cdot L_W = 0$$

da cui si ottiene

$$F_E = \frac{W \cdot L_W}{L_E} = 2 \cdot W = 0.14 \cdot BW$$

quale valore della risultante delle forze di contrazione isometrica dei muscoli estensori. L'equilibrio delle forze in direzione verticale consente di ricavare il valore della compressione sul giunto articolare  $J$ :

$$\sum F_{i,y} = 0 \rightarrow -F_E + J - W = 0$$

da cui si ricava

$$J = F_E + W = 3 \cdot W = 0.21 \cdot BW$$

Inserendo il valore ipotizzato di 700 N per il peso proprio complessivo  $BW$ , si ottiene quindi:

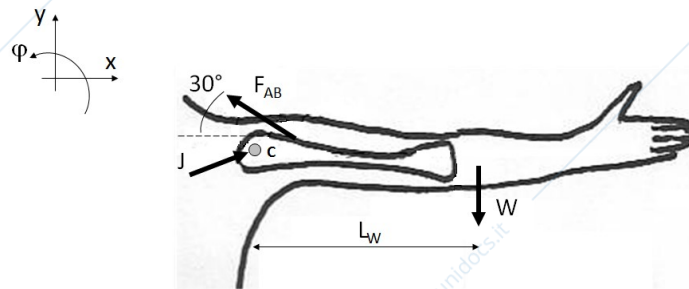
$$F_E = 0.14 \cdot 700 = 98 \text{ N}$$

$$J = 0.21 \cdot 700 = 147 \text{ N}$$

Si noti che per il rapporto dei bracci di forza per la risultante dei muscoli estensori e della forza peso determina il fatto che la prima è pari a due volte il peso proprio del capo; la forza di compressione del giunto articolare è pari a tre volte il peso del capo.

#### 4. CALCOLO DELLE FORZE AGENTI SULL'ARTICOLAZIONE DELLA SPALLA

Si calcolino le forze agenti sull'articolazione della spalla nella configurazione indicata in figura (abduzione di  $90^\circ$  a braccio teso), per un soggetto con peso corporeo  $BW$ . Il braccio della risultante dei muscoli abduttori ( $F_{AB}$ ) è pari a  $L_{AB} = 50$  mm e il braccio della forza peso  $W$  dell'arto superiore è pari a  $L_W = 380$  mm. Risulta inoltre determinato, sempre da dati anatomici, l'angolo formato dalla risultante dei muscoli abduttori con l'orizzontale (approssimabile in  $30^\circ$ ).



Dalle tabelle antropometriche, il peso dell'arto superiore  $W$  risulta pari al 5% del peso totale del corpo  $BW$ . Dall'equilibrio delle componenti di momento rispetto all'articolazione della spalla si ottiene:

$$\sum M_{I,C} = 0 \rightarrow F_{AB} \cdot L_{AB} - W \cdot L_W = 0$$

da cui si ricava il valore della risultante dei muscoli abduttori:

$$F_{AB} = \frac{W \cdot L_W}{L_{AB}} = \frac{W \cdot 380}{50} = 7.6 \cdot W = 7.6 \cdot 0.05 \cdot BW = 0.38 \cdot BW$$

Per la determinazione della risultante delle forze di compressione  $J$  sull'articolazione si procede indicando con  $J_x$  e  $J_y$  le componenti di questa secondo il verso positivo degli assi coordinati e scrivendo le equazioni di equilibrio delle forze in direzione  $x$  e in direzione  $y$ :

$$J_x - F_{AB} \cdot \cos 30^\circ = 0$$

$$J_y + F_{AB} \cdot \sin 30^\circ - W = 0$$

ottenendo:

$$J_x = 7.6 \cdot W \cdot \cos 30^\circ = 6.58 \cdot W$$

$$J_y = W - 7.6 \cdot W \cdot \sin 30^\circ = -2.8 \cdot W$$

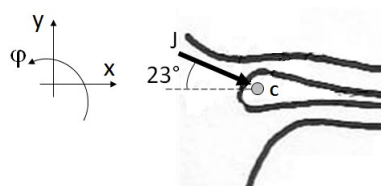
La risultante delle forze di compressione sul centro di articolazione della spalla risulta pari a:

$$J = \sqrt{J_x^2 + J_y^2} = \sqrt{2.8^2 + 6.58^2} \cdot W = 7.15 \cdot W \cong 0.36 \cdot BW$$

L'angolo della retta di azione di  $J$  rispetto all'asse orizzontale si ricava come:

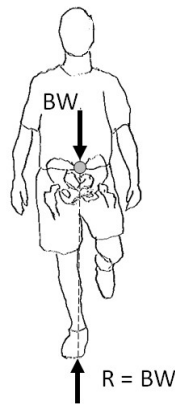
$$\alpha = \arctg\left(\frac{J_y}{J_x}\right) = \arctg\left(\frac{2.8 \cdot W}{6.58 \cdot W}\right) \cong 23^\circ$$

La disposizione della risultante è rappresentata nella figura seguente.

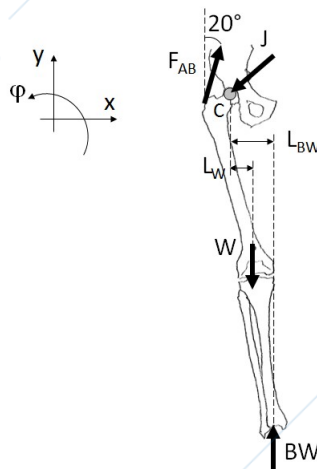


## 5. CALCOLO DELLE FORZE AGENTI SULL'ARTICOLAZIONE COXO-FEMORALE

Si calcolino le forze agenti sull'articolazione coxo-femorale in ipotesi di posizione ortostatica mono-podalica.



In tale condizione è richiesto che la risultante della reazione vincolare all'appoggio del piede sia allineata con la retta d'azione della forza peso corrispondente all'intera massa del soggetto e pari a questa. La configurazione anatomica nella gamba in appoggio è rappresentata nella figura seguente. Le forze agenti sono la risultante dei muscoli abduttori  $F_{AB}$ , che forma un angolo approssimabile a  $20^\circ$  con la verticale e di braccio  $L_{AB} = 65$  mm rispetto all'articolazione, la reazione al suolo  $BW$ , la forza peso dell'arto inferiore  $W$  (pari a circa  $1/7$  del peso totale del corpo  $BW$ , secondo le tabelle dei dati antropometrici) e la forza di compressione sul centro dell'articolazione  $J$ . Dalla configurazione considerata si stima che sia  $L_W = 30$  mm e  $L_{BW} = 110$  mm.



Operando come nei casi precedenti, è possibile calcolare il valore della risultante dei muscoli abduttori considerando l'equilibrio dei momenti rispetto al centro di articolazione C:

$$\sum M_{i,C} = 0 \rightarrow -F_{AB} \cdot L_{AB} - W \cdot L_W + BW \cdot L_{BW} = 0$$

da cui si ottiene il valore della risultante dei muscoli abduttori:

$$F_{AB} = \frac{BW \cdot L_{BW} - W \cdot L_W}{L_{AB}} = \frac{BW \cdot 110 - BW / 7 \cdot 30}{65} = 1.62 \cdot BW$$

Per la determinazione della risultante delle forze di compressione  $J$  sull'articolazione si procede nuovamente indicando con  $J_x$  e  $J_y$  le componenti di questa secondo il verso positivo degli assi coordinati. Le equazioni di equilibrio delle forze in direzione  $x$  e in direzione  $y$  sono:

$$J_x - F_{AB} \cdot \sin 20^\circ = 0$$

$$J_y + F_{AB} \cdot \cos 20^\circ - W + BW = 0$$

ottenendo:

$$J_x = -1.62 \cdot BW \cdot 0.34 = -0.55 \cdot BW$$

$$J_y = -1.62 \cdot BW \cdot 0.94 - BW / 7 + BW = -2.38 \cdot BW$$

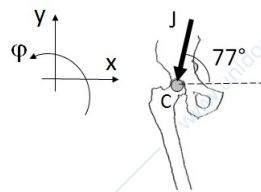
La risultante delle forze di compressione sul centro di articolazione della spalla risulta pari a:

$$J = \sqrt{J_x^2 + J_y^2} = \sqrt{0.55^2 + 2.38^2} \cdot BW = 2.44 \cdot BW$$

L'angolo della retta di azione di J rispetto alla direzione orizzontale si ricava come:

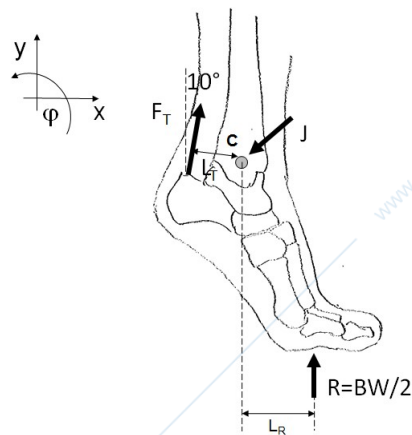
$$\alpha = \arctg\left(\frac{J_y}{J_x}\right) = \arctg\left(\frac{2.38 \cdot BW}{0.55 \cdot BW}\right) \cong 77^\circ$$

La disposizione della risultante J è rappresentata nella figura seguente.



## 6. CALCOLO DELLE FORZE AGENTI SULL'ARTICOLAZIONE DELLA CAVIGLIA

Si calcolino le forze agenti sull'articolazione della caviglia per una condizione di appoggio statico bipodalico sull'avampiede. Si consideri che la risultante del triceps surae  $F_T$  abbia un braccio  $L_T = 60$  mm rispetto al centro dell'articolazione. Il braccio della reazione vincolare al suolo è stimato pari a  $L_R = 140$  mm.



Nei calcoli che seguono si trascura il peso proprio del piede (valore inferiore a 1.5% del peso totale BW). Come in precedenza, l'equilibrio dei momenti rispetto al centro di articolazione C consente di calcolare il valore della risultante  $F_T$ :

$$\sum M_{i,C} = 0 \rightarrow -F_T \cdot L_T + R \cdot L_R = 0$$

da cui si ottiene il valore della risultante dei muscoli abduttori:

$$F_T = \frac{BW / 2 \cdot L_R}{L_T} = \frac{BW / 2 \cdot 140}{60} = 1.17 \cdot BW$$

Indicate con  $J_x$  e  $J_y$  le componenti della forza di compressione  $J$  sull'articolazione, queste si determinano sulla base delle equazioni di equilibrio delle forze in direzione  $x$  e  $y$ :

$$J_x + F_T \cdot \sin 10^\circ = 0$$

$$J_y + F_T \cdot \cos 10^\circ + BW / 2 = 0$$

ottenendo:

$$J_x = -1.17 \cdot BW \cdot 0.174 = -0.20 \cdot BW$$

$$J_y = -1.17 \cdot BW \cdot 0.985 - BW / 2 = -1.65 \cdot BW$$

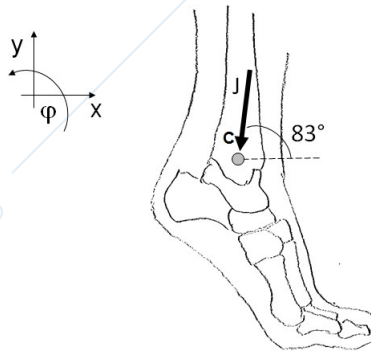
La risultante delle forze di compressione sul centro di articolazione della spalla risulta pari a:

$$J = \sqrt{J_x^2 + J_y^2} = \sqrt{0.20^2 + 1.65^2} \cdot BW = 1.66 \cdot BW$$

L'angolo della retta di azione di  $J$  rispetto alla direzione orizzontale è:

$$\alpha = \arctg\left(\frac{J_y}{J_x}\right) = \arctg\left(\frac{1.65 \cdot BW}{0.20 \cdot BW}\right) \cong 83^\circ$$

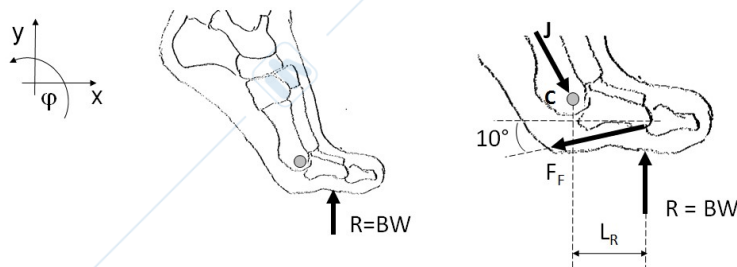
La figura seguente mostra la disposizione della forza di compressione  $J$  agente sull'articolazione:



## 7. CALCOLO DELLE FORZE AGENTI SUL GIUNTO METATARSO-FALANGEO

Si calcolino le forze agenti sull'articolazione del primo giunto metatarso-falangeo in appoggio statico monopodalico, nell'ipotesi che sia solo il primo dito a sopportare le sollecitazioni derivanti dall'appoggio.

Da dati anatomici si stima che il braccio della risultante del flexor hallucis longus  $F_F$  sia pari a  $L_F = 20$  mm. Si considera, inoltre, che il braccio della reazione al suolo sia pari a  $L_R = 33$  mm.



Come nell'esercizio precedente, nei calcoli che seguono si trascura il peso proprio del piede. La risultante della forza muscolare del flessore è ottenuta dall'equazione di equilibrio dei momenti rispetto al centro dell'articolazione C:

$$\sum M_{i,C} = 0 \rightarrow -F_F \cdot L_F + R \cdot L_R = 0$$

da cui si ricava il valore della risultante dei muscoli abduttori:

$$F_T = \frac{BW \cdot L_R}{L_T} = \frac{BW \cdot 33}{20} = 1.65 \cdot BW$$

Indicate con  $J_x$  e  $J_y$  le componenti della forza di compressione  $J$  sull'articolazione, le equazioni di equilibrio delle forze in direzione  $x$  e  $y$  sono:

$$J_x - F_F \cdot \cos 10^\circ = 0$$

$$J_y - F_F \cdot \sin 10^\circ + BW = 0$$

ottenendo:

$$J_x = 1.65 \cdot BW \cdot 0.985 = 1.62 \cdot BW$$

$$J_y = 1.65 \cdot BW \cdot 0.173 - BW = -0.71 \cdot BW$$

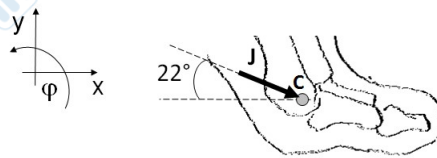
La risultante delle forze di compressione sul centro di articolazione della spalla risulta pari a:

$$J = \sqrt{J_x^2 + J_y^2} = \sqrt{0.20^2 + 1.65^2} \cdot BW = 1.66 \cdot BW$$

L'angolo della retta di azione di  $J$  rispetto alla direzione orizzontale è:

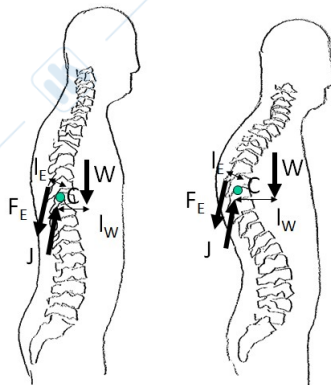
$$\alpha = \arctg\left(\frac{J_y}{J_x}\right) = \arctg\left(\frac{0.71 \cdot BW}{1.62 \cdot BW}\right) \cong 22^\circ$$

La rappresentazione grafica della disposizione della risultante  $J$  è data in figura.



## 8. CALCOLO DELLE FORZE AGENTI NEL SEGMENTO VERTEBRALE TORACICO

Calcolare le sollecitazioni nella vertebra toracica T5 in condizioni di cifosi fisiologica e di ipercifosi. Si consideri l'azione risultante dei muscoli estensori  $F_E$  con braccio  $l_E$  pari a 20 mm. Il peso proprio del segmento portato  $W$  è pari a 11% del peso totale corporeo  $BW$ , con  $l_w$  pari a 50 mm nella condizione di cifosi fisiologica e 95 mm nella condizione di ipercifosi.



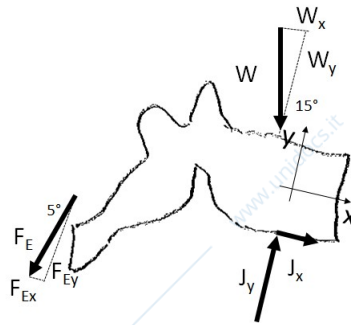
In condizioni di cifosi fisiologica l'equilibrio dei momenti sul giunto T5-T6 consente di ricavare il valore della risultante dei muscoli estensori.

$$\sum M_{i,C} = 0 \rightarrow -F_E \cdot l_E + W \cdot l_W = 0$$

da cui si ottiene:

$$F_E = \frac{0.11 \cdot BW \cdot l_W}{l_E} = \frac{0.11 \cdot BW \cdot 50}{20} = 0.275 \cdot BW$$

La vertebra toracica T5, in condizioni erette, ha un piatto vertebrale inclinato di circa  $15^\circ$  rispetto all'asse orizzontale. I muscoli estensori hanno una risultante con retta d'azione inclinata di  $5^\circ$  rispetto all'asse perpendicolare al piatto vertebrale.



Considerato un sistema di riferimento (x, y) con asse x contenuto nel piano del piatto vertebrale e verso postero-anteriore (vedi figura), le equazioni di equilibrio nelle due direzioni forniscono:

$$J_x - F_E \cdot \sin 5^\circ + W \cdot \sin 15^\circ = 0$$

$$J_y - F_E \cdot \cos 5^\circ - W \cdot \cos 15^\circ = 0$$

da cui si ottiene:

$$J_x = F_E \cdot \sin 5^\circ - W \cdot \sin 15^\circ = 0.275 \cdot BW \cdot \sin 5^\circ - 0.11 \cdot BW \cdot \sin 15^\circ = -0.004 \cdot BW$$

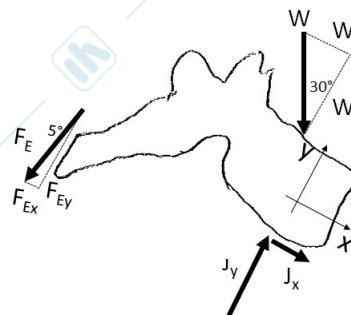
$$J_y = F_E \cdot \cos 5^\circ + W \cdot \cos 15^\circ = 0.275 \cdot BW \cdot \cos 5^\circ + 0.11 \cdot BW \cdot \cos 15^\circ = 0.380 \cdot BW$$

La componente y determina la compressione del corpo vertebrale e la componente x è l'azione tagliante.

In condizioni di ipercifosi l'aumento del braccio della forza peso W determina un incremento della forza di contrazione richiesta agli estensori:

$$F_E = \frac{0.11 \cdot BW \cdot l_W}{l_E} = \frac{0.11 \cdot BW \cdot 95}{20} = 0.522 \cdot BW$$

Il corpo vertebrale risulta inoltre inclinato di un angolo maggiore. Nel caso in esame tale valore è assunto pari a  $30^\circ$ , come in figura:



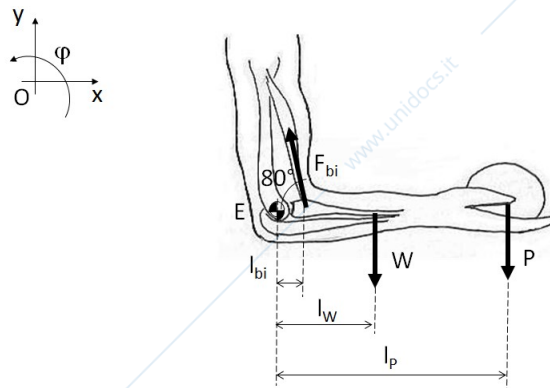
Le equazioni di equilibrio in direzione x e y forniscono, in questo caso:

$$J_x = F_E \cdot \sin 5^\circ - W \cdot \sin 30^\circ = 0.522 \cdot BW \cdot \sin 5^\circ - 0.11 \cdot BW \cdot \sin 30^\circ = -0.009 \cdot BW$$

$$J_y = F_E \cdot \cos 5^\circ + W \cdot \cos 30^\circ = 0.522 \cdot BW \cdot \cos 5^\circ + 0.11 \cdot BW \cdot \cos 30^\circ = 0.615 \cdot BW$$

### 9. CALCOLO DELLE FORZE AGENTI SULL'ARTICOLAZIONE DEL GOMITO (SISTEMA NON RIDONDANTE)

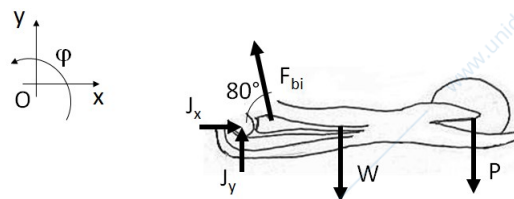
Si calcolino le forze agenti sull'articolazione del gomito in condizioni di contrazione isometrica nella configurazione di avambraccio flesso di  $90^\circ$ , come in figura, per un soggetto di peso corporeo  $BW$  pari a 800 N. Su mano avambraccio agiscono il peso proprio dei segmenti  $W$  e un peso portato dalla mano  $P = 50$  N. Si consideri l'azione del solo biceps brachii, con risultante  $F_{bi}$  inclinata di  $80^\circ$  rispetto all'asse orizzontale. Le distanze  $l_{bi}$ ,  $l_w$  e  $l_p$  sono misurate in orizzontale e sono pari a 40 mm, 188 mm e 400 mm, rispettivamente.



Non essendo specificato il valore del peso proprio di mano e avambraccio ci si riferisce al valore medio deducibile dalla apposita tabella:

$$W = 0.022 \cdot BW = 0.022 \cdot 800 = 17.6 \text{ N}$$

Indicate con  $J_x$  e  $J_y$  le componenti della reazione  $J$  agente sul centro di articolazione del gomito, il diagramma di corpo libero è rappresentato nella figura seguente:



Per l'equilibrio ai momenti si sceglie il polo rappresentato dal centro dell'articolazione del gomito:

$$\sum M_{i,E} = 0 \rightarrow F_{bi} \cdot l_{bi} \cdot \sin 80^\circ - W \cdot l_w - P \cdot l_p = 0$$

da cui si ricava il valore della risultante del biceps brachii:

$$F_{bi} = \frac{W \cdot l_w + P \cdot l_p}{l_{bi} \cdot \sin 80^\circ} = \frac{17.6 \cdot 188 + 50 \cdot 400}{40 \cdot \sin 80^\circ} = 591.6 \text{ N}$$

Per l'equilibrio in direzione x e y si ricava:

$$J_x - F_{bi} \cdot \cos 80^\circ = 0$$

$$J_y + F_{bi} \cdot \sin 80^\circ - W - P = 0$$

ottenendo

$$J_x = F_{bi} \cdot \cos 80^\circ = 591.6 \cdot \cos 80^\circ = 102.7 \text{ N}$$

$$J_y = W + P - F_{bi} \cdot \sin 80^\circ = 17.6 + 50 - 591.6 \cdot \sin 80^\circ = -515.0 \text{ N}$$

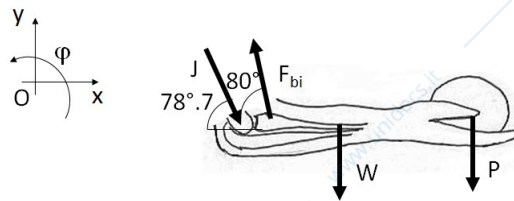
La risultante della compressione sull'articolazione del gomito è quindi pari a:

$$J = \sqrt{J_x^2 + J_y^2} = \sqrt{102.7^2 + 515.0^2} = 525.1 \text{ N}$$

L'angolo della retta di azione di J rispetto alla direzione orizzontale è:

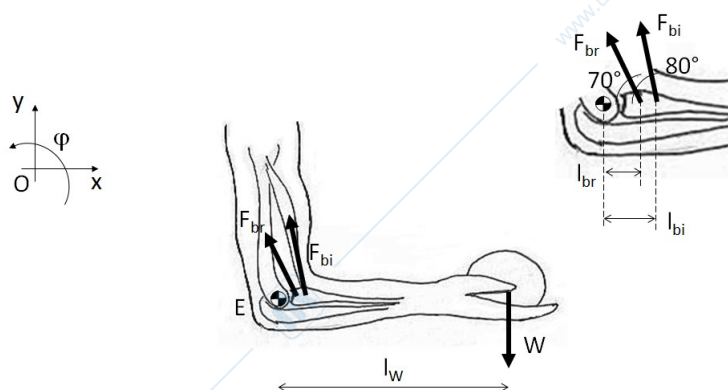
$$\alpha = \arctg\left(\frac{J_y}{J_x}\right) = \arctg\left(\frac{515.0}{102.7}\right) \cong 78^\circ.7$$

L'azione della risultante J è rappresentata nella figura seguente.



## 10. CALCOLO DELLE FORZE AGENTI SULL'ARTICOLAZIONE DEL GOMITO (SISTEMA RIDONDANTE)

Si calcolino le forze agenti sull'articolazione del gomito in condizioni di contrazione isometrica nella configurazione di avambraccio flesso di  $90^\circ$ , soggetto all'azione della forza esterna W come in figura. Si consideri la contemporanea azione della risultante del biceps brachii  $F_{bi}$  e della risultante del brachialis  $F_{br}$ . I punti di applicazione delle due risultanti e gli angoli delle rette di applicazione sono indicati nella figura di dettaglio. Per il biceps brachii si assuma un'area trasversale fisiologica  $A_{bi}$  pari a  $10 \text{ cm}^2$ , mentre per il brachialis si assuma un'area trasversale fisiologica  $A_{br}$  pari a  $6 \text{ cm}^2$ . Per entrambi i muscoli si consideri un angolo di pennazione nullo e una medesima massima tensione in contrazione isometrica (nella configurazione di flessione indicata) pari a  $50 \text{ N/cm}^2$ . La forza W è pari a  $52.5 \text{ N}$ . Le distanze  $l_{bi}$ ,  $l_{br}$  e  $l_w$  sono misurate in orizzontale e sono pari a  $40 \text{ mm}$ ,  $35 \text{ mm}$  e  $400 \text{ mm}$ , rispettivamente.



Il sistema è ridondante, poiché alle tre incognite dell'esempio precedente si aggiunge l'incognita data dalla risultante del brachialis. L'equazione di equilibrio dei momenti rispetto al centro di articolazione del gomito è:

$$\sum M_{i,E} = 0 \rightarrow F_{bi} \cdot l_{bi} \sin 80^\circ + F_{br} \cdot l_{br} \sin 70^\circ - W \cdot l_w = 0$$

Esprimendo lunghezze in mm e forze in N, l'equazione precedente risulta:

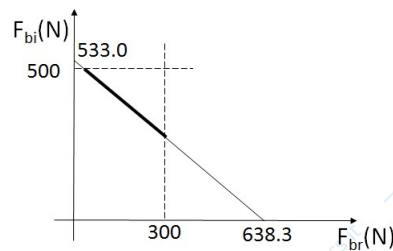
$$39.4 \cdot F_{bi} + 32.9 \cdot F_{br} = 21'000$$

che rappresenta una retta nel piano  $F_{br}$ ,  $F_{bi}$ . Considerando i limiti dati dalle massime forze di contrazione isometrica di biceps brachii e brachialis:

$$F_{bi,max} = A_{bi} \cdot 50 = 10 \cdot 50 = 500 \text{ N}$$

$$F_{br,max} = A_{br} \cdot 50 = 6 \cdot 50 = 300 \text{ N}$$

le possibili condizioni di equilibrio sono date dalle coppie di valori  $(F_{br}, F_{bi})$  che appartengono al segmento compreso tra le rette  $F_{bi} = 500$  e  $F_{br} = 300$ .



È evidente che la soluzione è comunque indeterminata. L'unicità della soluzione può essere raggiunta considerando un criterio di ottimo che descriva la condizione sotto la quale lavorano i muscoli. Un criterio generalmente adottato è quello di calcolare le forze di contrazione tali per cui si abbia:

$$\min(F_{bi}^2 + F_{br}^2)$$

Ricavando  $F_{bi}$  dall'equazione di equilibrio dei momenti e sostituendo nell'ultima espressione si ricava:

$$\min \left[ \frac{(21'000 - 32.9 \cdot F_{br})^2}{39.4^2} + F_{br}^2 \right]$$

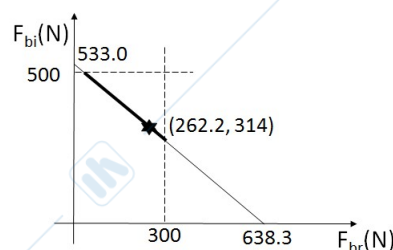
Si tratta quindi di trovare il minimo della funzione

$$f(F_{br}) = (21'000 - 32.9 \cdot F_{br})^2 + 39.4^2 \cdot F_{br}^2$$

Tale funzione ha un andamento parabolico e trova il minimo per  $F_{br} = 262.2 \text{ N}$ . Sostituendo questo valore nell'equazione di equilibrio dei momenti e ricavando  $F_{bi}$  si ottiene:

$$F_{bi} = \frac{21'000 - 32.9 \cdot F_{br}}{39.4} = \frac{21'000 - 32.9 \cdot 262.2}{39.4} = 314.0 \text{ N}$$

Si sono così determinate le forze di contrazione che assicurano l'equilibrio e rispettano il criterio adottato. Il punto corrispondente è indicato con un asterisco nella figura seguente.



Le componenti della reazione al vincolo dato dall'articolazione del gomito possono essere determinate procedendo in modo analogo a quanto fatto nell'esercizio precedente, scrivendo le equazioni di equilibrio in direzione x e y:

$$J_x - F_{bi} \cdot \cos 80^\circ - F_{br} \cdot \cos 70^\circ = 0$$

$$J_y + F_{bi} \cdot \sin 80^\circ + F_{br} \cdot \cos 70^\circ - W = 0$$

da cui si ricava

$$J_x = F_{bi} \cdot \cos 80^\circ + F_{br} \cdot \cos 70^\circ = 314.0 \cdot \cos 80^\circ + 262.2 \cdot \cos 70^\circ = 144.2 \text{ N}$$

$$J_y = W - F_{bi} \cdot \sin 80^\circ - F_{br} \cdot \sin 70^\circ = 50 - 314.0 \cdot \sin 80^\circ - 262.2 \cdot \sin 70^\circ = -505.6 \text{ N}$$

La risultante della compressione sull'articolazione del gomito è quindi pari a:

$$J = \sqrt{J_x^2 + J_y^2} = \sqrt{144.2^2 + 505.6^2} = 525.8 \text{ N}$$

L'angolo della retta di azione di J rispetto alla direzione orizzontale è:

$$\alpha = \arctg\left(\frac{J_y}{J_x}\right) = \arctg\left(\frac{505.6}{144.2}\right) \cong 74^\circ$$

Nella soluzione di problemi simili a quello proposto, anche considerando problemi dinamici, possono essere proposti altri criteri di ottimizzazione. I criteri sono applicabili anche a casi con un grado maggiore di indeterminazione, ad esempio nel caso di azione contemporanea di un numero  $m > 2$  di muscoli. Criteri applicabili sono:

$$\min\left(\sum_{i=1}^m F_i^n\right)$$

$$\min\left[\sum_{i=1}^m (F_i / A_i)^n\right]$$

$$\min\left[\sum_{i=1}^m (F_i / F_{i,\max})^n\right]$$

dove  $A_i$  rappresentano le aree trasversali fisiologiche,  $F_{i,\max}$  le massime forze sviluppabili dai muscoli in condizioni di contrazione isometrica e  $F_i$  le forze di contrazione muscolare che assicurano l'equilibrio. Il coefficiente  $n$  a esponente è generalmente preso pari a 2 o 3. È stato proposto che la scelta del coefficiente pari a 2 consenta di descrivere condizioni nei quali l'azione di coordinazione muscolare è chiamata a compiti che richiedono precisione nel posizionamento o nello sviluppo di forza. Il criterio di minimo basato sulle tensioni  $F_i/A_i$  con  $n = 3$  sembra descrivere bene le condizioni nelle quali un soggetto tende ad agire ricercando la minima fatica muscolare (ricerca del massimo tempo di applicazione di una certa tensione muscolare).

ALLEGATI: TABELLE DEI DATI ANTROPOMETRICI

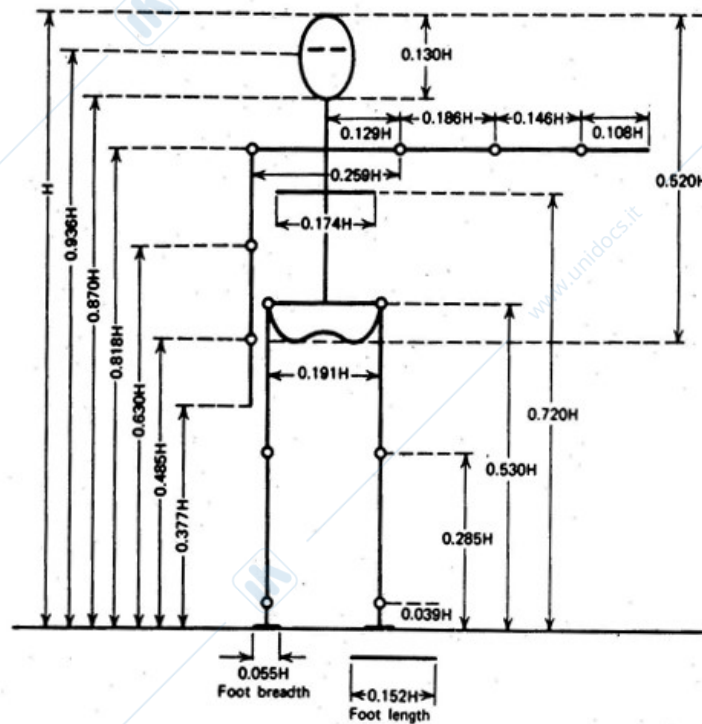
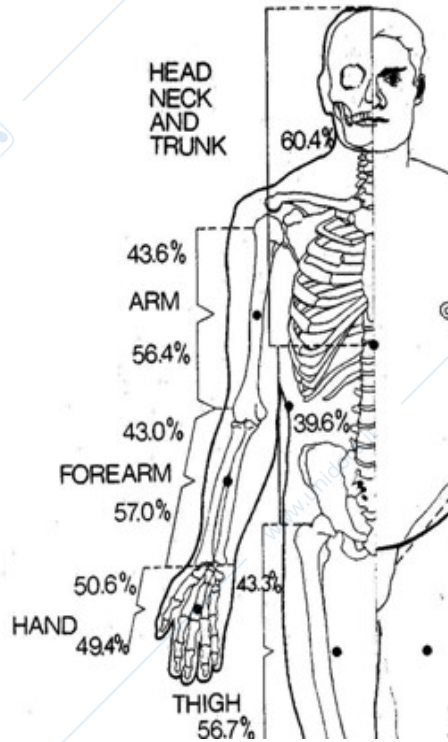


TABLE 3.1 Anthropometric Data

Segment	Definition	Segment Weight/ Total Body Weight	Center of Mass/ Segment Length		Radius of Gyration/ Segment Length			Density
			Proximal	Distal	C of G	Proximal	Distal	
Hand	Wrist axis/knuckle II middle finger	0.006 M	0.506	0.494 P	0.297	0.587	0.577 M	1.16
Forearm	Elbow axis/ulnar styloid	0.016 M	0.430	0.570 P	0.303	0.526	0.647 M	1.13
Upper arm	Glenohumeral axis/elbow axis	0.028 M	0.436	0.564 P	0.322	0.542	0.645 M	1.07
Forearm and hand	Elbow axis/ulnar styloid	0.022 M	0.682	0.318 P	0.468	0.827	0.565 P	1.14
Total arm	Glenohumeral joint/ulnar styloid	0.050 M	0.530	0.470 P	0.368	0.645	0.596 P	1.11
Foot	Lateral malleolus/head metatarsal II	0.0145 M	0.50	0.50 P	0.475	0.690	0.690 P	1.10
Leg	Femoral condyles/medial malleolus	0.0465 M	0.433	0.567 P	0.302	0.528	0.643 M	1.09
Thigh	Greater trochanter/femoral condyles	0.100 M	0.433	0.567 P	0.323	0.540	0.653 M	1.05
Foot and leg	Femoral condyles/medial malleolus	0.061 M	0.606	0.394 P	0.416	0.735	0.572 P	1.09
Total leg	Greater trochanter/medial malleolus	0.161 M	0.447	0.553 P	0.326	0.560	0.650 P	1.06

TABLE 3.1 (Continued)

Segment	Definition	Segment Weight/ Total Body Weight	Center of Mass/ Segment Length		Radius of Gyration/ Segment Length			Density		
			Proximal	Distal	C of G	Proximal	Distal			
Head and neck	C7-T1 and 1st rib/ear canal	0.081 M	1.000	—	PC	0.495	0.116	—	PC	1.11
Shoulder mass	Sternoclavicular joint/ glenohumeral axis	—	0.712	0.288	—	—	—	—	—	1.04
Thorax	C7-T1/T12-L1 and diaphragm*	0.216 PC	0.82	0.18	—	—	—	—	—	0.92
Abdomen	T12-L1/L4-L5*	0.139 LC	0.44	0.56	—	—	—	—	—	—
Pelvis	L4-L5/greater trochanter*	0.142 LC	0.105	0.895	—	—	—	—	—	—
Thorax and abdomen	C7-T1/L4-L5*	0.355 LC	0.63	0.37	—	—	—	—	—	—
Abdomen and pelvis	T12-L1/greater trochanter*	0.281 PC	0.27	0.73	—	—	—	—	—	1.01
Trunk	Greater trochanter/ glenohumeral joint*	0.497 M	0.50	0.50	—	—	—	—	—	1.03
Trunk head neck	Greater trochanter/ glenohumeral joint*	0.578 MC	0.66	0.34 P	0.503	0.830	0.607 M	—	—	—
Head, arms, and trunk (HAT)	Greater trochanter/ glenohumeral joint*	0.678 MC	0.626	0.374 PC	0.496	0.798	0.621 PC	—	—	—
HAT	Greater trochanter/mid rib	0.678	1.142	—	0.903	1.456	—	—	—	—

\*NOTE: These segments are presented relative to the length between the greater trochanter and the glenohumeral joint.

Source Codes: M, Dempster via Miller and Nelson; *Biomechanics of Sport*, Lea and Febiger, Philadelphia, 1973. P, Dempster via Plagenhoef; *Patterns of Human Motion*, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, NJ, 1971. L, Dempster via Plagenhoef from living subjects; *Patterns of Human Motion*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1971. C, Calculated.

**BIOMECCANICA A.A. 2018-19**  
**VALUTAZIONE DI STATI DEFORMATIVI E TENSIONALI**

### 1. VALUTAZIONE DELLA VARIAZIONE DI VOLUME

Si calcoli il volume in configurazione deformata di un elemento cubico di lato iniziale  $L_0$  che subisca una deformazione omogenea data dal tensore di deformazione indicato:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0.02 & 0.02 & 0 \\ 0.02 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0.015 \end{bmatrix}$$

La variazione relativa di volume è data dal primo invariante della deformazione:

$$\frac{V - V_0}{V_0} = I_1$$

essendo  $V$  il volume deformato e  $V_0$  quello indeformato. Calcolato quindi:

$$I_1 = \sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ii} = 0.02 + 0.01 + 0.015 = 0.045$$

il volume deformato si ottiene come

$$V = (1 + I_1) V_0 = 1.045 \cdot L_0^3$$

### 2. VALUTAZIONE DELLO STATO DEFORMATIVO DEVIATORICO

Si calcoli la parte deviatorica del tensore di deformazione proposto nell'esercizio precedente.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0.02 & 0.02 & 0 \\ 0.02 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0.015 \end{bmatrix}$$

A partire dal valore del primo invariante già calcolato nel precedente esercizio  $I_1=0.045$ , il tensore deviatorico è dato da:

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{I_1}{3} \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0.02 - 0.015 & .02 & 0 \\ .02 & 0.01 - 0.015 & 0 \\ 0 & 0 & 0.015 - 0.015 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.005 & .02 & 0 \\ .02 & -0.005 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si noti come il primo invariante della parte deviatorica del tensore di deformazione risulta (giustamente) nullo.

### 3. CALCOLO DELLE DEFORMAZIONI PRINCIPALI E DELLE DIREZIONI PRINCIPALI DI DEFORMAZIONE

Dato il tensore di deformazione piano seguente, calcolarne le deformazioni principali e le direzioni principali di deformazione.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0 & 0.02 & 0 \\ 0.02 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

È un problema agli autovalori, risolvibile trovando le radici del polinomio caratteristico, di terzo grado, derivabile imponendo l'annullamento del seguente determinante:

$$\det(\boldsymbol{\varepsilon} - \varepsilon_\alpha \mathbf{I}) = \det \begin{bmatrix} -\varepsilon_\alpha & 0.02 & 0 \\ 0.02 & -\varepsilon_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon_\alpha \end{bmatrix} = 0$$

ottenendo quindi:

$$-\varepsilon_\alpha [-\varepsilon_\alpha (-\varepsilon_\alpha) - 0.02 \cdot 0.02] = 0 \rightarrow \varepsilon_\alpha [\varepsilon_\alpha^2 - 0.02^2] = 0$$

Le radici del polinomio forniscono i valori delle deformazioni principali:

$$\varepsilon_1 = 0.02 \quad \varepsilon_2 = 0 \quad \varepsilon_3 = -0.02$$

La direzione principale associata a  $\varepsilon_\alpha$  è data dalla soluzione del sistema omogeneo

$$(\boldsymbol{\varepsilon} - \varepsilon_\alpha \mathbf{I})\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

essendo  $\mathbf{u}$  un vettore incognito.

Secondo tale procedimento per la deformazione principale  $\varepsilon_1 = 0.02$  si ottiene

$$\begin{bmatrix} -0.02 & 0.02 & 0 \\ 0.02 & -0.02 & 0 \\ 0 & 0 & -0.02 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

da cui le  $\infty^1$  soluzioni

$$\begin{bmatrix} u_1 = \bar{u} \\ u_2 = \bar{u} \\ u_3 = 0 \end{bmatrix}$$

essendo  $\bar{u}$  un parametro arbitrario. La direzione principale è quindi data dal versore  $\mathbf{n}_1 = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0)$ , ottenuto normalizzando il precedente vettore. Per la deformazione principale  $\varepsilon_2 = -0.02$  si ricava

$$\begin{bmatrix} 0.02 & 0.02 & 0 \\ 0.02 & 0.02 & 0 \\ 0 & 0 & 0.02 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

da cui le  $\infty^1$  soluzioni

$$\begin{bmatrix} u_1 = \bar{u} \\ u_2 = -\bar{u} \\ u_3 = 0 \end{bmatrix}$$

essendo  $\bar{u}$  un parametro arbitrario. La direzione principale associata a  $\varepsilon_2 = -0.02$  è quindi data dal versore  $\mathbf{n}_2 = (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, 0)$ . Infine, per la deformazione principale  $\varepsilon_3 = 0$  il sistema

$$\begin{bmatrix} 0 & 0.02 & 0 \\ 0.02 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

porge le  $\infty^1$  soluzioni

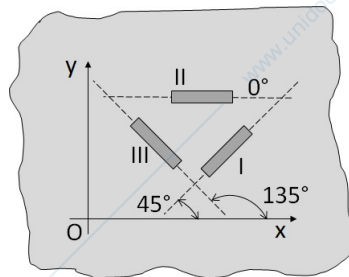
$$\begin{bmatrix} u_1 = 0 \\ u_2 = 0 \\ u_3 = \bar{u} \end{bmatrix}$$

da cui il versore  $\mathbf{n}_3 = (0,0,1)$  come direzione principale associata. È facile verificare che le direzioni principali sono mutuamente ortogonali. Descrivendo il tensore di deformazione rispetto al sistema di riferimento dato da  $(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3)$  si ottiene:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0.02 & 0 & 0 \\ 0 & -0.02 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

#### 4. CALCOLO DELLO STATO DEFORMATIVO ATTRAVERSO ESTENSIMETRI

Lo stato deformativo piano agente su un corpo è misurato dai 3 estensimetri indicati in figura, i quali forniscono le componenti di dilatazione nelle direzioni indicate, rispetto al sistema di coordinate generico  $(x,y)$



Dagli estensimetri si leggono i valori  $\varepsilon_I = 110 \times 10^{-6}$ ,  $\varepsilon_{II} = 212.5 \times 10^{-6}$ ,  $\varepsilon_{III} = 240 \times 10^{-6}$  (NB: i valori letti non si riferiscono a direzioni principali, ma a quelle di orientamento degli estensimetri). Si calcolino le deformazioni principali e il massimo scorrimento angolare nel piano  $(x,y)$ .

Dato un tensore di deformazione di tipo piano generico:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy}/2 & 0 \\ \gamma_{xy}/2 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

la componente di dilatazione della deformazione nella direzione di un versore generico  $\mathbf{n}_\theta = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$  è data da:

$$\varepsilon_\theta = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{n} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy}/2 & 0 \\ \gamma_{xy}/2 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{bmatrix} = \varepsilon_x \cos^2\theta + \varepsilon_y \sin^2\theta + \gamma_{xy} \cos\theta \sin\theta$$

Calcolando l'espressione precedente per i 3 angoli di orientamento si ottiene il sistema di 3 equazioni e 3 incognite

$$\begin{cases} \varepsilon_x + \varepsilon_y + \gamma_{xy} = 220 \times 10^{-6} \\ \varepsilon_x = 212.5 \times 10^{-6} \\ \varepsilon_x + \varepsilon_y + \gamma_{xy} = 220 \times 10^{-6} \end{cases}$$

Ricavando:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = 212.5 \times 10^{-6} \\ \varepsilon_y = 137.5 \times 10^{-6} \\ \gamma_{xy} = -130 \times 10^{-6} \end{cases}$$

Le deformazioni principali nel piano (x,y) si ottengono dall'equazione di secondo grado che scaturisce dall'annullamento del determinante

$$\det \begin{bmatrix} 212.5 \times 10^{-6} - \varepsilon_\alpha & -130 \times 10^{-6} \\ -130 \times 10^{-6} & 137.5 \times 10^{-6} - \varepsilon_\alpha \end{bmatrix} = 0$$

ottenendo

$$\varepsilon_1 = 250.0 \times 10^{-6} \quad \varepsilon_2 = 100.0 \times 10^{-6}$$

La direzione principale associata alla componente massima di dilatazione sarà un vettore nel piano (x,y) che si ricava dal sistema:

$$\begin{bmatrix} 212.5 - 250 & -130 \\ -130 & 137.5 - 250 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

che porge la soluzione:

$$\begin{bmatrix} u_1 = \bar{u} \\ u_2 = -0.577\bar{u} \end{bmatrix}$$

Ciò corrisponde ad una direzione orientata di un angolo pari a

$$\varphi = \arctg(0.577) \cong 30^\circ$$

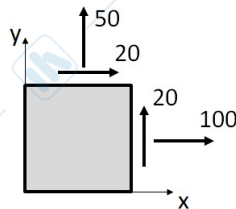
orario rispetto all'asse x. La massima deformazione tagliante in modulo è pari a:

$$\gamma_{\max} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = 150.0 \times 10^{-6}$$

Il posizionamento degli estensimetri dovrà essere sufficientemente ravvicinato, in modo tale che lo stato deformativo misurato possa considerarsi sufficientemente omogeneo nell'area considerata.

## 5. CALCOLO DELLE TENSIONI PRINCIPALI E DELLE DIREZIONI PRINCIPALI DI TENSIONE

Dato lo stato tensionale piano agente nell'intorno del punto materiale indicato in figura, si calcolino le tensioni principali e le direzioni principali di tensione mediante la valutazione degli autovalori e degli autovettori del tensore di tensione associato. I valori di tensione indicati in figura sono espressi in MPa.



Secondo le convenzioni di segno per le componenti di tensione dirette e di taglio, il tensore di tensione rispetto al sistema di riferimento indicato è dato da:

$$\sigma = \begin{bmatrix} 100 & 20 & 0 \\ 20 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le tensioni principali si ottengono come autovalori del tensore, cioè come radici della equazione di terzo corrispondente all'annullamento del determinante:

$$\det(\sigma - sI) = 0 \rightarrow \det \begin{bmatrix} 100-s & 20 & 0 \\ 20 & 50-s & 0 \\ 0 & 0 & -s \end{bmatrix} = 0$$

da cui si ricava

$$-s[(100-s)(50-s) - 20 \cdot 20] = 0$$

$$s[s^2 - 150s + 4600]$$

Le tensioni principali sono quindi

$$s_{1,2} = \frac{150 \pm \sqrt{150^2 - 4 \cdot 4600}}{2} = \begin{cases} 107.0 \text{ MPa} \\ 43.0 \text{ MPa} \end{cases}$$

$$s_3 = 0$$

Le direzioni principali di tensione si ottengono come soluzione dei sistemi omogenei:

$$\begin{bmatrix} 100-s_i & 20 & 0 \\ 20 & 50-s_i & 0 \\ 0 & 0 & -s_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (i=1,2,3)$$

Per la tensione principale  $s_3=0$  si ricava:

$$\begin{bmatrix} 100 & 20 & 0 \\ 20 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = 0 \\ u_3 = \bar{u} \end{cases}$$

dove il termine  $\bar{u}$  rappresenta un valore arbitrario. Procedendo con la normalizzazione del vettore, la direzione principale associata alla tensione principale  $s_3=0$  è data quindi dal versore  $(0,0,1)$ . Per la tensione principale  $s_1=107$  MPa si ricava:

$$\begin{bmatrix} 100-107 & 20 & 0 \\ 20 & 50-107 & 0 \\ 0 & 0 & -107 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{57}{20} \bar{u} \\ u_2 = \bar{u} \\ u_3 = 0 \end{cases}$$

La direzione principale è quindi data dal versore  $(0.944, 0.331, 0)$ , che rappresenta un asse ruotato di un angolo antiorario

$$\varphi = \arctg\left(\frac{0.331}{0.944}\right) \cong 19^\circ.3$$

rispetto l'asse x. Infine, per la tensione principale  $s_2=43$  MPa si ricava:

$$\begin{bmatrix} 100-43 & 20 & 0 \\ 20 & 50-43 & 0 \\ 0 & 0 & -43 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} u_1 = -\frac{7}{20}\bar{u} \\ u_2 = \bar{u} \\ u_3 = 0 \end{cases}$$

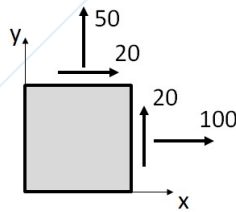
La direzione principale è quindi data dal versore  $(-0.331, 0.944, 0)$ , che rappresenta un asse ruotato di un angolo orario

$$\varphi = \arctg\left(\frac{0.944}{-0.331}\right) \cong -70^\circ.7$$

rispetto all'asse x. Come previsto, le direzioni principali sono mutuamente perpendicolari.

## 6. CALCOLO DELLE TENSIONI PRINCIPALI E DELLE DIREZIONI PRINCIPALI DI TENSIONE

Dato lo stato tensionale piano agente nell'intorno del punto materiale indicato in figura (uguale a quello dell'esercizio precedente), si calcolino le tensioni principali e le direzioni principali di tensione mediante l'utilizzo della costruzione grafica dei cerchi di Mohr. I valori di tensione indicati in figura sono espressi in MPa.



Sulla base delle ipotesi del problema risulta identificato l'asse z come direzione principale delle tensioni associata ad una tensione principale nulla. Secondo le convenzioni di segno per le componenti di tensione dirette e di taglio, si ricavano i punti:

$$P(\sigma_x, -\tau_{xy}) = P(100, -20)$$

$$Q(\sigma_y, -\tau_{xy}) = Q(50, 20)$$

che disegnati nel piano delle tensioni  $(\sigma, \tau)$  consentono di identificare il cerchio di Mohr associato alla giacitura x,y. Il centro della circonferenza sull'asse delle ascisse è dato da:

$$c = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{100 + 50}{2} = 75$$

Il raggio della circonferenza si ricava come:

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{\left(\frac{100 - 50}{2}\right)^2 + 20^2} = 32.0$$

Le tensioni principali relative alle direzioni principali giacenti nel piano (x,y) risultano quindi:

$$s_1 = c + R = 75 + 32 = 107.0 \text{ MPa}$$

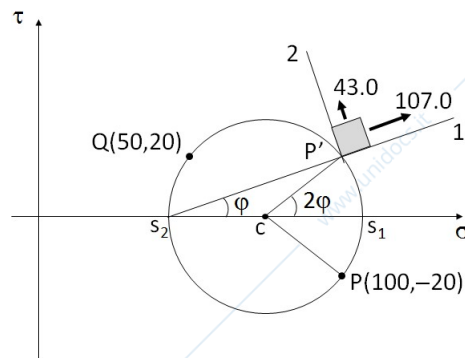
$$s_2 = c - R = 75 - 32 = 43.0 \text{ MPa}$$

L'angolo compreso tra direzione principale associata a  $s_1$  e asse x è dato da

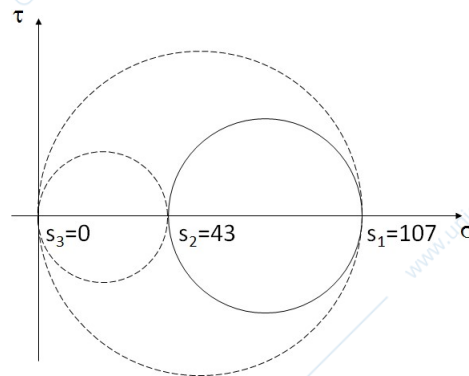
$$\varphi = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left| \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right| = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left| \frac{2 \cdot 20}{100 - 50} \right| \cong 19^\circ.3$$

La costruzione grafica per la determinazione della direzione della direzione principale 1 e, di conseguenza, della direzione principale 2 è indicata nella figura seguente. Per la determinazione della direzione principale 1 si procede come indicato:

- si ruota il segmento (c,P) in senso antiorario attorno a c, essendo c il centro della circonferenza, sino a sovrapporlo all'asse  $\sigma$ ;
- si ruota l'asse (c,  $\sigma$ ) di una pari quantità, in senso antiorario, attorno a c; determinando quindi per intersezione il punto P' sulla circonferenza;
- il segmento ( $s_2, P'$ ) identifica la direzione principale 1.



I risultati sono ovviamente coincidenti con quelli ottenuti con la procedura alternativa nel precedente esercizio. È possibile anche determinare i cerchi di Mohr relativi alle altre due giaciture di interesse. Essi sono indicati in linea tratteggiata nella seguente figura:



Si noti come la massima tensione tangenziale agente sul punto materiale considerato si trova su una giacitura differente da quella dello stato piano di tensione. Tale valore si trova immediatamente come:

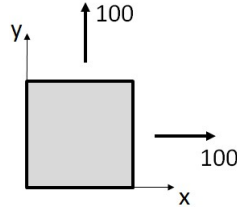
$$\tau_{\max} = \frac{s_1 - s_3}{2} = \frac{107.0 - 0}{2} = 53.5 \text{ MPa}$$

La tensione tangenziale massima per le giaciture con normale appartenente al piano (x,y) è invece:

$$\tau_{\max} = \frac{s_1 - s_2}{2} = \frac{107.0 - 43.0}{2} = 32.0 \text{ MPa}$$

## 7. CALCOLO DELLE DIREZIONI PRINCIPALI DI TENSIONE

Dato lo stato tensionale piano agente nell'intorno del punto materiale indicato in figura, con valori di tensione espressi in MPa, si determinino le direzioni principali di tensione relative alla giacitura di normale appartenente al piano  $(x,y)$ .



Per il calcolo delle tensioni principali relative al piano in esame basta risolvere l'equazione derivante da:

$$\det \begin{bmatrix} 100-s & 0 \\ 0 & 100-s \end{bmatrix} = 0$$

facendo quindi riferimento ad una forma ridotta del tensore di tensione. Si ricava immediatamente:

$$(100-s)^2 = 0$$

Le tensioni  $s_1$  e  $s_2$  sono pertanto coincidenti e pari a 100 MPa. Le direzioni principali di tensione si ottengono dalla soluzione del sistema omogeneo:

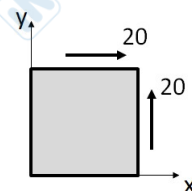
$$\begin{bmatrix} 100-100 & 0 \\ 0 & 100-100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sistema che ammette  $\infty^2$  soluzioni. Ogni direzione nel piano  $(x,y)$  rappresenta pertanto una direzione principale di tensione. Per qualsiasi giacitura di normale appartenente a  $(x,y)$  lo stato di tensione avrà la sola componente normale, pari a 100 MPa.

La rappresentazione attraverso i cerchi di Mohr fornirebbe un cerchio di raggio nullo, centrato nel punto  $(100,0)$  nel piano delle tensioni  $(\sigma,\tau)$ .

## 8. CALCOLO DELLE TENSIONI PRINCIPALI E DELLE DIREZIONI PRINCIPALI DI TENSIONE

Calcolare le direzione principali di tensione e le relative tensioni principali per lo stato di tensione piano indicato in figura (con valori di tensione espressi in MPa).



Le tensioni principali relative al piano in esame sono le radici dell'equazione derivante da:

$$\det \begin{bmatrix} -s & 20 \\ 20 & -s \end{bmatrix} = 0$$

facendo quindi riferimento, come nel caso precedente ad una forma ridotta del tensore di tensione. Si ricava immediatamente:

$$s^2 - 20^2 = 0$$

$$s_{1,2} = \begin{cases} 20 \text{ MPa} \\ -20 \text{ MPa} \end{cases}$$

essendo  $s_3 = 0$ . La direzione principale associata a quest'ultima è il versore  $(0,0,1)$ . La direzione principale di tensione relativa a  $s_1$  si ottiene dalla soluzione del seguente sistema:

$$\begin{bmatrix} -20 & 20 \\ 20 & -20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

avendo già identificato la terza componente, necessariamente nulla. La direzione principale è identificata da vettori  $(u,u,0)$ , ed è quindi la bisettrice del I-III quadrante. La direzione principale associata a  $s_2$  si ottiene da:

$$\begin{bmatrix} 20 & 20 \\ 20 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

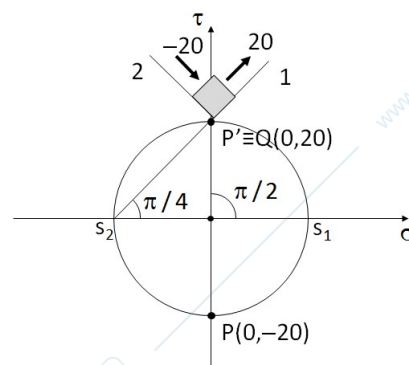
ed è quindi identificata da vettori del tipo  $(u,-u,0)$ ; essa coincide con la bisettrice del II-IV quadrante. Normalizzando i vettori, come d'uso, le direzioni principali relative alle tensioni non nulle sono quindi:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Procedendo con il metodo grafico dei cerchi di Mohr, si deve partire dal posizionamento dei punti:

$$P(\sigma_x, -\tau_{xy}) = P(0, -20)$$

$$Q(\sigma_y, -\tau_{xy}) = Q(0, 20)$$



Ricavando facilmente  $s_1 = -s_2 = 20$  MPa e direzioni principali come in figura. La determinazione della direzione principale relativa alla tensione principale  $s_1$  avviene come nell'esercizio 1:

- si ruota il segmento  $(c,P)$  in senso antiorario attorno a  $c$ , essendo  $c$  il centro della circonferenza, sino a sovrapporlo all'asse  $\sigma$ ;
- si ruota l'asse  $(c, \sigma)$  di una pari quantità, in senso antiorario, attorno a  $c$ ; determinando quindi per intersezione un punto  $P'$  sulla circonferenza che, in questo caso particolare, coincide con  $Q$ ;
- il segmento  $(s_2, P')$  identifica la direzione principale 1.

## 9. VALUTAZIONE DI STATI DI TENSIONE

Dimostrare che lo stato di tensione descritto dal tensore (in MPa) seguente è di tipo mono-assiale. Calcolare quindi il valore della tensione principale non nulla e la sua direzione. Calcolare, infine, la componente idrostatica della tensione

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Le tensioni principali si ottengono come radici della equazione di terzo grado che si ottiene imponendo l'annullarsi del seguente determinante:

$$\det(\boldsymbol{\sigma} - s\mathbf{I}) = 0 \rightarrow \det \begin{bmatrix} 1-s & 1 & 1 \\ 1 & 1-s & 1 \\ 1 & 1 & 1-s \end{bmatrix} = 0$$

ottenendo quindi

$$(1-s)[(1-s)^2 - 1] - 1(1-s-1) + 1(1-1+s) = 0$$

$$s^2(3-s) = 0$$

e tensioni principali

$$s_1 = 3 \text{ MPa}$$

$$s_{2,3} = 0$$

Ciò dimostra che lo stato di tensione è di tipo monoassiale. La direzione principale associata alla tensione principale non nulla è data dalla soluzione del sistema omogeneo:

$$\begin{bmatrix} 1-3 & 1 & 1 \\ 1 & 1-3 & 1 \\ 1 & 1 & 1-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} u_1 = \bar{u} \\ u_2 = \bar{u} \\ u_3 = \bar{u} \end{cases}$$

Normalizzando il vettore si trova

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Per definizione la pressione idrostatica è pari a

$$p = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 s_i = 1 \text{ MPa}$$

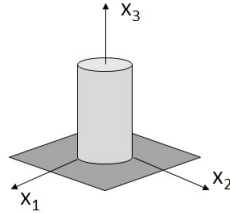
Il tensore che rappresenta la parte idrostatica della tensione è quindi

$$p\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

con componenti espresse in MPa.

## 10. SOLUZIONE DELLE EQUAZIONI INDEFINITE DI EQUILIBRIO

Trovare una soluzione di tensioni equilibrate per un cilindro di altezza  $H$ , appoggiato al piano identificato da  $x_3=0$  e soggetto al solo peso proprio, agente nella direzione  $-x_3$ .



Si deve trovare una soluzione che soddisfi le equazioni indefinite di equilibrio e le condizioni al contorno. Indicata con  $\gamma$  la forza peso per unità di volume, le equazioni indefinite di equilibrio si scrivono come:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_3} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{32}}{\partial x_3} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} - \gamma &= 0\end{aligned}$$

Una soluzione della precedente prevede che siano nulle tutte le componenti di tensione a meno della componente  $\sigma_{33}$ , per la quale dovrà risultare:

$$\frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} - \gamma = 0 \rightarrow \sigma_{33} = \gamma \cdot x_3 + C$$

essendo  $C$  una costante. Le condizioni al contorno nella superficie libera in  $x_3=H$  (tensione nulla) consentono di determinare  $C$  e, quindi, definire il valore in ogni punto:

$$\sigma_{33} = \gamma \cdot (x_3 - H)$$

Le condizioni al contorno sul piano di appoggio prevedono tensioni nella sola direzione  $x_3$ , non potendo esserci componenti tangenziali in virtù della condizione di appoggio ipotizzata. La reazione vincolare si determina dalle condizioni al contorno  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{r}$  dove  $\mathbf{n}$  è il versore che orienta la superficie del corpo nella parte vincolata e  $\mathbf{r}$  la reazione.

Notando che la normale alla base inferiore è  $(0,0,-1)$ , la reazione vincolare sarà data da:

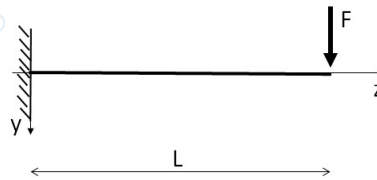
$$\mathbf{r}_3 = \gamma \cdot H$$

Si noti che la reazione vincolare è orientata nel verso positivo dell'asse  $x_3$ , quindi giustamente opposta al verso di azione della forza peso.

**BIOMECCANICA A.A. 2018-19**  
**STATI TENSIONALI E DEFORMATIVI DI SISTEMI DI TRAVI**

## 1. CALCOLO DELLA DEFORMATA FLESSIONALE

Si calcoli l'abbassamento e la rotazione nella sezione d'estremità della struttura in figura, soggetta alla forza concentrata  $F$ , mediante il procedimento di integrazione dell'equazione della linea elastica. Si consideri una rigidezza flessionale costante pari a  $EJ$ .



In base alle condizioni di equilibrio il momento flettente in una sezione generica di ascissa  $z$  è pari a:

$$M(z) = -F(L-z)$$

Richiamando la relazione tra momento e curvatura

$$M = -EJy''$$

si può scrivere:

$$-F(L-z) = -EJy''$$

ottenendo quindi l'equazione differenziale:

$$y'' = \frac{FL}{EJ} - \frac{Fz}{EJ}$$

Procedendo con l'integrazione doppia si ricavano gli andamenti della rotazione dell'asse della trave e del suo spostamento trasversale:

$$y' = \frac{FL}{EJ}z - \frac{1}{2} \frac{Fz^2}{EJ} + C_1$$

$$y = \frac{1}{2} \frac{FL}{EJ}z^2 - \frac{1}{6} \frac{Fz^3}{EJ} + C_1z + C_2$$

Le costanti di integrazione sono determinate attraverso l'imposizione delle condizioni di vincolo:

$$\begin{cases} y'(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{FL}{EJ} \cdot 0 - \frac{1}{2} \frac{F \cdot 0^2}{EJ} + C_1 = 0 \\ \frac{1}{2} \frac{FL}{EJ} \cdot 0^2 - \frac{1}{6} \frac{F \cdot 0^3}{EJ} + C_1 \cdot 0 + C_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 0 \end{cases}$$

Gli andamenti di rotazione e abbassamento sono quindi dati da:

$$y'(z) = \frac{FL}{EJ}z - \frac{1}{2} \frac{Fz^2}{EJ}$$

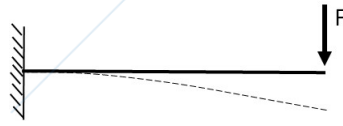
$$y(z) = \frac{1}{2} \frac{FL}{EJ}z^2 - \frac{1}{6} \frac{Fz^3}{EJ}$$

In corrispondenza della sezione di estremità libera si realizzano i valori massimi, che sono pari a:

$$y'(L) = \frac{FL}{EJ}L - \frac{1}{2} \frac{FL^2}{EJ} = \frac{FL^2}{EJ} \left( 1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \frac{FL^2}{EJ}$$

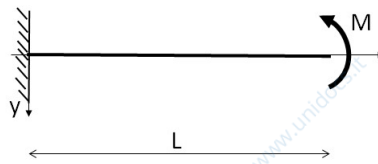
$$y(L) = \frac{1}{2} \frac{FL}{EJ}L^2 - \frac{1}{6} \frac{FL^3}{EJ} = \frac{FL^3}{EJ} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{3} \frac{FL^3}{EJ}$$

L'andamento qualitativo della deformata è rappresentato nella seguente figura.



## 2. CALCOLO DELLA DEFORMATA FLESSIONALE

Si calcoli la traslazione verticale e la rotazione nella sezione d'estremità della struttura in figura, soggetta alla coppia  $M$ , mediante il procedimento di integrazione dell'equazione della linea elastica. Si consideri una rigidezza flessionale costante pari a  $EJ$ .



Sulla trave agisce un momento flettente costante e positivo pari a  $M$ . L'equazione della linea elastica è quindi data da:

$$EJy'' = -M$$

Integrando si ottiene:

$$EJy' = -Mz + C_1$$

$$EJy = -\frac{1}{2}Mz^2 + C_1z + C_2$$

Le condizioni di vincolo consentono di scrivere:

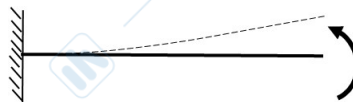
$$\begin{cases} EJy'(0) = 0 \\ EJy(0) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -M \cdot 0 + C_1 = 0 \\ -\frac{1}{2}M \cdot 0^2 + C_1 \cdot 0 + C_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 0 \end{cases}$$

Nella sezione di estremità si avrà pertanto una rotazione antioraria e una traslazione verso l'alto dati da:

$$y' = -\frac{ML}{EJ}$$

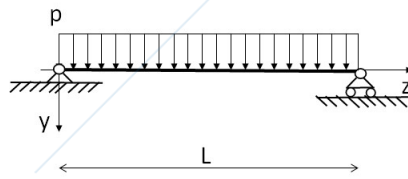
$$y = -\frac{ML^2}{2EJ}$$

L'andamento della deformata è disegnato in forma qualitativa nella figura seguente:



## 3. CALCOLO DELLA DEFORMATA FLESSIONALE

Si calcoli l'abbassamento nella sezione di mezzeria della struttura in figura mediante il procedimento di integrazione dell'equazione della linea elastica. Si consideri una rigidezza flessionale costante pari a  $EJ$ .



L'andamento del momento flettente è stato ricavato in un precedente esercizio, ottenendo:

$$M(z) = \frac{1}{2}pLz - \frac{1}{2}pz^2$$

Considerando la relazione tra momento e curvatura si perviene alla seguente equazione differenziale:

$$EJy'' = \frac{1}{2}pz^2 - \frac{1}{2}pLz$$

L'integrazione doppia consente di ricavare:

$$EJy' = \frac{1}{6}pz^3 - \frac{1}{4}pLz^2 + C_1$$

$$EJy = \frac{1}{24}pz^4 - \frac{1}{12}pLz^3 + C_1z + C_2$$

Le condizioni al contorno determinate dai vincoli impongono che nelle sezioni  $z=0$  e  $z=L$  gli abbassamenti siano nulli:

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y(L) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{24}p \cdot 0^4 - \frac{1}{12}pL \cdot 0^3 + C_1 \cdot 0 + C_2 = 0 \\ \frac{1}{24}p \cdot L^4 - \frac{1}{12}pL \cdot L^3 + C_1 \cdot L + C_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{1}{24}pL^3 \\ C_2 = 0 \end{cases}$$

L'andamento dello spostamento trasversale è quindi dato da:

$$y(z) = \frac{1}{EJ} \left( \frac{1}{24}pz^4 - \frac{1}{12}pLz^3 + \frac{1}{24}pL^3z \right)$$

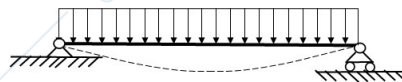
In corrispondenza della sezione di mezzzeria si ottiene:

$$y\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{pL^4}{EJ} \left( \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{16} - \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{2} \right) = \frac{5}{384} \frac{pL^4}{EJ}$$

Si noti come nella sezione di simmetria risulta nulla, come risulta da:

$$y\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{pL^3}{EJ} \left( \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{24} \right) = 0$$

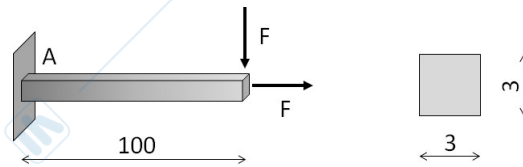
Ciò è coerente con la simmetria della struttura e del carico rispetto all'asse di simmetria. La deformata è disegnata qualitativamente nella seguente figura.



#### 4. STATI TENSIONALI E DEFORMABILITÀ

Si calcoli il regime deformativo indotto dalle forze  $F = 20$  N agenti sulla struttura in figura (misure in mm), composta da una lega di Titanio con modulo elastico  $E=110'000$  MPa, ipotizzando un comportamento elastico. Si calcolino, inoltre, le massime tensioni normali e tangenziali agenti nella sezione più sollecitata, verificando l'ammissibilità del comportamento elastico. Per la lega di Titanio si assumano limiti elastici pari a  $\sigma_{sn}=800$  MPa

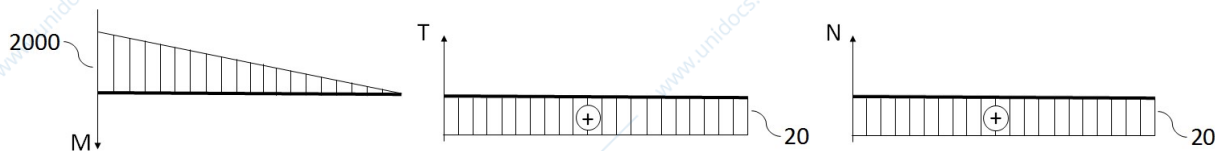
e  $\tau_{sn}=462$  MPa. Si considerino le sole deformabilità flessionale e assiale, trascurando la deformabilità tagliante della trave.



I valori di area e di momento d'inerzia della sezione sono:

$$A = 3^2 = 9 \text{ mm}^2 \quad J = \frac{1}{12} 3^4 = 6.75 \text{ mm}^4$$

Il regime delle sollecitazioni è indicato nei seguenti diagrammi, con valori di momento espressi in Nmm e valori di taglio e sollecitazione assiale espressi in N:



Lo sforzo assiale costante induce un allungamento massimo della sezione di estremità libera pari a:

$$\xi = \frac{N}{EA} L = \frac{20}{110'000 \cdot 9} \cdot 100 = 0.002 \text{ mm}$$

L'abbassamento della medesima sezione indotto dalla flessione è dato da:

$$\eta = \frac{FL^3}{3EJ} = \frac{20 \cdot 100^3}{3 \cdot 110'000 \cdot 6.75} = 8.99 \text{ mm}$$

La rotazione (oraria) è invece pari a:

$$\varphi = \frac{FL^2}{2EJ} = \frac{20 \cdot 100^2}{2 \cdot 110'000 \cdot 6.75} = 0.1347$$

angolo pari a circa  $7.7^\circ$ .

La sezione con maggiore momento flettente è quella all'incastro. In tale sezione i punti con valore massimi di tensione normale sono posti nei bordi superiore e inferiore della sezione. Al bordo superiore si ha:

$$\sigma_{\text{sup}} = \frac{N}{A} + \frac{M}{J} y_{\text{sup}} = \frac{20}{9} + \frac{-2000}{6.75} (-1.5) = 2.2 + 444.4 = 446.6 \text{ MPa}$$

Al bordo inferiore si ha invece:

$$\sigma_{\text{sup}} = \frac{N}{A} + \frac{M}{J} y_{\text{sup}} = \frac{20}{9} + \frac{-2000}{6.75} (+1.5) = 2.2 - 444.4 = -442.2 \text{ MPa}$$

In tali punti le tensioni tangenziali sono nulle e i valori di tensione normale possono confrontarsi direttamente con il limite elastico di  $800 \text{ N/mm}^2$ . Essendo inferiori a tale valore, il comportamento in tali punti è elastico. Nella altre sezioni le tensioni normali saranno comprese nei limiti sopra indicati per la sezione d'incastro, poiché il momento flettente si riduce spostandosi verso la sezione d'estremità libera.

La massima tensione tangenziale si ha in corrispondenza dell'asse neutro della flessione. Il momento statico di metà sezione rispetto a tale asse è:

$$S = 3 \cdot 1.5 \cdot \frac{1.5}{2} = 3.375 \text{ mm}^3$$

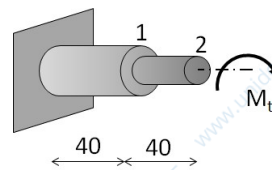
In base alla formula di Jourawsky si ottiene pertanto:

$$\tau = \frac{TS}{Jb} = \frac{20 \cdot 3.375}{6.75 \cdot 3} = 3.3 \text{ MPa}$$

valori del tutto trascurabili rispetto ai limiti elastici. In base agli andamenti delle tensioni normali e delle tensioni tangenziali sulla sezione si può ritenere che anche nei punti dove sono presenti entrambe le componenti il regime di tensioni sia nei limiti del comportamento elastico.

## 5. DEFORMABILITÀ TORSIONALE

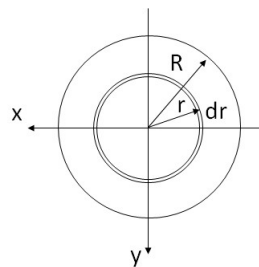
Si calcoli la rotazione nelle sezioni 1 e 2 della struttura in figura (dimensioni in mm), composta da sezioni circolari di diametro 10 mm e 8 mm, incastrata ad un estremo e soggetta ad un momento torcente  $M_t$  di 15 kNmm nell'estremità libera. Si consideri la struttura composta da una lega di Titanio avente modulo elastico  $E=110'000$  MPa, coefficiente di Poisson  $\nu=0.33$  e limite elastico delle tensioni tangenziali pari a  $\tau_{sn}=364$  MPa.



Per il calcolo della deformazione è necessario ricavare il momento polare delle sezioni:

$$J_p = \int_A r^2 dA$$

Per una sezione generica di raggio R il calcolo può essere fatto come segue.



Considerata una corona circolare di raggio  $r$  e spessore  $dr$ , la sua area è  $2\pi r \cdot dr$  e l'integrale precedente può essere espresso come:

$$J_p = \int_0^R 2\pi r \cdot r^2 dr = \int_0^R 2\pi r^3 dr = \frac{2\pi}{4} [r^4]_0^R = \frac{\pi}{2} R^4$$

Per la sezione di 10 mm di diametro si ottiene quindi:

$$J_p = \frac{\pi}{2} R^4 = \frac{\pi}{2} 5^4 = 981.7 \text{ mm}^4$$

Per la sezione di 8 mm di diametro si ha invece

$$J_p = \frac{\pi}{2} R^4 = \frac{\pi}{2} 4^4 = 402.1 \text{ mm}^4$$

Il modulo elastico tangenziale si ricava come:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{110'000}{2(1+0.33)} = 41'353 \text{ MPa}$$

Ipotizzando un comportamento elastico, la sezione intermedia ruota rispetto alla sezione di incastro di un angolo pari a:

$$\theta_1 = \frac{M_t}{GJ_p} L_1 = \frac{15'000 \cdot 40}{41'353 \cdot 981.7} = 0.0148$$

La rotazione della sezione libera è data da:

$$\theta_2 = \theta_1 + \frac{M_t}{GJ_p} L_2 = 0.0148 + \frac{15'000 \cdot 40}{41'353 \cdot 402.1} = 0.0148 + 0.0361 = 0.051$$

Gli angoli sono espressi in radianti.

Le massime tensioni tangenziali si realizzano nei punti di massimo diametro delle sezioni. Nel tratto dall'incastro alla sezione 1 si ha:

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{J_p} R = \frac{15'000 \cdot 5}{981.7} = 76.4 \text{ N/mm}^2$$

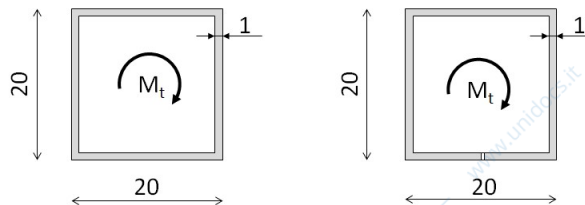
Nel tratto compreso tra le sezioni 1 e 2 risulta invece.

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{J_p} R = \frac{15'000 \cdot 4}{402.1} = 149.2 \text{ N/mm}^2$$

Poiché le massime tensioni sono inferiori al limite elastico, l'ipotesi di comportamento elastico della struttura in base alla quale sono state calcolate le rotazioni è corretta.

## 6. TENSIONI TANGENZIALI INDOTTE DA MOMENTO TORCENTE SU SEZIONI IN PARETE SOTTILE

Si calcolino le massime tensioni tangenziali indotte da un momento torcente  $M_t$  pari a 0.1 kNm agente sulle sezioni in parete sottile rappresentate in figura (dimensioni in mm).



La sezione a sinistra è di tipo chiuso, per cui la tensione massima si ottiene in base alla formula di Bredt:

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{2\Omega\delta_{\min}}$$

dove  $\Omega$  è l'area racchiusa dalla linea media della sezione e  $\delta_{\min}$  lo spessore minimo delle pareti della sezione. Dato che lo spessore è costante si ottiene:

$$\tau = \frac{100'000}{2[(20-1) \cdot (20-1)] \cdot 1} = 138.5 \text{ MPa}$$

La sezione a destra è di tipo aperto e la tensione tangenziale massima è data da:

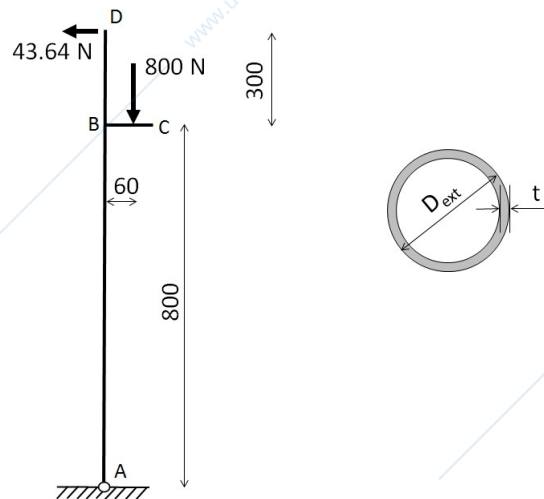
$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{\frac{1}{3} \sum_i a_i \cdot b_i^3} \cdot b_{\max}$$

dove  $a_i$  e  $b_i$  rappresentano lunghezza e spessore dei vari elementi che compongono la sezione, mentre  $b_{\max}$  è lo spessore maggiore tra questi elementi. Dato che lo spessore è costante si ottiene:

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{\frac{1}{3} \sum_i a_i \cdot b_i^3} \cdot b_{\max} = \frac{100'000}{\frac{1}{3} [3 \cdot (19 \cdot 1^3) + 2 \cdot (9.5 \cdot 1^3)]} \cdot 1 = 3947.4 \text{ MPa}$$

## 7. VERIFICA DI RESISTENZA DI UNA STAMPELLA

Con riferimento alla stampella in figura (con dimensioni espresse in mm) e soggetta alla condizione di carico indicata si verifichi se gli stati tensionali agenti nelle sezioni maggiormente sollecitate sono compatibili con il comportamento elastico della struttura. Si consideri la struttura composta da tubi di sezione circolare cava, con diametro esterno  $D_{\text{ext}}=20$  mm e spessore  $t=1.5$  mm. Si utilizza una lega d'acciaio con tensione normale di snervamento  $\sigma_{\text{sn}}=285$  N/mm<sup>2</sup> e tensione tangenziale di snervamento  $\tau_{\text{sn}}=164.5$  N/mm<sup>2</sup>.



Il diametro interno della sezione si calcola come:

$$D_{\text{int}}^2 = D_{\text{ext}}^2 - 2t = 20^2 - 2 \cdot 1.5^2 = 17 \text{ mm}^2$$

L'area della sezione resistente A è data da:

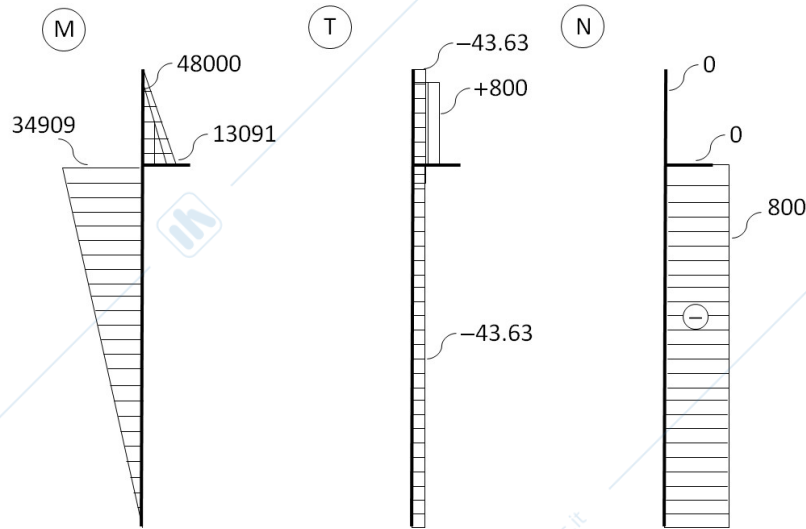
$$A = \frac{\pi}{4} (D_{\text{ext}}^2 - D_{\text{int}}^2) = \frac{\pi}{4} (20^2 - 17^2) = 87.1 \text{ mm}^2$$

Il momento d'inerzia J e il momento resistente W sono ricavati come:

$$J = \frac{\pi}{64} (D_{\text{ext}}^4 - D_{\text{int}}^4) = \frac{\pi}{64} (20^4 - 17^4) = 3754 \text{ mm}^4$$

$$W = \frac{J}{D_{\text{ext}}/2} = \frac{3754}{10} = 375.4 \text{ mm}^3$$

Il regime delle sollecitazioni è già stato calcolato in un esercizio precedente, fornendo:



dove i valori di momento flettente sono espressi in Nmm e quelli di taglio e sollecitazione assiale in N. Le sezioni maggiormente sollecitate sono la sezione del tratto B-C adiacente al nodo B (sez. I) e la sezione del tratto A-B adiacente al nodo B (sez. II).

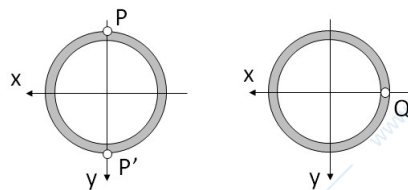
Nella sez. I sono presenti le seguenti componenti di sollecitazione:

$$M = 48'000 \text{ Nmm} \quad T = 800 \text{ N}$$

Le massime tensioni normali sono individuate nei punti P, P' della seguente figura e valgono:

$$\text{in P: } \sigma_{\max,+} = \frac{M}{W} = + \frac{48'000}{375.4} = +127.9 \text{ N/mm}^2$$

$$\text{in P': } \sigma_{\max,-} = \frac{M}{W} = - \frac{48'000}{375.4} = -127.9 \text{ N/mm}^2$$



In tali punti le tensioni tangenziali risultano nulle. Poiché il comportamento della lega d'acciaio è simmetrico in trazione e compressione, i valori precedenti debbono essere confrontati con il medesimo limite elastico, che coincide con la tensione di snervamento. Poiché entrambi i valori precedenti sono inferiori (in modulo) al valore di  $285 \text{ N/mm}^2$ , si deduce che in tali punti la struttura si comporta in regime elastico. Il rapporto:

$$\gamma = \frac{\sigma_{sn}}{\sigma_{\max,+}} = \frac{285}{127.9} = 2.22$$

ha il significato di coefficiente di sicurezza rispetto alla condizione di snervamento perché con il proprio valore rappresenta quanto distanti si è dal limite del comportamento elastico.

Le massime tensioni tangenziali si verificano nei punti dell'asse neutro x della flessione, ad esempio nel punto Q della precedente figura. Il valore della tensione tangenziale si può ottenere con la formula di Jourawsky:

$$\tau = \frac{TS}{Jb}$$

dove  $S$  è il momento statico di metà della sezione rispetto all'asse neutro e  $b$  è la lunghezza complessiva della corda che taglia la sezione in corrispondenza dell'asse neutro (cioè  $2t$ , essendo  $t$  lo spessore della sezione). Indicati con  $R_{ext}$  e  $R_{int}$  i raggi interno ed esterno, il momento statico della sezione è dato da:

$$S = \frac{2}{3}(R_{ext}^3 - R_{int}^3) = \frac{2}{3}(10^3 - 8.5^3) = 257.3 \text{ mm}^2$$

Si ottiene quindi:

$$\tau = \frac{TS}{Jb} = \frac{800 \cdot 257.3}{3754 \cdot 3} = 18.3 \text{ N/mm}^2$$

Nei punti di massima tensione tangenziale le tensioni normali sono nulle. Il precedente valore può quindi essere confrontato direttamente con il limite di snervamento  $164.5 \text{ N/mm}^2$ , rispetto al quale risulta largamente inferiore. Anche in questi punti la struttura si comporta quindi in modo elastico.

Nei punti in cui si è in presenza di tensione normale e tensione tangenziale si deve verificare il comportamento elastico utilizzando un opportuno criterio di resistenza. Per la sezione in esame si può ragionevolmente pensare che dati gli andamenti delle tensioni normali e di quelle tangenziali non ci siano punti nei quali la combinazione dei due valori dia un comportamento non elastico. Per ulteriori approfondimenti si rimanda ad uno studio dei criteri di resistenza per materiali.

Nella sez. II sono presenti le seguenti componenti di sollecitazione:

$$M = 48'000 \text{ Nmm} \quad T = 43.64 \text{ N} \quad N = -800 \text{ N}$$

Le tensioni normali sono legate ad un regime di pressoflessione, per cui nel punto massima compressione si avrà:

$$\sigma_{\max,-} = \frac{N}{A} + \frac{M}{W} = \frac{-800}{375.4} + \frac{-34'912}{375.4} = -9.2 - 93.0 = -102.2 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{\max,+} = \frac{N}{A} + \frac{M}{W} = \frac{-800}{375.4} + \frac{34'912}{375.4} = -9.2 + 93.0 = +83.8 \text{ N/mm}^2$$

Anche in questi punti le tensioni tangenziali sono nulle per cui i valori precedenti sono da confrontare con il valore snervamento di  $285 \text{ N/mm}^2$ . Essendo inferiori il comportamento è elastico.

Per quanto detto in precedenza le massime tensioni tangenziali sono date da:

$$\tau = \frac{TS}{Jb} = \frac{43.64 \cdot 257.3}{3754 \cdot 3} = 1.0 \text{ N/mm}^2$$

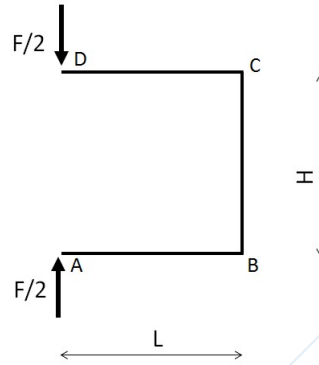
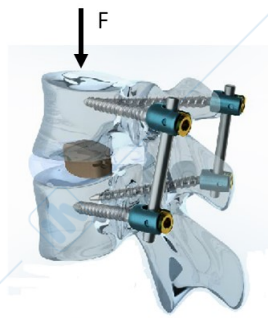
Il valore è del tutto trascurabile, anche nella verifica di punti della sezione dove vi sia la compresenza di tensioni normali e tangenziali.

Poiché la stampella è composta da sezioni costanti e avendo verificato le sezioni di massime sollecitazioni si può affermare che si comporta in regime elastico sotto l'azione dei carichi indicati.

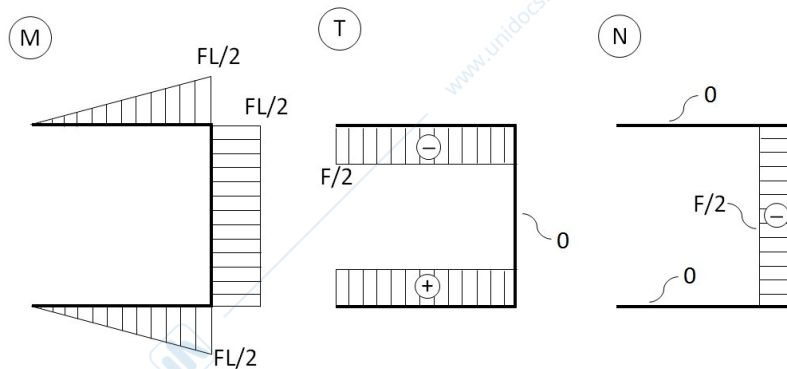
Si consideri che nella verifica di resistenza di ogni struttura devono essere anche valutate le connessioni tra parti differenti, siano esse realizzate tramite saldature, incollature o altri sistemi.

## 8. PROBLEMA 'INVERSO'

Con riferimento al regime di sollecitazione indotto sul fissatore spinale rappresentato in figura, problema già studiato in un precedente esercizio. Si calcoli il valore minimo della forza di compressione che determina il raggiungimento della tensione limite nell'elemento di collegamento verticale. Si supponga che questo sia composto da una sezione circolare con diametro  $D$  pari a  $8 \text{ mm}$ . Si ipotizzi di adottare una lega di Titanio con valore limite di snervamento pari a  $\sigma_{sn} = 660 \text{ MPa}$ . Si consideri che le lunghezze delle viti peduncolari siano tali da ipotizzare  $L = 35 \text{ mm}$ .



Come già discusso, nella configurazione di carico allo studio si considera che la forza di compressione sia ripartita in modo uguale tra le due parti che costituiscono il fissatore. L'elemento di giunzione verticale è soggetto ad uno stato di presso-flessione, deducibile dai diagrammi di sollecitazione già ricavati.



In una sezione generica dell'elemento verticale la tensione normale sarà quindi data da:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M}{J}y$$

dove  $y$  è la distanza del punto considerato dall'asse neutro. Dato che la lega di Titanio ha comportamento simmetrico a trazione e compressione, basta considerare il punto che presenta le maggiori tensioni normali in modulo. Questo sarà sul bordo compresso dal momento flettente, dove si sommano gli effetti di compressione a quelli indotti dallo sforzo assiale. Di seguito si considerano le differenti quantità in modulo, per semplificare il calcolo.

$$\sigma_{\max} = \frac{F/2}{A} + \frac{FL/2D}{J/2}$$

Si ricava quindi il valore della forza di compressione  $F$ :

$$F = \frac{\sigma_{\max}}{\frac{1}{2A} + \frac{LD}{4J}}$$

La massima forza applicabile sul fissatore si ottiene ponendo la tensione massima pari al valore di 660 MPa. Per la sezione circolare si ha:

$$A = \frac{\pi}{4}D^2 = \frac{\pi}{4}8^2 = 50.27 \text{ mm}^2$$

$$J = \frac{\pi}{64}D^4 = \frac{\pi}{64}8^4 = 201.06 \text{ mm}^4$$

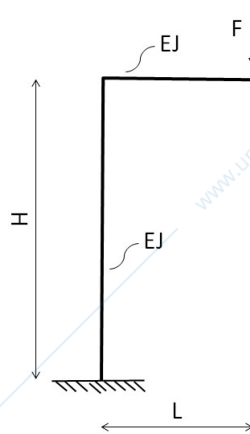
Si ottiene quindi:

$$F_{\max} = \frac{\sigma_{sn}}{\frac{1}{2A} + \frac{LD}{4J}} = \frac{660}{\frac{1}{2 \cdot 50.2} + \frac{35 \cdot 8}{4 \cdot 201}} = 1842.4 \text{ N}$$

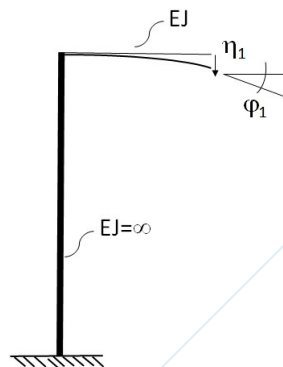
Si noti che la dimensione H non rientra nella formula con la quale si determina la massima forza di compressione. L'altezza H ha influenza invece la deformabilità del sistema.

## 9. CALCOLO DELLA DEFORMABILITÀ FLESSIONALE

Si calcolino le componenti di traslazione e di rotazione dell'estremità libera della struttura seguente, deformabile per sola flessione e avente rigidezza flessionale EJ costante.



Il calcolo può essere fatto considerando la sovrapposizione degli effetti deformativi sull'elemento verticale e su quello orizzontale. Assumendo l'elemento verticale come rigido, la deformata risulta data da:

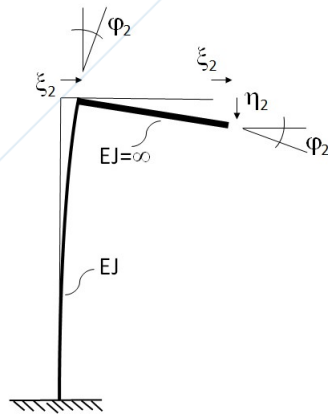


In tale ipotesi, l'elemento orizzontale è soggetto ad una forza concentrata all'estremità per cui risultano una rotazione oraria e un abbassamento rispettivamente pari a:

$$\varphi_1 = \frac{1}{2} \frac{FL^2}{EJ}$$

$$\eta_1 = \frac{1}{3} \frac{FL^3}{EJ}$$

Considerando ora l'elemento orizzontale come rigido, la deformazione del sistema è data dalla flessione dell'elemento verticale, che si può considerare soggetto nella sua estremità superiore ad una forza verticale F verso il basso e a un momento FL orario. La forza verticale determina una sollecitazione assiale e non genera deformazioni flessionali.



La sezione d'estremità superiore dell'elemento verticale ruota in verso orario e trasla orizzontalmente verso destra con le seguenti quantità:

$$\varphi_2 = \frac{(FL)H}{EJ}$$

$$\xi_2 = \frac{1}{2} \frac{(FL)H^2}{EJ}$$

Considerando l'elemento orizzontale come rigido, l'estremità di quest'ultimo si sposta verso destra e ruota delle medesime quantità. In aggiunta, si realizza una traslazione verso il basso pari a:

$$\eta_2 = \varphi_2 L = \frac{(FL)H}{EJ} L = \frac{FHL^2}{EJ}$$

Le componenti complessive di traslazione e rotazione dell'estremità libera della struttura sono quindi date da:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{1}{2} \frac{FL^2}{EJ} + \frac{FHL}{EJ}$$

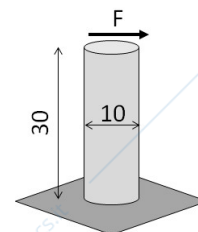
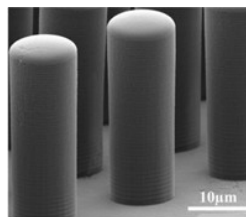
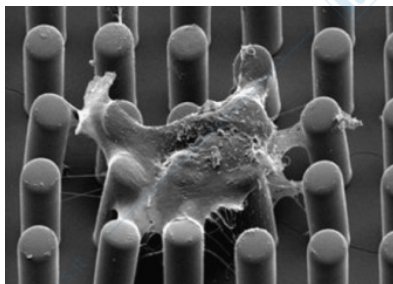
$$\xi = \xi_2 = \frac{1}{2} \frac{FLH^2}{EJ}$$

$$\eta = \eta_1 + \eta_2 = \frac{1}{3} \frac{FL^3}{EJ} + \frac{FHL^2}{EJ}$$

La rotazione è in verso orario, la traslazione orizzontale verso destra e la traslazione verticale verso il basso.

## 10. EFFETTI DELLA DEFORMABILITÀ A TAGLIO

Si calcoli la rigidezza trasversale di un micro-pilastro di PDMS di altezza H pari a 30  $\mu\text{m}$  e diametro D pari a 10  $\mu\text{m}$ , elemento costituente un substrato per lo studio di problemi di mecano-trasduzione di cardiomiociti. Per il PDMS si consideri un modulo elastico longitudinale E pari a 1.38 MPa e un coefficiente di Poisson  $\nu$  pari a 0.5.



Il problema si risolve determinando lo spostamento trasversale  $\eta$  nell'estremità del micro-pilastro sotto l'azione di una forza trasversale  $F$  applicata nella medesima estremità e nel calcolare il rapporto

$$K = \frac{F}{\eta}$$

Descrivendo il micro-pilastro con un modello trave deformabile a flessione e taglio lo spostamento trasversale è pari a :

$$\eta = \frac{FH^3}{3EJ} + \chi \frac{FH}{GA}$$

dove il primo termine a secondo membro è dovuto alla deformabilità flessionale e il secondo termine a quella tagliante. Il fattore di taglio  $\chi$  per la sezione in esame (sezione circolare) è pari a  $10/9$ . In base ai dati proposti si ottiene:

$$E = 1.38 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 1.38 \cdot \frac{10^6}{10^3 \cdot 10^3} = 1.38 \frac{\mu\text{N}}{\mu\text{m}^2}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{1.38}{2(1+0.5)} = 0.46 \frac{\mu\text{N}}{\mu\text{m}^2}$$

$$A = \frac{\pi}{4} D^2 = \frac{\pi}{4} 10^2 = 78.54 \mu\text{m}^2$$

$$J = \frac{\pi}{64} D^4 = \frac{\pi}{64} 10^4 = 490.87 \mu\text{m}^4$$

$$\eta = F \left( \frac{H^3}{3EJ} + \chi \frac{H}{GA} \right) = F \left( \frac{30^3}{3 \cdot 1.38 \cdot 490.87} + \frac{10}{9} \cdot \frac{30}{0.46 \cdot 78.54} \right) = F(13.286 + 0.9226) = 14.2086 \cdot F$$

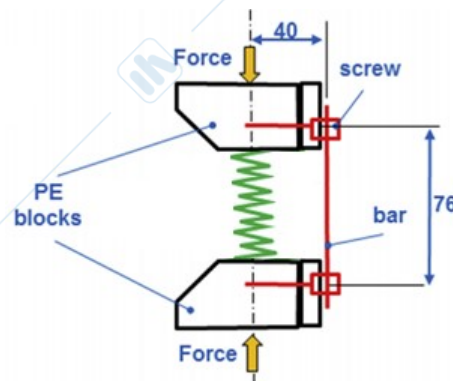
Il termine dovuto alla deformabilità tagliante è pari a circa il 6.5% della deformabilità totale del micro-pilastro. La rigidezza trasversale è pari a:

$$K = \frac{F}{\eta} = \frac{1}{14.2086} = 0.2197 \frac{\mu\text{N}}{\mu\text{m}}$$

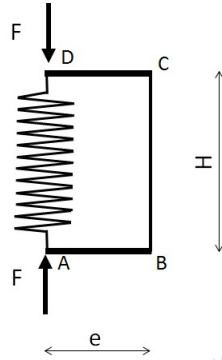
Il calcolo non tiene conto della deformabilità del supporto a cui è vincolato il micro-pilastro, termine che può determinare una rigidezza effettiva minore di quella calcolata.

## 11. STATI TENSIONALI SU UN FISSATORE SPINALE

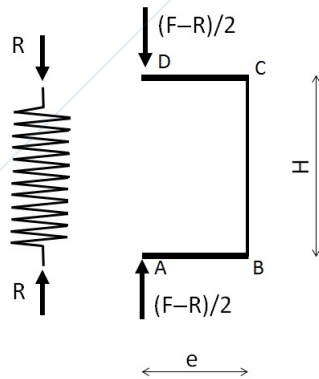
Si calcoli il regime di sollecitazione e tensione sul fissatore spinale in figura, per una forza di compressione  $F$  pari a 500 N. I blocchi di materiale polimerico che simulano i corpi vertebrali sono da considerare rigidi e la molla elastica (lineare) rappresenta la risposta a compressione di dischi vertebrali interposti.



Il fissatore è formato da 4 viti peduncolari ad asse parallelo e due elementi verticali in lega di Titanio ad asse rettilineo e sezione circolare con diametro  $\Phi$  pari a 7 mm (si veda la figura dell'esercizio 8 come riferimento). Per la lega di Titanio si consideri un modulo di Young  $E$  pari a 110'000 MPa e una tensione limite elastica  $\sigma_y = 820$  MPa. Per la molla si consideri una rigidezza  $K$  pari a 190 N/mm. Il sistema è descritto secondo lo schema indicato in figura



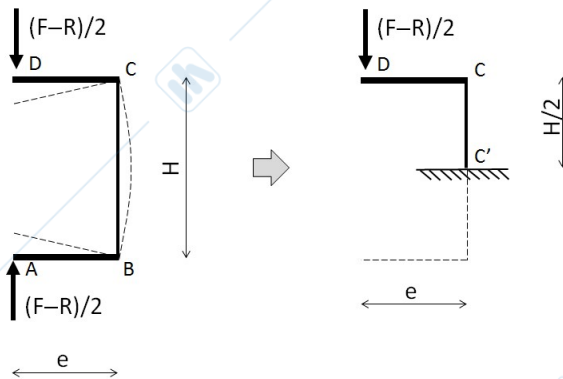
dove i tratti CD e AB sono corpi rigidi e il tratto CB è una trave a rigidezza flessionale  $EJ$ . Si ricordi che il fissatore è composto da due elementi del tipo ABCD. Il sistema principale che si ricava dal precedente è il seguente



Si noti che il sistema a destra rappresenta uno solo dei due telai in cui si articola il fissatore, al quale sono state assegnate metà della forza esterna e della reazione della molla, sotto l'ipotesi che forza  $F$  e reazione  $R$  si distribuiscano simmetricamente tra i due telai.

Il valore della reazione  $R$  si determina imponendo che lo spostamento relativo dei punti AD sia pari alla variazione di lunghezza della molla.

Data la simmetria di struttura e di carico, la deformata flessionale del sistema ABCD si presenta pure simmetrica secondo lo schema riportato di seguito, permettendo di studiare la deformabilità attraverso il sistema semplificato riportato a destra:



Il tratto CC' è una trave incastrata nell'estremità C' e soggetta ad un momento flettente costante indotto dalla forza applicata in D per il braccio e. Per quanto visto nell'esercizio 9 la trave CC' subisce una rotazione (antioraria) dell'estremo C pari a

$$\varphi = \frac{(F-R)e}{2} \cdot \frac{H/2}{EJ} = \frac{(F-R)eH}{4EJ}$$

essendo J il momento d'inerzia della sezione. Il punto D si abbassa di una quantità pari a:

$$\eta = \frac{(F-R)eH}{4EJ} \cdot e = \frac{(F-R)e^2H}{4EJ}$$

Considerando lo spostamento simmetrico che si ha nella struttura di partenza in corrispondenza del punto A, si può istituire la seguente equazione di congruenza tra accorciamento della molla e spostamento relativo dei punti D-A:

$$\frac{R}{K} = \frac{(F-R)e^2H}{2EJ}$$

Indicata con  $K_f$  la quantità

$$K_f = \frac{2EJ}{e^2H}$$

l'equazione di congruenza si riscrive come

$$\frac{R}{K} = \frac{(F-R)}{K_f} \rightarrow R = F \frac{K}{K+K_f}$$

Il termine  $K_f$ , rappresenta la rigidezza del fissatore spinale. Si noti che all'aumentare di  $K_f$  rispetto a K la forza di compressione sulla molla si riduce e aumentano le sollecitazioni sul fissatore spinale. Sulla base dei dati del problema si ricava:

$$J = \frac{\pi}{64} \Phi^4 = \frac{\pi}{64} 7^4 = 117.86 \text{ mm}^4$$

$$K_f = \frac{2 \cdot 110'000 \cdot 117.86}{40^2 \cdot 76} = 213.2 \text{ N/mm}$$

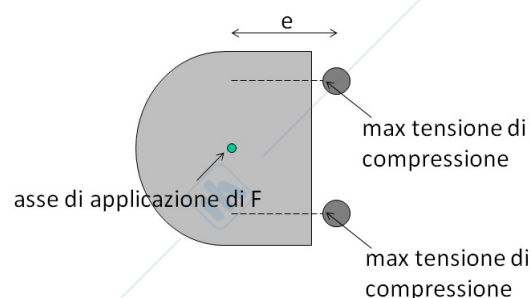
$$R = \frac{190}{190 + 213.2} \cdot F = 0.47 \cdot F = 0.47 \cdot 500 = 235 \text{ N}$$

Tale valore rappresenta il carico di compressione applicato ai dischi intervertebrali interposti. Il fissatore risente invece di una forza di compressione pari a:

$$F - R = 500 - 235 = 265 \text{ N}$$

che si ripartisce in modo uguale tra i due elementi di cui è costituito.

Lo stato di sollecitazione della barra verticale BC è di presso-flessione, con valori di sforzo assiale e momento flettente costanti. Individuata una sezione generica del tratto BC, la massima tensione in modulo si ha nel punto indicato nella figura seguente sul lato rivolto verso i corpi vertebrali:



La sezione delle barre verticali ha valori di area A e momento resistente W rispettivamente pari a:

$$A = \frac{\pi}{4} \Phi^2 = \frac{\pi}{4} 7^2 = 38.48 \text{ mm}^2$$

$$W = J \cdot \frac{2}{\Phi} = 117.86 \cdot \frac{2}{7} = 33.67 \text{ mm}^3$$

Il valore in modulo della massima tensione di compressione è pari a:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M}{W} = \frac{265/2}{38.48} + \frac{265/2 \cdot 40}{33.67} = 3.4 + 157.4 = 160.8 \text{ MPa}$$

con un fattore di sicurezza rispetto alla condizione limite elastica pari a:

$$\gamma = \frac{820}{160.8} = 5.1$$

Nella soluzione del problema si è considerata la sola deformabilità flessionale delle barre verticali che costituiscono il fissatore. Ciò è corretto perché la rigidezza assiale di tali barre è pari a:

$$2 \cdot \frac{EA}{H} = 2 \cdot \frac{110'000 \cdot 38.48}{76} = 111'389.4 \text{ N/mm}$$

valore largamente superiore a K e K<sub>r</sub>.