

Contents

1		
2	1 Lezione 1: Nozioni di base	2
3	1.1 Unit 1 - Proposizioni e loro negazioni	2
4	1.1.1 La proposizione	2
5	1.1.2 I connettivi logici	3
6	1.1.3 Negare una proposizione	3
7	1.1.4 Il connettivo di congiunzione \wedge e di disgiunzione \vee	3
8	1.1.5 L'implicazione	5
9	1.1.6 Implicazione e negazione	6
10	1.1.7 Teorema, Proposizione, Lemma e Corollario	7
11	1.1.8 Tipi di dimostrazioni	7
12	1.1.9 Dimostrazione per assurdo o per reductio ad absurdum	11
13	1.1.10 Condizione necessaria e sufficiente	12
14	1.1.11 Quantificatori	13
15	1.1.12 Quantificatori e negazione	14
16	1.1.13 Esercizi	15
17	1.2 Unit 2 - Insiemi	19
18	1.2.1 Insiemi	19
19	1.2.2 Descrizione di un insieme	20
20	1.2.3 Insieme delle parti	20
21	1.2.4 Prodotto cartesiano	21
22	1.2.5 Operazioni tra insiemi	21
23	1.2.6 Operazioni tra insiemi: grafici	22
24	1.2.7 Proprietà delle operazioni tra insiemi	24
25	1.2.8 Esercizi	26
26	1.3 Unità 3 - Numeri	27
27	1.3.1 L'insieme \mathbb{Z}	27
28	1.3.2 L'Algoritmo della Divisione	27
29	1.3.3 Criteri di divisibilità	28
30	1.3.4 Numeri primi e fattorizzazione	29
31	1.3.5 Massimo Comune Divisore (MCD) e minimo comune multiplo (mcm)	30
32	1.3.6 Esercizi	31
33	1.3.7 Relazione di Ordine in \mathbb{R}	32
34	1.3.8 Base 10 e altre basi	35
35	1.3.9 Esercizi	38

36 Chapter 1

37 Lezione 1: Nozioni di base

38 1.1 Unit 1 - Proposizioni e loro negazioni

39 1.1.1 La proposizione

40 Una proposizione é un'affermazione (ovvero una frase che asserisce un fatto) a cui é possibile
41 attribuire un valore di verità (ovvero é possibile stabilire sempre se tale affermazione sia **vera** o
42 **falsa**) in modo completamente oggettivo. Elementari esempi di proposizioni sono i seguenti:

43 'Atene é la capitale della Grecia',
44 'Johann Carl Friedrich Gauss é nato il 30 aprile 1777',
45 'esiste un numero primo non dispari',
46 'esiste un numero dispari non primo',
47 '21 é un numero pari',
48 'tutti i numeri primi sono dispari'.

49 Per tutte queste proposizioni é possibile verificare (piú o meno facilmente) se esse siano vere o false,
50 in particolare é possibile vedere che le prime quattro sono proposizioni vere, le ultime due sono false.

51 é importante sottolineare che nel contesto della logica delle proposizioni, non siamo minimamente
52 interessati al contenuto di una proposizione, ma solo al suo valore di verità. Ad esempio anche una
53 frase del tipo

54 'il sole é una grande lampadina'

55 é una proposizione: puó risultare decisamente stravagante ma si tratta comunque di un'affermazione
56 che é possibile verificare essere falsa e quindi é possibile attribuirle un valore di verità.

57 Una frase del tipo

58 'viva il re!'

59 non é una proposizione: non sta affermando alcun fatto e quindi non possiamo attribuirle un valore
60 di verità.

61 Utilizzeremo d'ora in poi delle lettere maiuscole (ad esempio P , Q , ...) per indicare delle propo-
62 sizioni.

63 1.1.2 I connettivi logici

64 Proposizioni piú semplici si possono combinare tra loro per formare nuove proposizioni piú com-
65 plesse [4, page 14]. Ciò avviene per mezzo di operatori che si chiamano **connettivi logici**, che si
66 possono ridurre ai tre che seguono.

- 67 1. **Negazione**, che si indica col segno \neg (**non**, in inglese **not**).
- 68 2. **Congiunzione**, che si indica col segno \wedge (**e**, in inglese **and**).
- 69 3. **Disgiunzione**, che si indica col segno \vee (**o**, in inglese **or**).

70 Il connettivo \vee indica la disgiunzione debole (che corrisponde al latino **vel**) da distinguere dalla
71 disgiunzione esclusiva che si indica con il segno \vee^* (spesso chiamata **xor**). $P \vee Q$ é vera se **almeno**
72 una delle due proposizioni P o Q é vera, e quindi anche se sono vere ambedue. La proposizione
73 $P \vee^* Q$ é vera se é vera una delle due proposizioni P o Q , **ma non ambedue**.

74 1.1.3 Negare una proposizione

75 A partire da una certa proposizione P , é possibile formulare la sua negazione, che indicheremo
76 con $\neg P$. Essa sará una nuova proposizione, ovvero un'affermazione a cui é possibile attribuire un
77 valore di veritá. La negazione \neg corrisponde realmente all'avverbio 'non' nell'uso che questo ha
78 nella lingua italiana: negare P , ovvero affermare $\neg P$, significa esattamente affermare 'non P '.

79 Ad esempio, se la proposizione P é:

P : Atene é la capitale della Grecia ,

80 la sua negazione $\neg P$ é:

$\neg P$: Atene non é la capitale della Grecia .

81 Passiamo ad un esempio lievemente piú complesso. Neghiamo la seguente proposizione P :

Tutti i numeri dispari sono primi .

82 Negare il fatto che tutti i numeri dispari siano primi equivale a dire che non tutti i numeri dispari
83 sono primi, ovvero che esiste (almeno) un numero dispari non primo. Quindi $\neg P$ é esattamente la
84 seguente affermazione:

Esiste un numero dispari non primo .

85 Notiamo che sono state utilizzate due espressioni che sono fondamentali nella costruzione di una
86 proposizione e piú in generale nel contesto della logica delle proposizioni: **tutti** ed **esiste**. Tali
87 espressioni sono legate alla nozione di quantificatore.

88 1.1.4 Il connettivo di congiunzione \wedge e di disgiunzione \vee

89 A partire da una o piú proposizioni si puó associare una nuova proposizione mediante l'uso di
90 connettivi logici. La negazione, appena vista (il cui simbolo é \neg), é un connettivo logico: esso
91 associa ad una proposizione P la sua negazione $\neg P$, ovvero una nuova proposizione. A partire
92 da due proposizioni P e Q possiamo associare la proposizione ' P e Q ', che indicheremo $P \wedge Q$ (il
93 simbolo ' \wedge ' corrisponde esattamente alla congiunzione 'e' della lingua italiana); possiamo associare

94 anche la proposizione ‘ P o Q ’, che indicheremo $P \vee Q$ (il simbolo ‘ \vee ’ corrisponde esattamente alla
95 congiunzione ‘o, oppure’ della lingua italiana).

96 Date le due proposizioni di partenza P e Q , di cui conosciamo il valore di verità, possiamo
97 ricavare il valore di verità di $P \wedge Q$ e di $P \vee Q$. Infatti, se sia P che Q sono vere, allora anche $P \wedge Q$
98 sarà vera: $P \wedge Q$ è quella proposizione che afferma ‘sia P che Q ’. Se invece o solo P , o solo Q , o
99 entrambe P e Q sono false, allora $P \wedge Q$ sarà falsa. Consideriamo invece $P \vee Q$. Tale proposizione
100 afferma ‘ P oppure Q ’. Quindi basta che solo una tra P e Q sia vera perché $P \vee Q$ sia vera. Invece,
101 se entrambe P e Q sono false, allora $P \vee Q$ sarà falsa.

102 Quanto appena detto può essere riassunto in modo schematico tramite la seguente tavola di
103 verità:

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	F

Esercizio 1.1.1. Date le proposizioni P e Q mostra che risulta [4, page 15]

$$P \vee Q = \neg(\neg P \wedge \neg Q)$$

e

$$P \wedge Q = \neg(\neg P \vee \neg Q).$$

Suggerimento: Mostra prima che risulta

$$\neg(P \vee Q) = \neg P \wedge \neg Q$$

e

$$\neg(P \wedge Q) = \neg P \vee \neg Q.$$

105 L’esercizio suddetto mostra che uno dei due connettivi \vee e \wedge si può esprimere per mezzo dell’altro
106 e della negazione (\neg). Si continuerà comunque ad usare ambedue i simboli \vee e \wedge , dato che a
107 un’economia di simboli corrisponderebbe una notevole complicazione delle formule. Anche gli altri
108 connettivi logici, come per esempio, l’implicazione (\Rightarrow), l’equivalenza (\Leftrightarrow) e la disgiunzione esclusiva
109 (\vee^*) possono esprimersi mediante solo \wedge , \vee e \neg [4, page 15].

Esercizio 1.1.2. Date le proposizioni P e Q mostra che risulta

$$\neg(\neg P \vee Q) = P \wedge (\neg Q).$$

Questo risultato è usato per realizzare la cosiddetta dimostrazione per assurdo di un teorema.

110 1.1.5 L'implicazione

111 Consideriamo ora il connettivo logico 'implica'. A partire da due proposizioni P e Q possiamo
 112 associare la proposizione ' P implica Q ' (che si può anche leggere 'se P allora Q '), che indicheremo
 113 con $P \Rightarrow Q$. Questo tipo di proposizione ($P \Rightarrow Q$) è chiamata anche **proposizione condizionale**
 114 (in inglese, conditional statement [5, page 9]).

115 Il significato dell'implicazione non è molto diverso da quello che ha nella lingua italiana, ovvero
 116 'se (abbiamo) P allora (necessariamente abbiamo) Q '. Eppure è necessario fare qualche chiarimento
 117 sul valore di verità di un'implicazione dato quello delle due proposizioni di partenza.

118 Noi diremo che la proposizione $P \Rightarrow Q$ è falsa **se e solo se** P è vera e Q è falsa, ovvero se e
 119 solo se la premessa è vera e la conclusione è falsa. In tutti gli altri casi l'implicazione $P \Rightarrow Q$ è
 120 vera. Il fatto che $P \Rightarrow Q$ sia vera nel caso in cui entrambe P e Q siano vere risulta generalmente
 121 abbastanza chiaro.

122 Invece è più complicato all'inizio 'accettare' il fatto che $P \Rightarrow Q$ sia vera sempre quando P è falsa
 123 (qualunque sia il valore di verità di Q , e quindi anche quando Q è vera, cosa che spesso all'inizio
 124 lascia perplessi). Situazioni del genere, in cui P è falsa e dunque $P \Rightarrow Q$ è vera, capitano raramente
 125 nel linguaggio ordinario e possono risultare bizzarre. Al contrario, è molto frequente trovarle nel
 126 linguaggio matematico.

127 Un modo equivalente di dire ' P implica Q ', e che può essere utile a capire il concetto di impli-
 128 cazione, è: 'non può succedere che sia vera P ma non sia vera Q '.

129 L'importanza dell'implicazione sta nel fatto che essa è la forma di quasi tutti i teoremi in mate-
 130 matica: Se P rappresenta la **ipotesi** del teorema e Q la sua **tesi**, $P \Rightarrow Q$ dice che dalla ipotesi
 131 segue la tesi, ossia che se sono vere quelle, è vera anche questa.

132 Un esempio istruttivo di implicazione proveniente dal linguaggio ordinario è dato dalla seguente
 133 proposizione:

134 se piove prendo l'ombrello,

135 dove $P = \text{piove}$ e $Q = \text{prendo l'ombrello}$.

136 La proposizione $P \Rightarrow Q$ è vera quando P e Q sono vere (cioè quando piove e io prendo l'ombrello),
 137 ma è anche vera quando non piove (P è falsa) e io prendo l'ombrello comunque (Q è vera), anche se
 138 non piove (non si sa mai!), ed è anche vera quando non piove (P falsa) e io non prendo l'ombrello
 139 (Q falsa). Ma non è vera quando piove (P vera) e non prendo l'ombrello (Q falsa), questo perché
 140 $P \Rightarrow Q$ significa che 'non può succedere che piova (P vera) ma io non prenda l'ombrello (Q falsa)'.
 141 Facciamo qualche altro esempio:

142 'Atene è la capitale della Grecia' implica 'Atene è in Europa'

143 è vera: la premessa è vera e la conclusione è vera.

144 'Atene è la capitale della Grecia' implica 'Atene è in Asia'

145 è falsa: la premessa è vera e la conclusione è falsa.

146 'Atene è la capitale del Brasile' implica 'Atene è in Asia'

147 è vera: la premessa è falsa (e basta questo per dire che la proposizione è vera, indipendentemente
 148 dal valore di verità della conclusione).

149 Controlliamo ora il valore di verità di diverse proposizioni che coinvolgono quantità matematiche,
 150 in particolare numeri interi. In questa pagina dichiareremo una volta per tutte che x è un numero

151 naturale, cioè un elemento dell'insieme \mathbb{N} . Quindi non ci saranno ambiguità: quando all'interno
 152 di una frase troveremo l'incognita x sapremo che si tratterà di un numero naturale. Consideriamo
 153 allora le seguenti affermazioni, e vediamo se è possibile attribuire loro un valore di verità, ovvero se
 154 sono delle proposizioni, e se sí, quale.

155 x è pari $\Rightarrow x$ è divisibile per 4.

156 Come dichiarato all'inizio, la nostra variabile x è un numero naturale. Quindi esso può essere o pari
 157 o dispari. Se x è dispari, allora la premessa è falsa, e quindi l'implicazione è vera. Consideriamo
 158 allora l'altro caso, ovvero x pari. La premessa ora è vera. L'implicazione sarà allora falsa se succede
 159 che la conclusione sia falsa, ovvero, in questo caso, se riusciamo a trovare un numero pari ma non
 160 divisibile per 4. Tale numero esiste, ed è il numero 2. L'implicazione è quindi falsa.

161 Consideriamo ora:

162 $P : x$ dispari e divisibile per 6 $\Rightarrow Q : x = 5$.

163 Notiamo che se x è un numero divisibile per 6 allora esso è anche divisibile per 2 e quindi è pari.
 164 Perciò non può esistere un numero sia dispari che divisibile per 6, per cui la premessa sarà sempre
 165 falsa, e quindi l'implicazione sarà sempre vera, indipendentemente dal fatto che la conclusione sia
 166 o meno vera.

Esercizio 1.1.3. *Mostra che risulta [4, page 15]*

$$(P \Rightarrow Q) = \neg P \vee Q.$$

Questo risultato è usato per realizzare la cosiddetta dimostrazione per assurdo di un teorema.

167 1.1.6 Implicazione e negazione

168 Date due proposizioni P e Q , consideriamo adesso le seguenti proposizioni condizionali

169
$$P \Rightarrow Q$$

170 e

171
$$\neg Q \Rightarrow \neg P,$$

172 ovvero ' P implica Q ' e ' $\neg Q$ implica $\neg P$ '. Vogliamo mostrare che queste due proposizioni sono
 173 equivalenti, ovvero che la prima è vera se e solo se la seconda è vera. Un modo semplice per provare
 174 l'equivalenza delle due implicazioni è costruire una tavola di verità dove verranno riassunti tutti i
 175 possibili casi. Ad esempio, supponiamo che P sia vera e Q sia falsa. Dalla definizione di negazione
 176 abbiamo che $\neg P$ è falsa e $\neg Q$ è vera. Poi, dalla definizione di implicazione deduciamo subito che
 177 $P \Rightarrow Q$ e $\neg Q \Rightarrow \neg P$ sono entrambe false (premessa vera e conclusione falsa). Abbiamo quindi

178

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \Rightarrow Q$	$\neg Q \Rightarrow \neg P$
V	F	F	V	F	F

179 Se consideriamo tutti i possibili casi, otteniamo facilmente la seguente tavola:

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \Rightarrow Q$	$\neg Q \Rightarrow \neg P$
V	F	F	V	F	F
V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	V	V

180

181 Per cui $P \Rightarrow Q$ e $\neg Q \Rightarrow \neg P$ sono vere o false contemporaneamente.

182 In maniera succinta, abbiamo dunque le seguenti identità

$$\begin{aligned}
 P \Rightarrow Q &= \neg P \vee Q \\
 &= Q \vee \neg P \\
 &= \neg(\neg Q) \vee \neg P \\
 &= \neg Q \Rightarrow \neg P.
 \end{aligned}$$

183

184 1.1.7 Teorema, Proposizione, Lemma e Corollario

185 Date due proposizioni P and Q , noi chiamiamo **teorema** l'enunciato che afferma che la propo-
 186 sizione (condizionale)

187

$$P \Rightarrow Q$$

188 sia vera. La proposizione P si chiama **ipotesi** (o premessa) mentre la proposizione Q si chiama **tesi**
 189 (o conclusione). Se la proposizione

190

$$P \Rightarrow Q$$

191 é vera, diciamo anche che P é una **condizione sufficiente** per Q o che Q é una **condizione**
 192 **necessaria** per P , a seconda su quale delle due proposizioni si vuole porre piú enfasi. Usiamo
 193 anche le seguenti espressioni: **Se** é vera P allora é vera anche Q , oppure Q é vera **solo se** é vera P .
 194 Su questo punto, ritorneremo nella Sezione 1.1.10.

195 Si usa il termine di proposizione con il significato di teorema, intendendo una proposizione
 196 condizionale, quando l'enunciato della implicazione $P \Rightarrow Q$ non é cosí significativo da chiamarlo
 197 teorema. Il lemma é un teorema (cioé l'enunciato che una proposizione condizionale $P \Rightarrow Q$ sia
 198 vera) meno importante mentre un corollario é un teorema che possiamo ottenere facilmente da un
 199 altro teorema o lemma.

200 **Osservazione 1.1.1.** *Dunque, la differenza tra le varie espressioni (teorema, proposizione e lemma)*
 201 *é l'importanza (del tutto soggettiva!) che chi scrive o parla vuole attribuire all'affermazione che si*
 202 *sta dimostrando: solitamente si riserva il termine 'Teorema' per quelle che si ritengono veramente*
 203 *importanti e significative, 'Proposizione' per quelle che sono un pó meno importanti ma pur sem-*
 204 *pre abbastanza significative e 'Lemma' per quelle affermazioni che di per sé non sarebbero molto*
 205 *significative, ma che servono poi per dimostrare altri fatti piú importanti.*

206 1.1.8 Tipi di dimostrazioni

207 Dimostrare o provare un teorema significa dunque mostrare che la proposizione condizionale

208

$$P \Rightarrow Q$$

209 é vera. Esistono diversi modi con cui si può realizzare una dimostrazione. I più comuni sono

- 210 • **Dimostrazione diretta** o **Dimostrazione deduttiva**;
- 211 • **Dimostrazione per contrapposizione** o **Dimostrazione per contronominale**;
- 212 • **Dimostrazione per assurdo** o **Dimostrazione per reductio ad absurdum**;
- 213 • **Dimostrazione per contro-esempio**.

214 La **dimostrazione diretta** di $P \Rightarrow Q$ consiste in una sequenza di deduzioni, che si basano
 215 su definizioni o proposizioni vere stabilite prima o che siano note, per cui partendo dall'enunciato
 216 iniziale (ipotesi P) assunto vero si giunge a che l'enunciato finale (tesi Q) risulta anch'esso vero.

Esempio 1.1.1. Vogliamo provare che la seguente proposizione condizionale sia vera attraverso la dimostrazione diretta. Qui usiamo il fatto che risultano note le definizioni di numero intero pari e dispari.

Se n é un numero intero dispari allora n^2 é dispari.

Proof. Nella suddetta formulazione,

$P : n$ é un intero dispari

mentre

$Q : n^2$ é dispari.

Assumiamo che P sia vero, cioè: Sia dato il numero n intero dispari. Per definizione di numero dispari, risulta dunque che

$$\exists k \in \mathbb{Z} : n = 2k + 1.$$

Elevando quindi al quadrato, otteniamo

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

che può esprimersi come

$$n^2 = 2k' + 1$$

con $k' = (2k^2 + 2k)$ e $k' \in \mathbb{Z}$, quindi n^2 é un numero intero dispari. □

217 La **dimostrazione per contronominale** o **per contrapposizione** di $P \Rightarrow Q$ consiste nel
 218 provare che risulta vera la seguente proposizione

$$219 \quad \neg Q \Rightarrow \neg P.$$

220 La dimostrazione di questa implicazione può a sua volta realizzarsi usando la dimostrazione diretta,
 221 cioè si assume che $\neg Q$ sia vera, e attraverso deduzioni logiche, giungere a che anche $\neg P$ sia vera.

Esempio 1.1.2. Vogliamo provare che la seguente proposizione condizionale sia vera

Se n é un numero intero e $3n + 2$ é un numero dispari allora n é dispari.

Proof. Nella suddetta formulazione, $P : 'n \in \mathbb{Z} \wedge 3n + 2 \text{ é dispari}'$, mentre $Q : 'n \text{ é dispari}'$.

Se vogliamo fare la dimostrazione diretta, dobbiamo partire da P vera e vedere che cosa possiamo ricavare. Ci rendiamo però subito conto che non é che riusciamo ad andare molto avanti. Infatti con la dimostrazione diretta sappiamo che n é intero, e $3n + 2$ é dispari. Questo dunque significa che

$$\exists k \in \mathbb{Z} : 3n + 2 = 2k + 1.$$

Ma da questa relazione, possiamo ora ricavare che n é dispari? Cioé, possiamo ricavare che $\exists k' \in \mathbb{Z}$ tale che $n = 2k' + 1$?

Vediamo che non risulta possibile, per cui, per questa via, non possiamo concludere nulla. Quindi, dobbiamo pensare a qualcosa altro.

Vediamo allora se realizzando la dimostrazione per contrapposizione, possiamo giungere a una conclusione utile; cioé se risulta piú semplice mostrare in maniera diretta che la seguente proposizione condizionale sia vera.

$$\neg Q \Rightarrow \neg P.$$

Assumiamo che $\neg Q$ sia vera, cioé il numero dato n sia pari. Quindi $\exists k \in \mathbb{K}$ tale che

$$n = 2k.$$

Quindi é anche, moltiplicando ambo i membri per 2,

$$3n = 6k$$

e sommando +2 ad ambo i membri, risulta anche

$$3n + 2 = 6k + 2$$

cioé vediamo che $3n + 2$ può esprimersi nel seguente modo

$$3n + 2 = 2k'$$

con $k' = (3k + 2) \in \mathbb{Z}$, mostrando quindi che $3n + 2$ é pari, che é $\neg P$. □

222 La **dimostrazione per assurdo** di $P \Rightarrow Q$ consiste nel dimostrare che risulta vera la seguente
223 proposizione

$$224 (P \wedge \neg Q) \Rightarrow R$$

225 dove R é una proposizione falsa, cioé supponendo che siano vere P e $\neg Q$ (cioé che Q sia falsa) si
226 giunga, usando la dimostrazione diretta, cioé attraverso deduzioni logiche, a una conclusione falsa.
227 Nella Sezione ?? elaboreremo con piú dettaglio su questo tipo di dimostrazione. Diamo di seguito
228 un esempio.

Esempio 1.1.3. Consideriamo lo stesso esempio di prima però realizziamo questa volta una dimostrazione per assurdo. Dunque, si vuole che la seguente proposizione condizionale sia vera

Se n è un numero intero e $3n + 2$ è un numero dispari allora n è dispari.

Proof. Se indichiamo con P : ' $n \in \mathbb{Z} \wedge 3n + 2$ dispari' e con Q : ' n dispari', si tratta dunque di dimostrare che assumendo $P \wedge \neg Q$ vero, si ottiene una proposizione falsa. Assumiamo dunque che n è pari ($\neg Q$) e che n sia tale che $3n + 2$ sia dispari (P). Essendo n pari, allora

$$\exists c \in \mathbb{Z} : n = 2c$$

e usando P : ' $3n + 2$ dispari' cioè che

$$\exists k \in \mathbb{Z} : 3n + 2 = 2k + 1,$$

ricaviamo che

$$3(2c) + 2 = 2k + 1$$

cioè

$$6c = 2k - 1$$

ossia

$$c = \frac{k}{3} - \frac{1}{6}$$

che non è un intero. Per poter essere c un intero, k dovrebbe essere del tipo

$$c = \frac{2k}{6} - \frac{1}{6} \Leftarrow k = \frac{6c + 1}{2} = 3c + \frac{1}{2},$$

con $c \in \mathbb{Z}$ per cui k non sarebbe poi un intero). □

Confronta questa dimostrazione con quella di contrapposizione realizzata nell'Esempio 1.1.2.

229 Ulteriori considerazioni sono svolte nella Sezione 1.1.9 dove si danno ulteriori esempi di appli-
230 cazione di questa tecnica.

231 **Osservazione 1.1.2.** *Attenzione a non confondere le dimostrazioni per assurdo con le dimostrazioni*
232 *contronominale. Anche se la logica delle dimostrazioni per assurdo sembrerebbe assomigliare a quella*
233 *delle dimostrazioni contronominale, la differenza è sostanziale:*

- 234 • *Nel primo caso si suppone che valgono le ipotesi e che non valga la tesi, in modo da giungere*
235 *ad una contraddizione, cioè a una proposizione falsa;*
- 236 • *Nel secondo caso si suppone solamente che non valga la tesi e si dimostra conseguentemente*
237 *che non vale l'ipotesi.*

238 La **dimostrazione per contro-esempio** è usata per mostrare che una data implicazione $P \Rightarrow Q$
239 è falsa, fornendo un esempio dove P è vero, mentre Q è falso. Questo tipo di dimostrazione si usa
240 quando si vuole mostrare che una idea di quello che può essere un teorema (in questo caso si parla
241 di congettura) non è infatti un teorema.

Esempio 1.1.4. Consideriamo la seguente proposizione condizionale

$$P : \forall n \in \mathbb{Z} : 3n + 1 \text{ é dispari} \Rightarrow Q : n \text{ é dispari.}$$

Mostriamo che la implicazione $P \Rightarrow Q$ é falsa. Considera per esempio $n = 2$, si ha dunque che per questo numero n , P é vera (infatti, $2 \in \mathbb{Z} \wedge 3 \cdot 2 + 1 = 7$ é dispari, pero Q é falsa, dato che $n = 2$ non é dispari).

242 1.1.9 Dimostrazione per assurdo o per reductio ad absurdum

243 Sia P una proposizione. Per provare che P sia vera con la tecnica della dimostrazione per assurdo,
244 occorre riuscire a dedurre da $\neg P$, ovvero dalla negazione di P , una proposizione Q chiaramente falsa.

245 Supponiamo cioè di essere riusciti a provare che $\neg P \Rightarrow Q$ sia vera con Q chiaramente falsa.
246 Consultando la tavola di verità dell'implicazione $\neg P \Rightarrow Q$, si vede che se $\neg P \Rightarrow Q$ é vera e Q é falsa
247 allora la premessa $\neg P$ é certamente falsa! Si conclude cosí che P é vera.

Esempio 1.1.5. Sia P : '3 é un numero dispari'. Assumiamo dunque che $\neg P$ sia vera, cioè che 3 sia un numero pari. Dunque questo significa che

$$\exists c \in \mathbb{K} : 3 = 2c,$$

da cui ricaviamo che

$$c \in \mathbb{Z} \wedge c = \frac{3}{2}$$

che é falso, cioè posto Q : '3/2 é intero', abbiamo dedotto che

$$\neg P \Rightarrow Q$$

con Q essendo una proposizione falsa.

248 Vediamo ora che cosa significa realizzare una dimostrazione per assurdo della proposizione con-
249 dizionale

$$250 P \Rightarrow Q.$$

251 Per quanto detto, significa mostrare che assumendo che si verifichi $\neg(P \Rightarrow Q)$, otteniamo per
252 deduzione una proposizione falsa, cioè che la seguente proposizione condizionale sia vera

$$253 \neg(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R$$

254 dove R indica una proposizione chiaramente falsa. Siccome

$$255 (P \Rightarrow Q) = \neg P \vee Q$$

256 si ha quindi

$$257 \neg(P \Rightarrow Q) = \neg(\neg P \vee Q) = P \wedge \neg Q,$$

258 per cui si tratterà di dimostrare che dall'assumere P vera e Q falso (o che è lo stesso $\neg Q$ vero), si
 259 ottiene una proposizione R falsa. In simboli, si tratta cioè di dimostrare che risulta vera la seguente
 260 proposizione condizionale

$$261 \quad P \wedge \neg Q \Rightarrow R,$$

262 in un modo che possiamo concludere che $P \wedge \neg Q$ è falsa, quindi $\neg(P \wedge \neg Q)$ è vera. Siccome

$$263 \quad \neg(P \wedge \neg Q) = P \Rightarrow Q$$

264 concludiamo che la proposizione condizionale

$$265 \quad P \Rightarrow Q$$

266 è vera.

Esempio 1.1.6. Vogliamo dimostrare la seguente proposizione [7, pag. 23].

Sia c un numero reale. Se $c^2 = 2$ allora c non è un numero razionale.

Proof. Nella suddetta formulazione $P : 'c \in \mathbb{R} \wedge c^2 = 2'$ e $Q : 'c \notin \mathbb{Q}'$. La dimostrazione per assurdo della implicazione $P \Rightarrow Q$ consiste dunque nel mostrare che assumendo P vero e $\neg Q$ vero (cioè Q falso) si giunge ad una conclusione falsa. Ora, $\neg Q$ vero significa assumere $c \in \mathbb{Q}$ mentre P vero significa che c è tale che $c^2 = 2$. Dato che $c \in \mathbb{Q}$, dalla rappresentazione frazionaria dei numeri razionali, possiamo dire che esistono m, n numeri interi, cioè $m, n \in \mathbb{Z}$, primi tra loro (cioè il massimo comune divisore tra m e n è 1) tali che $c = m/n$. Ci riferiamo a questa rappresentazione del numero c . Risulta quindi $(m/n)^2 = c^2 = 2$, cioè $2n^2 = m^2$. Essendo il primo membro $2n^2$ un numero intero pari, anche m^2 deve essere pari, ma allora anche m deve essere pari (se m fosse dispari, anche m^2 sarebbe dispari, vedi Esempio 1.1.1); quindi $m = 2k$, con k intero. Ne segue che

$$2n^2 = m^2 = 4k^2,$$

cioè

$$n^2 = 2k^2.$$

Possiamo ora ripetere per n^2 lo stesso ragionamento di prima. Dato che $n^2 = 2k^2$, allora n^2 è un numero pari e quindi anche n deve essere un numero pari. Dunque abbiamo trovato che m e n devono essere entrambi pari, ciò che contrasta con l'ipotesi che m e n siano numeri interi primi tra loro. \square

267 1.1.10 Condizione necessaria e sufficiente

268 Per esprimere la circostanza che P implica Q ($P \Rightarrow Q$) si dice anche che P è **condizione**
 269 **sufficiente** affinché sia vera Q , oppure si può dire che Q è **condizione necessaria** per P o affinché
 270 P sia vera.

271 Ciò vuol dire che se P implica Q allora '**premessa**' (o **ipotesi**) P è sufficiente per poter avere
 272 la '**conclusione**' (o **tesi**) Q . Invece Q è necessaria per avere P , perché se la premessa è vera e
 273 l'implicazione è vera, allora necessariamente la conclusione deve essere vera (ricordiamo la definizione
 274 di implicazione: un'implicazione è falsa se la premessa è vera e la conclusione è falsa). Per chiarire

275 ulteriormente le idee, consideriamo la proposizione:

Se un numero intero x é multiplo di 4 **allora** x é pari.

276 Tale proposizione é vera. La premessa (P : ‘un numero intero x é multiplo di 4’) é sufficiente
277 per avere la conclusione (Q : ‘ x é pari’): infatti basta, é sufficiente, per un numero intero x essere
278 multiplo di 4 per essere pari (ovviamente ci sono numeri interi pari che non sono multipli di 4, ma a
279 noi non interessa questo, ci interessa sapere che ogni volta che abbiamo un numero intero multiplo
280 di 4 esso é pari).

281 La conclusione (Q : ‘ x é pari’) é necessaria alla premessa (P : ‘un numero intero x é multiplo di
282 4’): l’implicazione é vera, quindi non può verificarsi la situazione che la premessa P sia vera (un
283 intero x é multiplo di 4 ma la conclusione Q falsa (ovvero x dispari). Il fatto che x sia pari (la
284 conclusione) é necessario per la premessa.

285 Diciamo che P é **condizione necessaria e sufficiente** per Q , e lo indichiamo con $P \Leftrightarrow Q$,
286 quando si ha contemporaneamente $P \Rightarrow Q$ e $Q \Rightarrow P$.

287 Conseguentemente, per esprimere la circostanza che le proposizioni P e Q sono equivalenti,
288 cioè che risulta $P \Leftrightarrow Q$, ovvero $P \Rightarrow Q$ e $Q \Rightarrow P$, si dice anche che P é condizione necessaria
289 ($Q \Rightarrow P$) e sufficiente ($P \Rightarrow Q$) affinché Q sia vera, oppure si dice anche che P é vera **se e solo**
290 **se** Q é vera. Il ‘**se**’ si riferisce al fatto che P é condizione sufficiente cioè all’implicazione $P \Rightarrow Q$,
291 mentre il ‘**solo se**’ si riferisce al fatto che P é condizione necessaria, cioè all’implicazione $Q \Rightarrow P$.

292 Dunque, se $P \Rightarrow Q$, si può usare una delle seguenti (equivalenti) locuzioni:

- 293 • Se P é vera, allora Q é vera;
- 294 • Se P , allora Q ;
- 295 • P é condizione sufficiente per Q ;
- 296 • Q é condizione necessaria per P .

297 1.1.11 Quantificatori

298 Le espressioni del tipo ‘per ogni...’, ‘per tutti gli...’ e del tipo ‘esiste qualche...’, ‘esiste un...’
299 sono dette **quantificatori**, e sono usualmente indicate con i simboli \forall e \exists rispettivamente. Non
300 entreremo in tutti i dettagli dell’uso di tali quantificatori, ma ci limiteremo a fare alcuni esempi. In
301 particolare vedremo il loro utilizzo in combinazione con il connettivo logico di negazione \neg .

302 Vediamo prima come formulare delle proposizioni utilizzando i simboli \forall e \exists . Un’affermazione
303 del tipo:

Tutti i numeri interi sono dispari

304 é chiaramente una proposizione (possiamo attribuirle un valore di verità, in particolare essa é falsa).
305 Possiamo riscriverla utilizzando il quantificatore \forall (per ogni, per tutti,...) come segue:

$\forall x$ numero intero, x é dispari ,

306 e si legge

per ogni x numero intero, x é dispari.

308 Un’affermazione del tipo:

309 Esistono dei numeri interi dispari

310 é anch'essa una proposizione (in questo caso vera). Affermare quest'ultima proposizione equivale
311 a dire che **esiste almeno un** numero intero che é dispari. Utilizzando il quantificatore \exists (esiste,
312 esiste qualche,...), essa puó essere riscritta come segue:

313 $\exists x$ numero intero tale che x é dispari,

314 che si legge

315 Esiste qualche x numero intero tale che x é dispari.

316 1.1.12 Quantificatori e negazione

317 Vediamo ora un esempio di negazione di una proposizione in cui sia presente un quantificatore.
318 Partiamo dalla proposizione P :

319 Tutti i fiori sono blu.

320 Nella proposizione P é presente il quantificatore universale \forall (tutti, per tutti, per ogni,...). La
321 negazione $\neg P$ é evidentemente:

322 Non tutti i fiori sono blu.

323 Vediamo che questa espressione per $\neg P$ puó essere riformulata utilizzando il quantificatore esisten-
324 ziale \exists (esiste, esiste un, esiste almeno un,...). Infatti é facile vedere che l'espressione

325 Non tutti i fiori sono blu

326 é equivalente a:

327 Esiste (almeno) un fiore non blu,

328 per cui quest'ultima é una formulazione equivalente di $\neg P$.

329 Proseguiamo e neghiamo nuovamente quest'ultima proposizione, ovvero scriviamo $\neg(\neg P)$:

330 Non esiste un fiore non blu,

331 che, riformulata utilizzando il quantificatore universale (\forall), é equivalente a:

332 Tutti i fiori sono blu,

333 ovvero la proposizione P di partenza. Abbiamo quindi provato che la negazione della negazione di
334 una proposizione é la proposizione di partenza, ovvero:

$$\neg(\neg P) = P.$$

335 **1.1.13 Esercizi**336 **Esercizio 1.1.4.** *Identifica la ipotesi e tesi del seguente teorema.*337 *I numeri naturali $m \in \mathbb{N}$ che possono esprimersi come $m = 2n + 1$ con $n \in \mathbb{N}$ sono numeri dispari.*338 *Suggerimento: Mostra che la proposizione suddetta può essere espressa nella forma di una proposizione condizionale del tipo $P \Rightarrow Q$.*340 **Esercizio 1.1.5.** *Calcolare le tavole di verità delle proposizioni*

$$\neg Q \Rightarrow \neg P,$$

$$\neg(Q \Rightarrow P),$$

$$\neg(P \Rightarrow Q),$$

341 *a partire dai possibili valori di verità delle proposizioni P e Q .*342 Il successivo esercizio rappresenta un esempio di sofisma algebrico, cioè una dimostrazione o un
343 ragionamento matematico contenente un errore, che porta quindi ad un risultato errato o contraddittorio.
344345 **Esercizio 1.1.6.** *Cosa c'è di sbagliato nella seguente dimostrazione di '1=2'. Dimostrazione:**Passo*

1. $a = b$

2. $a^2 = ab$

3. $a^2 - b^2 = ab - b^2$

346 4. $(a - b)(a + b) = b(a - b)$

5. $a + b = b$

6. $2b = b$

7. $2 = 1$

*Motivazione**dato**moltiplicando entrambi i lati per a* *sottraendo b^2 da entrambi i lati**fattorizzazione**dividendo entrambi i lati per $a - b$* *sostituendo a con b ($a = b$) e semplificando**dividendo entrambi i lati per b .*347 **Esercizio 1.1.7.** *Dimostra che*348 *Se $3n + 2$ è dispari allora n è dispari*349 **Esercizio 1.1.8.** *Dimostra che*350 *La somma di due numeri dispari è un numero pari*351 **Esercizio 1.1.9.** *Usa una dimostrazione per contrapposizione e per assurdo per provare che:*352 *Se n è un intero e $n^3 + 5$ è dispari, allora n è pari.*353 **Esercizio 1.1.10.** *Dimostra che*354 *Se n è un intero e n^2 è dispari, allora n è dispari.*355 **Esercizio 1.1.11.** *Dati $n, m, p \in \mathbb{N}$, dimostra che*356 *Se $n = mp$, allora $(m \vee p) \leq \sqrt{(n)}$.*357 **Esercizio 1.1.12.** *Siano date le seguenti proposizioni*358 *$P1$: '3 è un numero naturale'*

359 P_2 : '3 é un numero dispari'

360 quale delle seguenti affermazioni risulta falsa?

361 A. $P_1 \vee P_2$

362 B. $P_1 \wedge P_2$

363 C. $\neg P_1 \vee P_2$

364 D. $\neg P_1 \wedge P_2$

365 **Esercizio 1.1.13.** Siano P, Q due generiche proposizioni, quali delle seguenti affermazioni é sempre
366 vera?

367 A. $P \vee Q$

368 B. $P \wedge Q$

369 C. $\neg P \vee P$

370 D. $\neg(P \vee Q)$

371 **Esercizio 1.1.14.** L'affermazione 'A nessuno studente sono antipatici tutti i professori' equivale a
372 dire che:

373 A. c'è uno studente a cui tutti i professori sono antipatici

374 B. tutti i professori sono antipatici a tutti gli studenti

375 C. ad ogni studente é simpatico almeno un professore

376 D. c'è un professore che é simpatico a tutti gli studenti

377 **Esercizio 1.1.15.** Scrivere in maniera formale le seguenti proposizioni

- 378 • Esiste un numero naturale maggiore di 3.
- 379 • Il quadrato di un numero naturale é maggiore del numero.
- 380 • Esiste un numero reale piú piccolo del suo cubo.
- 381 • Esiste un numero naturale maggiore di tutti gli altri.
- 382 • Ogni numero intero (positivo, negativo o nullo) é differenza di due numeri naturali.
- 383 • Ognuno numero reale é somma di due numeri razionali.
- 384 • La sola soluzione reale dell'equazione $x + 3 = 0$ é $x = -3$.
- 385 • Il quadrato di un qualsiasi numero razionale é razionale.
- 386 • Il quadrato di un qualsiasi numero irrazionale é irrazionale.
- 387 • Il quadrato di qualche numero irrazionale é irrazionale.
- 388 • Il quadrato di qualche numero irrazionale é razionale.

389 • *La radice cubica di un numero naturale è irrazionale.*

390 • *Se $x^2 > 1$ allora $x > 1$.*

391 • *Se $x > 1$ allora $x^2 > 1$.*

392 **Esercizio 1.1.16.** *Dire se le proposizioni dell'esercizio 1.1.15 sono vere o false.*

393 **Esercizio 1.1.17.** *Negare le proposizioni dell'esercizio 1.1.15.*

394 **Esercizio 1.1.18.** *Si consideri la seguente affermazione:*

395 *Non c'è nessun giocatore di calcio che non sia capace di colpire la palla con il piede destro*

396 *Quale delle seguenti proposizioni è equivalente a quella enunciata sopra?*

397 *A. Tutti i giocatori di calcio sanno colpire di testa*

398 *B. Alcuni giocatori di calcio sanno colpire la palla col piede destro*

399 *C. Tutti i giocatori di calcio sanno colpire la palla col piede destro*

400 *D. Non tutti i giocatori di calcio sanno colpire di testa*

401 *E. Almeno un calciatore è capace di colpire la palla col piede sinistro*

402 **Esercizio 1.1.19.** *In una squadra di calcio giocano Amilcare, Bertoldo e Carletto nei ruoli di*
403 *portiere, centravanti, libero (non necessariamente in quest'ordine). Si sa che:*

404 *(1) Il centravanti è il più basso di statura ed è scapolo*

405 *(2) Amilcare è il suocero di Carletto ed è più alto del portiere.*

406 *Quale delle seguenti affermazioni è necessariamente vera?*

407 *A. Bertoldo è il genero di Carletto*

408 *B. Bertoldo ha sposato la sorella di Carletto*

409 *C. Carletto è il portiere*

410 *D. Carletto è scapolo*

411 *E. Amilcare è il centravanti*

412 **Esercizio 1.1.20.** *C'è chi ha ipotizzato che dato un numero pari qualunque di persone almeno*
413 *la metà di loro sia idiota. Prendendo per vera questa libera opinione si dica quale delle seguenti*
414 *affermazioni è necessariamente vera:*

415 *A. Non ci possono essere idioti.*

416 *B. A parte eventualmente una persona tutta la popolazione mondiale è idiota.*

417 *C. Esattamente la metà della popolazione mondiale è idiota.*

418 *D. L'estensore di questo quesito non è idiota.*

419 *E. Ogni insieme di idioti è costituito da un numero pari di persone.*

420 **Esercizio 1.1.21.** Sapendo che l'affermazione 'Tutti i sabati vado in pizzeria e poi al cinema' é
421 falsa, se ne deduce che:

- 422 A. Qualche sabato non vado in pizzeria o al cinema.
- 423 B. Tutti i sabati non vado in pizzeria o al cinema.
- 424 C. Qualche sabato non vado né in pizzeria né al cinema.
- 425 D. Tutti i sabati non vado né in pizzeria né al cinema.
- 426 E. Tutti i giorni vado in pizzeria e al cinema.

427 **Esercizio 1.1.22.** Quale delle seguenti affermazioni é falsa?
428 Affinché due frazioni siano uguali

- 429 A. é sufficiente che abbiano lo stesso numeratore e lo stesso denominatore.
- 430 B. é necessario che abbiano numeratori denominatori proporzionali.
- 431 C. é necessario che abbiano uguale numeratore e uguale denominatore.
- 432 D. é necessario che abbiano uguale numeratore e uguale denominatore.
- 433 E. é necessario e sufficiente che abbiano numeratori e denominatori proporzionali.

434 **Esercizio 1.1.23.** Aldo, Bruno e Carlo sono tre amici. Si sa che

- 435 (a) Almeno uno di essi é laureato.
- 436 (b) Se Aldo é laureato, anche Bruno lo é.
- 437 (c) Se Carlo é laureato, anche Aldo lo é.
- 438 (d) Solo uno tra Bruno e Carlo é laureato.

439 Allora si deduce che

- 440 A. Aldo e Bruno sono laureati.
- 441 B. Bruno é laureato.
- 442 C. Aldo é laureato e Bruno non lo é.
- 443 D. Carlo é laureato.
- 444 E. I laureati sono due.

445 1.2 Unit 2 - Insiemi

446 1.2.1 Insiemi

447 I concetti di **insieme** ed **elemento** si assumono come *concetti primitivi*, cio'è che vengono
 448 supposti noti, senza che ci sia bisogno di darne una definizione formale, e che vengono invece
 449 introdotti per mezzo di spiegazione e concetti [4, page 3]. Pertanto, un **insieme** può essere inteso
 450 come un raggruppamento, una collezione o una famiglia di oggetti, detti **elementi** dell'insieme.

451 Solitamente un insieme viene denotato con delle lettere latine maiuscole, ad esempio A, B, C, X, Y, \dots ,
 452 mentre i suoi elementi con delle lettere latine minuscole, come ad esempio a, b, c, x, y, \dots .

453 Un insieme A risulta definito quando esiste un **criterio oggettivo** (una proprietà) che permette
 454 di stabilire se un qualunque oggetto appartiene o meno ad A . Ad esempio sono insiemi:

- 455 • l'insieme degli stati della Unione Europea;
- 456 • l'insieme dei numeri pari;
- 457 • l'insieme dei matematici italiani;
- 458 • l'insieme delle soluzioni di un'equazione.

459 Insiemi: simbologia

460 Il fatto che un elemento a appartenga ad un insieme A si esprime mediante la notazione

$$461 a \in A.$$

462 Invece, se a non appartiene ad A si scrive

$$463 a \notin A.$$

464 Dati due insiemi A e B diremo che A è un **sottoinsieme di** (o una **parte di**) B , se tutti gli elementi
 465 di A sono anche elementi di B . Indicheremo questo fatto mediante la notazione

$$466 A \subseteq B.$$

467 Se $A \subseteq B$ ma $A \neq B$ (ovvero i due insiemi non coincidono), allora A è detto **sottoinsieme proprio**
 468 (**parte propria**) di B . Questo fatto si indica con il simbolo

$$469 A \subset B.$$

470 Notiamo che $A \subset B$ significa che $A \subseteq B$ ed in più esistono elementi $b \in B$ tali che $b \notin A$.

471 Due insiemi A, B sono uguali se contengono gli stessi elementi. Se A, B sono tali che $A \subseteq B$ e
 472 $B \subseteq A$, allora $A = B$. La verifica è una semplice applicazione della definizione di inclusione e di
 473 uguaglianza tra insiemi.

474 Denoteremo con \emptyset l'**insieme vuoto**, ovvero un insieme privo di elementi.

475 Insiemi particolari sono quelli che contengono un solo elemento. Essi spesso vengono chiamati
 476 **singoletti** (in inglese si dice **singleton**) e rappresentati come $\{a\}$, dove a è l'unico elemento di $\{a\}$.

477 **Osservazione 1.2.1.** *Attenzione a non confondere un elemento a con l'insieme $\{a\}$ costituito*
 478 *dal solo elemento a . Il primo è un elemento; il secondo un insieme. Così mentre $a \in \{a\}$ è*
 479 *un'affermazione vera, $\{a\} \in \{a\}$ è falsa ($\{a\}$ non è un elemento dell'insieme $\{a\}$). Ad esempio, è*
 480 *un singoletto l'insieme $\{1\}$, ma non il numero 1, che non è un insieme [4, page 4].*

481 1.2.2 Descrizione di un insieme

482 Un insieme A può essere descritto in due modi:

- 483 • Elencando tutti i suoi elementi. Ad esempio l'espressione

$$484 A = \{0, 1, a, c, \lambda, \Delta\}$$

485 indica l'insieme A come quell'insieme formato esattamente dai numeri 0, 1, dalle lettere latine
486 a, c , e dalle lettere greche λ e Δ . L'ordine con cui sono esplicitamente elencati gli elemnti é
487 inessenziale. Ad esempio, l'insieme $\{4, 1\}$ coincide con l'insieme $\{1, 4\}$ [4, page 4].

- 488 • Definendo una proprietà $P(x)$ caratteristica che deve essere soddisfatta da tutti e soli gli
489 elementi di A (e che quindi li identifica in modo univoco). In questo caso

$$490 A = \{x : P(x)\},$$

491 che si legge 'A é l'insieme degli elementi x tali che $P(x)$ é vera'.

492 Nel secondo caso occorrono delle precisazioni altrimenti si ottiene il Paradosso di Russell o del
493 barbiere [9]. Innanzitutto dobbiamo specificare l'**insieme ambiente** o **universo** (solitamente in-
494 dicato con U) da cui sono tratti gli elementi di A . A volte esso é determinato implicitamente dal
495 contesto. Infatti se

$$496 A = \{x : x \text{ pari}\}$$

497 chiaramente $U = \mathbb{Z}$. A volte però é bene specificare l'insieme U pertanto scriveremo

$$498 A = \{x \in U : P(x)\}.$$

499 L'insieme A così costruito si chiama estensione della proprietà $P(x)$ in U . Per esempio, la proprietà
500 $x/2 \in \mathbb{N}$ definisce l'insieme A dei numeri pari. Corrispondentemente, l'insieme A é l'estensione (in
501 \mathbb{N}) della proprietà $x/2 \in \mathbb{N}$ [4, page 5].

502 La seconda e più importante precisazione riguarda la proprietà P che caratterizza gli elementi
503 dell'insieme: infatti vogliamo che dato un qualsiasi $x \in U$, si possa decidere se $P(x)$ é vera (quindi
504 x soddisfa la proprietà ed é nell'insieme) o se é falsa. Quindi $P(x)$ deve essere un'affermazione con
505 **senso**, ovvero una **proposizione**.

506 1.2.3 Insieme delle parti

507 L'**insieme delle parti** di un insieme A , denotato con $\mathcal{P}(A)$, é l'insieme di **tutti i sottoinsiemi**
508 di A . Per prima cosa, notiamo che gli elementi di $\mathcal{P}(A)$ sono **insiemi** (sono sottoinsiemi di A).
509 In particolare, si ha sempre che $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ e che $A \in \mathcal{P}(A)$. Inoltre, per ogni $a \in A$, il singoletto
510 $\{a\} \in \mathcal{P}(A)$.

511 Se un insieme A ha n elementi, allora l'insieme $\mathcal{P}(A)$ ha 2^n elementi. Il numero di elementi di un
512 insieme A viene chiamato la **cardinalità** dell'insieme A , e indicato con $\#(A)$. Se A ha n elementi,
513 allora $\#(A) = n$.

514 Un insieme con un numero finito di elementi o con una infinitá numerabile (cioé che si può porre
515 in corrispondenza biunivoca con \mathbb{N}) di elementi si dice che é un **insieme discreto**. Se il numero di
516 elementi é finito, allora l'insieme si dice **insieme finito**. Un insieme che non é discreto, si dice che
517 é un **insieme infinito** [3].

Esempio 1.2.1. Calcoliamo l'insieme delle parti di $A = \{a, b, 1\}$. Si ha che $\#(A) = 3$, e inoltre si verifica facilmente che

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \underbrace{\{a, b, 1\}}_A, \{a\}, \{b\}, \{1\}, \{a, b\}, \{a, 1\}, \{b, 1\}\}.$$

Notiamo che $\#(\mathcal{P}(A)) = 8 = 2^{\#(A)}$.

518 1.2.4 Prodotto cartesiano

519 Si chiama **coppia ordinata** (a, b) una coppia di elementi a, b (cioé un insieme formato da due
520 elementi) di cui distinguiamo il primo elemento, a , dal secondo, b , cioè nell'insieme é importante
521 l'ordine nel quale appaiono. Quindi date due coppie ordinate $(a, b), (c, d)$, esse sono uguali se e
522 solo se $a = c$ e $b = d$. Inoltre, se $a \neq b$, allora $(a, b) \neq (b, a)$. La coppia ordinata (a, b) é diversa
523 dalla coppia $\{a, b\}$ che indica semplicemente l'insieme formato dai due elementi.

524 Dati due insiemi A, B denotiamo con

$$525 \quad A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\},$$

526 l'insieme di tutte le possibili coppie ordinate in cui il primo elemento appartiene ad A ed il secondo
527 appartiene a B . Questo insieme lo chiamiamo il prodotto cartesiano di A per B .

Esempio 1.2.2. Dati gli insiemi

$$A = \{1, 2, 3\} \quad B = \{a, b\},$$

il loro prodotto cartesiano é

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}.$$

Dati due insiemi A, B qualsiasi, la cardinalità di $A \times B$ é $\#(A \times B) = \#(A) \cdot \#(B)$, ovvero il prodotto delle cardinalità di A e di B .

528 1.2.5 Operazioni tra insiemi

529 Dati due insiemi A e B , sottoinsiemi di un certo insieme ambiente U , si definisce l'insieme
530 **intersezione** $A \cap B$ come l'insieme degli elementi di U che appartengono **sia** ad A **che** a B . In
531 simboli:

$$532 \quad A \cap B = \{x \in U : x \in A \wedge x \in B\}.$$

533 Si definisce l'insieme **unione** $A \cup B$ come l'insieme degli elementi di U che appartengono **o** ad A **o**
534 a B (anche ad entrambi). In simboli:

$$535 \quad A \cup B = \{x \in U : x \in A \vee x \in B\}.$$

536 Si definisce l'insieme **complementare** A^c di A come l'insieme degli elementi che appartengono ad
 537 U ma non sono in A . In simboli:

$$538 \quad A^c = \{x \in U : x \notin A\}.$$

539 Notiamo che per definire l'insieme complementare di un insieme A è necessario avere l'insieme
 540 ambiente U da dove gli elementi di A sono tratti. In effetti l'insieme A^c è il complementare di A
 541 **rispetto a** U .

542 Definiamo anche la **differenza** $A \setminus B$ tra A e B come l'insieme degli elementi di U che apparten-
 543 gono ad A ma non appartengono a B . In simboli:

$$544 \quad A \setminus B = \{x \in U : x \in A \wedge x \notin B\}.$$

545 Infine definiamo la **differenza simmetrica** $A \Delta B$ tra A e B come

$$546 \quad A \Delta B = B \Delta A = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

547 Una rappresentazione intuitiva di un insieme è data dai noti diagrammi di Eulero o di Venn. La
 548 rappresentazione consiste nell'individuare un insieme racchiudendo gli elementi all'interno di una
 549 linea chiusa. In questo modo è semplice visualizzare le relazioni di sottoinsieme e le operazioni tra
 550 insiemi. Ad esempio, sia

$$551 \quad U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

552 e $A, B \subset U$ dati da

$$553 \quad A = \{x \in U : x \text{ dispari}\} = \{1, 3, 5, 7, 9\}, \quad B = \{x \in U : x \text{ primo}\} = \{2, 3, 5, 7\}.$$

554 Calcoliamo l'**intersezione** $A \cap B$. Questa è data da:

$$555 \quad A \cap B = \{3, 5, 7\}.$$

556 1.2.6 Operazioni tra insiemi: grafici

557 Dati i seguenti insiemi: $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ (insieme ambiente), $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
 558 e $B = \{2, 3, 5, 7\}$, calcoliamo l'intersezione $A \cap B$:

$$559 \quad A \cap B = \{3, 5, 7\}.$$

560 Graficamente:

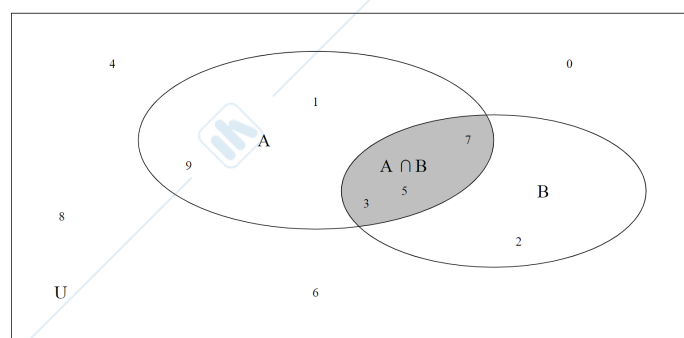


Figure 1.1 Intersezione di $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ e $B = \{2, 3, 5, 7\}$.

561 Calcoliamo l'unione $A \cup B$:

562
$$A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7, 9\}.$$

563 Graficamente:

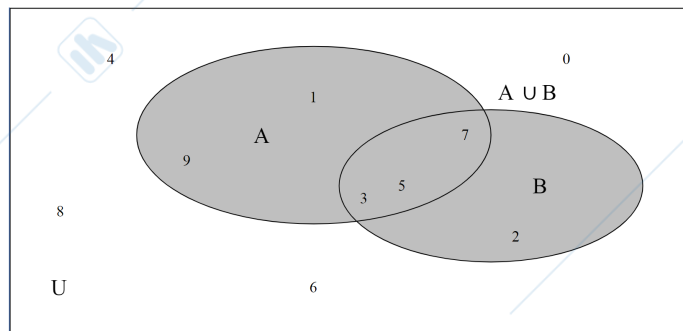


Figure 1.2 Unione di $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ e $B = \{2, 3, 5, 7\}$.

564 Calcoliamo il complementare di A (in U):

565
$$A^c = \{0, 2, 4, 6, 8\}.$$

566 Graficamente:

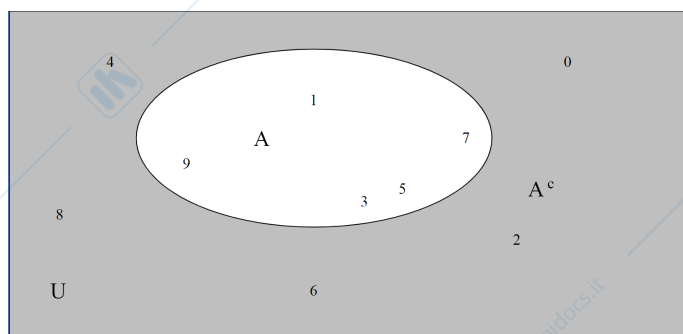


Figure 1.3 Complemento di $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ in $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

567 Calcoliamo la differenza di A con B :

568
$$A \setminus B = \{1, 9\}.$$

569 Graficamente:

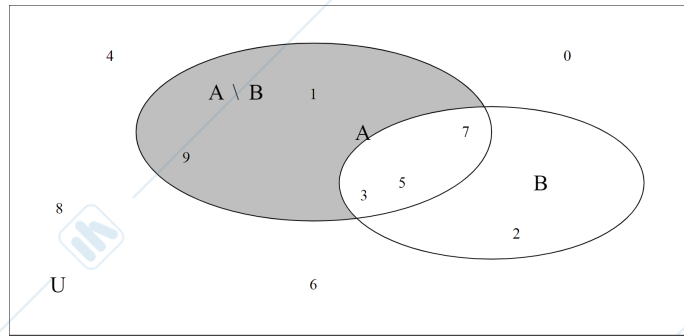


Figure 1.4 Differenza di $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ con $B = \{2, 3, 5, 7\}$.

570 Calcoliamo la differenza simmetrica di A e B (in U):

571
$$A \Delta B = \{1, 2, 9\}.$$

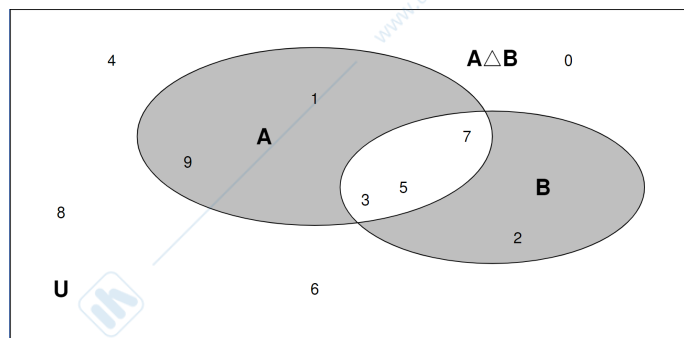


Figure 1.5 Differenza simmetrica di $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ e $B = \{2, 3, 5, 7\}$ in $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

572 1.2.7 Proprietá delle operazioni tra insiemi

573 Dati gli insiemi A , B e C , sottoinsiemi dell'insieme ambiente U , si possono stabilire le seguenti
574 identitá.

- 575 • $A \cap A = A$ (idempotenza dell'intersezione);
- 576 • $A \cup A = A$ (idempotenza dell'unione);
- 577 • $A \cap B = B \cap A$ (proprietá commutativa dell'intersezione);
- 578 • $A \cup B = B \cup A$ (proprietá commutativa dell'unione);
- 579 • $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (proprietá associativa dell'intersezione);
- 580 • $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (proprietá associativa dell'unione);
- 581 • $A \cap (A \cup B) = A$ (assorbimento);
- 582 • $A \cup (A \cap B) = A$ (assorbimento);
- 583 • $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (proprietá distributiva dell'intersezione rispetto all'unione);

- 584 • $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (proprietá distributiva dell'unione rispetto all'intersezione);
- 585 • $A \cap A^c = \emptyset$ (complementarietá);
- 586 • $A \cup A^c = U$ (complementarietá);
- 587 • $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ (prima legge di De Morgan - complemento di una unione);
- 588 • $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ (seconda legge di De Morgan - complemento di una intersezione).

589 **Esempio 1.2.3.** *Dati gli insiemi A e B , dimostrare la validitá della prima legge di De Morgan*

590
$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

591 *Proof.* Mostriamo prima che risulta $(A \cap B)^c \subseteq A^c \cup B^c$ e poi che risulta $(A \cap B)^c \supseteq A^c \cup B^c$.

592 Sia $x \in (A \cap B)^c$. Questo significa che $x \notin A \cap B$, ovvero che $x \notin A$ o $x \notin B$, cioè che $x \in A^c$ o

593 $x \in B^c$. Ma questo significa che

594
$$x \in A^c \cup B^c.$$

595 Quindi abbiamo visto

596
$$x \in (A \cap B)^c \Rightarrow x \in A^c \cup B^c$$

597 ovvero

598
$$(A \cap B)^c \subseteq A^c \cup B^c.$$

599 Proviamo ora l'inclusione opposta. Sia

600
$$x \in A^c \cup B^c.$$

601 Allora

602
$$x \in A^c \vee x \in B^c,$$

603 ovvero

604
$$x \notin A \vee x \notin B$$

605 che equivale a

606
$$x \notin (A \cap B).$$

607 Ma questo significa

608
$$x \in (A \cap B)^c.$$

609 Quindi

610
$$A^c \cup B^c \subseteq (A \cap B)^c.$$

611 Ma allora

612
$$(A \cap B)^c \subseteq A^c \cup B^c \text{ e } A^c \cup B^c \subseteq (A \cap B)^c \Rightarrow (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

613

□

614 **1.2.8 Esercizi**615 **Esercizio 1.2.1.** *Dati gli insiemi A e B , dimostrare la validità della seconda legge di De Morgan*

616

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$$

617 **Esercizio 1.2.2.** *Sia $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$. Consideriamo il sottoinsieme A formato dai*
618 *numeri pari di X , e il sottoinsieme B formato dai numeri primi di X . Calcolare*

619

$$(A \cap B)^c;$$

$$(A \cup B)^c;$$

$$A^c \cap B;$$

$$A \cup B^c.$$

620 1.3 Unitá 3 - Numeri

621 1.3.1 L'insieme \mathbb{Z}

Indichiamo con \mathbb{N} l'insieme dei numeri naturali (compreso lo zero):

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots\},$$

ovvero quei numeri che abitualmente utilizziamo per contare, e con \mathbb{Z} l'insieme dei numeri interi

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\}.$$

622 I numeri **interi positivi** sono $1, 2, 3, \dots$ e si trovano alla destra dell'origine sulla linea dei numeri,
623 mentre i numeri **interi negativi** sono $\dots, -3, -2, -1$ e si trovano alla sinistra dell'origine sulla linea
624 dei numeri.

625 Il numero 0 non é né positivo, né negativo.

626 1.3.2 L'Algoritmo della Divisione

627 Consideriamo la divisione $b \div a$ (o anche indicata come $a : b$) tra due numeri interi, $a, b \in \mathbb{Z}$ con
628 $a \neq 0$ [1, page 18].

Lemma 1.3.1 (Lemma di divisione Euclidea (Euclid's Division Lemma)). *Siano a e b due numeri interi, cioè $a, b \in \mathbb{Z}$ con $a \neq 0$. Allora, esistono in maniera univoca due interi, $q \in \mathbb{Z}$ e $r \in \mathbb{Z}$ tali che*

$$\begin{aligned} (i) \quad & b = q \cdot a + r, \\ (ii) \quad & 0 \leq r < |a|, \end{aligned} \tag{1.3.1}$$

dove $|a|$ indica il valore assoluto di a .

629 Il numero b si chiama **dividendo**, il numero a **divisore**, q **quoziente** mentre il numero naturale
630 positivo r si chiama **resto**. Osserva che il resto r é un numero **intero positivo** minore di $|a|$.

631 Il risultato espresso dal Lemma 1.3.1 é tradizionalmente noto anche come l'**Algoritmo della**
632 **Divisione**. L'uso del termine algoritmo é però improprio dato che questo risultato non fornisce un
633 algoritmo, cioè un metodo, per trovare q e r . Questi possono essere trovati usando invece il familiare
634 metodo della divisione.

Esempio 1.3.1. *Considera le seguenti divisioni:*

- $7 : 3 = 2$ con resto di 1 perché $7 = 3 \cdot 2 + 1$
- $7 : (-3) = -2$ con resto di 1 perché $7 = -3 \cdot (-2) + 1$
- $-7 : 3 = -3$ con resto di 2 perché $-7 = 3 \cdot (-3) + 2$
- $-7 : (-3) = 3$ con resto di 2 perché $-7 = -3 \cdot 3 + 2$

Esercizio 1.3.1. Trova il quoziente q e il resto r quando

(i) 207 é diviso per 15.

[R: $q = 13, r = 12$]

(ii) -207 é diviso per -15 .

[R: $q = 14, r = 2$]

(iii) -23 é diviso per 5.

[R: $q = -5, r = 2$]

(iv) 23 é diviso per -5 .

[R: $q = -4, r = 3$]

635 1.3.3 Criteri di divisibilit 

Definizione 1.3.1. Dato un numero naturale n , cio  $n \in \mathbb{N}$, diremo che un numero naturale d divide il numero naturale n , e scriveremo $d|n$, se esiste un numero naturale c tale che $c \cdot d = n$.

636 In questo caso, il numero d si chiama un **divisore** di n oppure che n   un **multiplo** di d o che
637 n   **divisibile** per d .

638 In poche parole, d divide n se l'operazione di divisione $n \div d$ in \mathbb{N} tiene resto uguale a zero.

639 Ogni numero intero   sempre divisibile per se stesso e per l'unit : $n \div n = 1$ e $n \div 1 = n$, ovvero
640 $1|n$ ed $n|n$.

641 Dato un numero intero, esistono alcune regole che permettono di verificare se esso   divisibile ad
642 esempio per 2, 3, ... Queste regole si chiamano **criteri di divisibilit **.

643 Elenchiamo alcuni criteri di divisibilit  tra i pi  utili.

Un numero naturale n   divisibile per:

2	se l'ultima cifra � pari;
3	se la somma delle cifre � divisibile per 3;
4	se le ultime due cifre formano un numero divisibile per 4;
5	se l'ultima cifra � 0 o 5;
6	se � divisibile per 2 e per 3;
644 7	se il numero ottenuto tralasciando l'ultima cifra sommato a cinque volte l'ultima cifra � divisibile per 7;
8	se lo � il numero formato dalle sue ultime tre cifre;
9	se la somma delle sue cifre � divisibile per 9;
10	se la sua ultima cifra � 0;
11	se la somma delle sue cifre, prese con segni alterni, � divisibile per 11;

645 Consideriamo il numero 27720. Esso   divisibile per

- 2: l'ultima cifra é 0 quindi pari;
 3: la somma delle cifre é 18 quindi divisibile per 3;
 4: le ultime due cifre formano 20, un numero divisibile per 4;
 5: l'ultima cifra é 0;
 6: é divisibile sia per 2 che per 3 per quanto visto prima;
 7: il numero ottenuto tralasciando l'ultima cifra sommato a cinque volte l'ultima cifra é 2772.
 646 Per verificare che é divisibile per 7 iteriamo il processo: esso é divisibile per 7 se 287 lo é;
 quest'ultimo é divisibile per 7 se lo é 63, cosa chiaramente vera;
 8: il numero formato dalle ultime tre cifre é 720 chiaramente divisibile per 8 ($90 \cdot 8 = 720$);
 9: la somma delle sue cifre é 18, quindi divisibile per 9;
 10: la sua ultima cifra é 0;
 11: 27720 é divisibile per 11 perché la somma delle sue cifre prese con segni alterni é data da
 $2 - 7 + 7 - 2 + 0$ che é uguale a 0 che é divisibile per 11.

647 In effetti

$$648 \quad 27720 = 5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 11 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11.$$

649 1.3.4 Numeri primi e fattorizzazione

650 Numeri primi

Definizione 1.3.2. Diremo che $n \in \mathbb{N}$ é un numero primo se $n \neq 0$, $n \neq 1$ ed n é divisibile solo per se stesso e per 1.

651 In maniera piú formale possiamo dire che $n \in \mathbb{N}$ é primo se

$$652 \quad \exists d \in \mathbb{N}, d \neq 1 : d|n \text{ (cioé } d \text{ é un divisore di } n) \Rightarrow d = n.$$

653 I numeri primi minori o uguali a 100 sono

$$654 \quad 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.$$

Teorema 1.3.1. I numeri primi sono infiniti.

Teorema 1.3.2. Sia $p \in \mathbb{N}$. Il numero p é un numero primo se e solo se non é divisibile per nessun numero primo minore o uguale a \sqrt{p} .

655 Scomposizione in fattori primi: Teorema Fondamentale dell'Aritmetica

656 La scomposizione di un numero naturale maggiore di 1 in fattori primi é la rappresentazione
 657 di quel numero come prodotto dei suoi divisori che siano numeri primi. La scomposizione di un
 658 numero in fattori primi é unica. Ad esempio

$$659 \quad 420 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7.$$

680 In maniera analoga possiamo definire il MCD ed il mcm per piú numeri n_1, \dots, n_k rispettivamente
 681 come il piú grande numero che divide contemporaneamente n_1, \dots, n_k ed il piú piccolo numero
 682 divisibile per ognuno degli n_1, \dots, n_k .

Esempio 1.3.3. Calcoliamo $\text{MCD}(180, 144)$ e $\text{mcm}(180, 144)$.

$$\begin{array}{l} 180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \\ 144 = 2^4 \cdot 3^2 \end{array} \left| \begin{array}{l} \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{MCD}(180, 144) = 2^2 \cdot 3^2 = 36 \\ \text{mcm}(180, 144) = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 = 720. \end{array}$$

Esempio 1.3.4. Calcoliamo $\text{MCD}(60, 75, 210)$ e $\text{mcm}(60, 75, 210)$.

$$\begin{array}{l} 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \\ 75 = 3 \cdot 5^2 \\ 210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \end{array} \left| \begin{array}{l} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{MCD}(60, 75, 210) = 3 \cdot 5 = 15 \\ \text{mcm}(60, 75, 210) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 = 2100. \end{array}$$

683 1.3.6 Esercizi

684 **Esercizio 1.3.2.** Dimostra il seguente risultato: Siano $n, m, p \in \mathbb{N}$. Se $n = m \cdot p$ allora m o p
 685 risultano non piú grande di \sqrt{n} , cioè $(m \vee n) \leq \sqrt{n}$. [Possiamo usare questo risultato, per esempio,
 686 per verificare se un dato numero $n \in \mathbb{N}$, risulti un numero primo verificando che non abbia come
 687 divisori i numeri primi minori o uguale a \sqrt{n}]

688 **Esercizio 1.3.3.** Dimostra il seguente risultato: Siano $n, p \in \mathbb{N}$ numeri naturali positivi, e p un
 689 numero primo. Se n^2 é divisibile per p allora anche n é divisibile per p . [Usiamo questo risultato,
 690 per esempio, per dimostrare che \sqrt{p} non é un numero razionale]

691 **Esercizio 1.3.4.** Dato $n \in \mathbb{N}$. Se $2^n - 1$ é un numero primo, allora n é un numero primo. Mostra
 692 che questa implicazione non si inverte, cioè non vale il viceversa.

693 **Esercizio 1.3.5.** Si considerino i seguenti numeri

694 91 100 231 440 1003

695 Quanti di essi sono numeri primi?

696 A. Nessuno

697 B. Uno

698 C. Due

699 D. Tre

700 E. Quattro

701 **Esercizio 1.3.6.** Per quali valori di $n \in \mathbb{N}$

702
$$n^2 - 14n + 24$$

703 *è un numero primo.*

704 **Esercizio 1.3.7.** Per quali valori di $n \in \mathbb{N}$

705
$$\frac{n+7}{\sqrt{n-1}}$$

706 *è un intero positivo*

707 **Esercizio 1.3.8.** Per quali valori di $n \in \mathbb{N}$ risulta

708
$$(n^2 - n - 1)^{n+2} = 1$$

709 **Esercizio 1.3.9.** Per quali coppie (n, m) di numeri naturali, risulta

710
$$n^2 - 4m^2 = 45$$

711 1.3.7 Relazione di Ordine in \mathbb{R}

712 Diamo innanzitutto la definizione di relazione che è sinonimo di corrispondenza, per poi consi-
713 derare particolari relazioni che sono le relazioni d'ordine [2, page 29].

Definizione 1.3.3. Siano S e T insiemi (distinti o no). Qualunque sia il sottoinsieme non vuoto G di $S \times T$, la coppia

$$\mathcal{R} = (S \times T, G)$$

si chiama corrispondenza (o relazione) tra S e T rappresentata da G . L'elemento y di T si dice corrispondente dell'elemento x di S per mezzo di \mathcal{R} (o corrispondente nella relazione \mathcal{R} con x) se la coppia $(x, y) \in G$.

714 Dalla definizione data, una relazione tra l'insieme S e l'insieme T è ottenuta quindi assegnando
715 un sottoinsieme non vuoto del prodotto cartesiano $S \times T$.

716 La definizione di corrispondenza qui data è generale. Può essere una corrispondenza sia univoca
717 che plurivoca, cioè quando definiamo $G \subseteq X \times Y$, possiamo avere coppie $(x, y) \in G$ che presentano
718 la stessa prima coordinata x ma diversi corrispondenti $y \in T$.

719 **Osservazione 1.3.1.** Una funzione è una particolare relazione, nel senso che date due coppie
720 distinte di G avente la stessa prima coordinata, allora le due coppie devono essere identiche, cioè

721
$$\text{Se } (x_1, y_1) \in G \text{ e } (x_1, y_2) \in G \Rightarrow y_1 = y_2.$$

722 *Non possiamo avere coppie $(x, y) \in G$ che presentano la stessa prima coordinata.*

Definizione 1.3.4. Una relazione \mathcal{R} tra l'insieme S e se stesso si chiama relazione binaria.

723 Relazioni binarie particolari sono le **relazioni d'ordine** definite come segue [2, page 29].

Definizione 1.3.5. *Sia S un insieme non vuoto. Una relazione d'ordine in S é una relazione binaria \mathcal{R} che risulta riflessiva, transitiva ed antisimmetrica, cioè che verifica le seguenti proprietà*

O_1 : $x\mathcal{R}x \quad \forall x \in S$ (*reflessiva*)

O_2 : $x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x \implies x = y \quad \forall x, y \in A$ (*antisimmetrica*)

O_3 : $x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \implies x\mathcal{R}z \quad \forall x, y, z \in S$ (*transitiva*)

724 La coppia (S, \mathcal{R}) costituita dall'insieme S e da una relazione d'ordine su di esso si dice **insieme**
725 **parzialmente ordinato**. Se si verifica inoltre la proprietà per cui dati due qualsiasi elementi x, y
726 di S , può verificarsi una e una sola delle due circostanze, $x\mathcal{R}y$ oppure $y\mathcal{R}x$, allora diciamo che la
727 coppia (S, \mathcal{R}) é un insieme **totalmente ordinato**.

728 Nel campo \mathbb{R} dei numeri reali, si introduce un ordinamento, cioè una relazione d'ordine, che
729 si indica con il simbolo \leq e che si legge *minore o uguale*. Tale ordinamento é totale ed é dato
730 dall'ordinamento naturale dei numeri reali. Si verifica che dati $a, b \in \mathbb{R}$, la relazione d'ordine in \mathbb{R}
731 ha le seguenti proprietà [4, page 46]

O_1 : $a \leq a$ (proprietá riflessiva)

O_2 : Se $a \leq b$ e $b \leq a$, allora $a = b$ (proprietá antisimmetrica)

O_3 : Se $a \leq b$ e $b \leq c$, allora $a \leq c$ (proprietá transitiva)

O_4 : Dati due numeri a e b , sussiste una almeno delle due relazioni: $a \leq b$ o $b \leq a$ (ordinamento totale)

732 Un modo diverso di scrivere che $a \leq b$ è $b \geq a$, che si legge " b é maggiore o uguale ad a ". Si
733 usa poi il simbolo $a < b$ (a minore di b) per indicare che $a \leq b$, e che a é diverso da b , cioè $a \neq b$.
734 Analogamente, $c > d$ (c maggiore di d) significa che $c \geq d$ (ossia $d \leq c$, e che c é diverso da d , cioè
735 $c \neq d$ [4, page 46].

736 Con rispetto all'operazione di somma in \mathbb{R} , si assume che la relazione d'ordine \leq verifica il
737 seguente **assioma di invarianza per traslazione**

$$SO : \quad a \leq b \iff (a + c \leq b + c \quad \forall c \in \mathbb{R}) \quad (1.3.2)$$

738 che si esprime dicendo

Se si aggiunge ad ambo i membri di una disuguaglianza un medesimo numero reale, si ottiene una disuguaglianza ad essa equivalente.

739 Con rispetto all'operazione di moltiplicazione, si assume che la relazione d'ordine \leq verifica il
 740 seguente **assioma di ordinamento del prodotto**

$$PO : \quad x \leq y \iff (xz \leq yz \quad \forall z \geq 0) \quad (1.3.3)$$

741 che si esprime dicendo

Se si moltiplicano ambo i membri di una disuguaglianza per un medesimo numero reale positivo, si ottiene una disuguaglianza ad essa equivalente.

742 A partire dai suddetti assiomi, si ricavano le seguenti proprietà.

Esempio 1.3.5. Se $a \leq 0$, si ha $-a \geq 0$.

Proof. Sommando $-a$ ad ambedue i membri della disuguaglianza $a \leq 0$, per l'assioma PO (1.3.2) risulta dunque $a - a \leq -a$, cioè $0 \leq -a$ che è lo stesso che scrivere $-a \geq 0$. \square

743 **Osservazione 1.3.2.** In [?, page 47], la proprietà dell' Esempio 1.3.5 è assunto come assioma PO ,
 744 mentre il nostro assioma PO (1.3.3) è considerata come una proprietà da dimostrare usando gli
 745 assiomi dati.

Esempio 1.3.6. Dati $x, y \in \mathbb{R}$, si ha

$$x \leq y \iff (xz \geq yz \quad \forall z \leq 0) \quad (1.3.4)$$

che si esprime dicendo:

Se si moltiplicano ambo i membri di una disuguaglianza per un medesimo numero reale negativo, e poi si cambia il verso della disuguaglianza, si ottiene una disuguaglianza equivalente alla data.

Proof. $\forall z \leq 0$, considera $-z$ che per quanto visto nell' Esempio 1.3.5 risulta dunque $-z \geq 0$. Per l'assioma PO (1.3.3), dato che $x \leq y$, allora è anche

$$-zx \leq -zy$$

Per l'assioma SO (1.3.2) sommiamo ora ad ambedue i membri $c = zx + zy$,

$$-zx + zx + zy \leq -zy + zx + zy$$

ottenendo così

$$zy \leq zx,$$

che è lo stesso che scrivere $zx \geq zy$. \square

746 Applicando gli argomenti usati negli esempi, risolvere i seguenti esercizi.

747 **Esercizio 1.3.10.** Dati $a, a_1, b, b_1 \in \mathbb{R}$ tale che

$$a \leq b$$

748

$$a_1 \leq b_1$$

749 dimostra che è anche

750

$$a + a_1 \leq b + b_1,$$

751 che si esprime dicendo che due disuguaglianze dello stesso verso si possono sommare membro a
752 membro.

753 **Esercizio 1.3.11.** Dati $a, a_1, b, b_1 \in \mathbb{R}$ tale che

$$0 \leq a \leq b$$

754

$$0 \leq a_1 \leq b_1$$

755 dimostra che è anche

756

$$aa_1 \leq bb_1,$$

757 che si esprime dicendo che due disuguaglianze dello stesso verso si possono moltiplicare membro a
758 membro se entrambi i membri delle due disuguaglianze sono non negativi.

759 **Esercizio 1.3.12.** Dimostrare che:

- 760 • Se $a \geq 0$ e $b \geq 0$, allora $ab \geq 0$ (il prodotto di due numeri positivi è positivo).
- 761 • Se $a \geq 0$ e $b \leq 0$, allora $ab \leq 0$ (il prodotto di un numero positivo e un numero negativo è
762 negativo).
- 763 • Se $a \leq 0$ e $b \leq 0$, allora $ab \geq 0$ (il prodotto di due numeri negativi è positivo).

764 **Esercizio 1.3.13.** Dimostrare che se $0 \leq a \leq t$, si ha $a^2 \leq t^2$.

765 **Esercizio 1.3.14.** Dimostrare che se per ogni $\varepsilon > 0$, si ha $a < b + \varepsilon$, allora $a \leq b$.

766 1.3.8 Base 10 e altre basi

767 In questa Sezione ci occupiamo della rappresentazione dei numeri razionali in diverse basi. Con-
768 sideriamo dapprima il caso dei numeri naturali.

769 Il nostro **sistema di numerazione**, ovvero il modo di esprimere un numero attraverso dei
770 simboli, è di tipo **posizionale**, ovvero i simboli che utilizziamo per scrivere i numeri assumono
771 un significato diverso a seconda della posizione che occupano, ed è **decimale**, cioè **in base 10**,
772 ovvero utilizziamo 10 cifre distinte (la base: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) per rappresentare i numeri.
773 A seconda della posizione che queste cifre assumono all'interno del numero, esse hanno un valore
774 distinto. Ad esempio, il numero 12345 può essere espresso come

$$775 \quad 12345 = 5 + 40 + 300 + 2000 + 10000 = 5 \cdot 1 + 4 \cdot 10 + 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^4.$$

776 In pratica, dato un numero naturale, assumendo la prima cifra da destra corrispondere a $k = 0$, la
777 seconda a $k = 1$, etc., la cifra in posizione k a partire da destra corrisponde quindi al coefficiente
778 con cui 10^k compare nella rappresentazione decimale del numero.

779 In modo del tutto analogo si definiscono i **sistemi di numerazione posizionali in base b** con
 780 b naturale positivo qualsiasi. Tali sistemi hanno una **base** costituita da b simboli o cifre, ed ogni
 781 numero naturale si esprime in base b mediante i coefficienti delle potenze della base, disposti da
 782 sinistra verso destra in ordine decrescente.

783 Si ha infatti il seguente risultato [6, Thm. 2.7, page 80].

Teorema 1.3.4. *Sia b un numero intero positivo ≥ 2 . Allora ogni numero intero positivo $n \in \mathbb{N}$ può essere espresso in maniera univoca nella seguente forma*

$$n = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \dots + a_1 b + a_0, \quad (1.3.5)$$

dove a_0, a_1, \dots, a_k sono interi nonnegativi (cioè ≥ 0) minori di b , $a_k \neq 0$, e $k \geq 0$.

Proof. Vedi [6, page 81]. □

784 Questo teorema costituisce il fondamento della rappresentazione dei numeri naturali anche in
 785 altre basi $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$ e giustifica la seguente definizione.

Definizione 1.3.6. *L'espressione*

$$a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \dots + a_1 b + a_0$$

è la rappresentazione in base b del numero $n \in \mathbb{N}$. Concordamente, scriviamo

$$n = [a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0]_b.$$

786 Per indicare che un numero è espresso in una base b diversa dalla base 10, si scrive il numero
 787 espresso in base b tra parentesi quadre, e pedice b . Nel caso della rappresentazione decimale, si
 788 omettono tante le parentesi quanto il pedice. Per esempio, il numero 357 dovrebbe indicarsi come
 789 $[357]_{10}$.

790 Se $b \leq 10$, possiamo utilizzare i primi b numeri arabi come cifre, mentre per basi con $b > 10$
 791 bisogna introdurre altri simboli (abbiamo bisogno di b cifre), ad esempio il sistema esadecimale (cioè
 792 in base 16) utilizza le cifre 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F.

793 Mostriamo alcuni esempi di passaggio da una numerazione in base b ad una numerazione in base
 794 10.

Esempio 1.3.7. *Consideriamo il numero $[1201]_3$ espresso in base 3. Si chiede di trovare il cor-*

rispondente numero in base dieci.

Dato che la base $b = 3$, abbiamo usato i simboli $\{0, 1, 2\}$ per indicare i tre elementi della base (essi mantengono lo stesso significato che hanno nel sistema decimale). Analogamente alla rappresentazione nel sistema decimale, si ha dunque

$$\begin{aligned} [1201]_3 &= 1 \cdot 3^0 + 0 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^3 \rightarrow \text{espansione ternaria} \\ &= 1 + 0 + 18 + 27 = 46 \end{aligned}$$

Esempio 1.3.8. Ricaviamo la rappresentazione decimale del numero $[3ABC]_{16}$ rappresentato in base sedici. Nel sistema decimale, i simboli sono i seguenti

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F\}$$

dunque usiamo i dieci digiti del sistema decimale, e poi abbiamo A che corrisponde al numero 10 del sistema decimale, B corrisponde al numero undici, C corrisponde al numero dodici, D corrisponde al numero tredici, E corrisponde al numero quattordici e infine F che corrisponde al numero quindici.

Si inizia dalla cifra di destra e si procede verso sinistra, con ogni cifra rappresentando il fattore di potenza della base che nel nostro caso è 16. Si ha dunque

$$\begin{aligned} [3ABC]_{16} &= \underbrace{12}_C \cdot 16^0 + \underbrace{11}_B \cdot 16 + \underbrace{10}_A \cdot 16^2 + 3 \cdot 16^3 \rightarrow \text{espansione sedicimale} \\ &= 12 + 176 + 2560 + 12288 = 15036 \end{aligned}$$

795 Passaggio dal sistema decimale al sistema in base b

796 Vediamo ora come data la rappresentazione decimale di un numero si ricava la rappresentazione
797 in base b , cioè come otteniamo la sua espansione (1.3.5) definita nel Teorem 1.3.4.

798 Per poter trovare la rappresentazione in una base b di un numero espresso in base 10 dobbiamo
799 effettuare divisioni successive del numero per b . Ogni volta otterremo, per il lemma della divisione
800 Euclidea, un quoziente ed un resto minore di b . Questa operazione si conclude in un numero finito
801 di passi, diciamo k , con un quoziente nullo ed un resto minore di b . Il numero di partenza espresso
802 in base b è costituito da k cifre, in particolare la prima cifra (da destra) è data dal resto ottenuto
803 alla prima divisione, la seconda è data dal resto ottenuto alla seconda divisione, e così via fino alla
804 cifra k -esima.

805 **Esempio 1.3.9.** Scriviamo in base 6 il numero decimale 34567. Abbiamo dunque

$$34567 \div 6 = 5761 \text{ con resto } \textcircled{1} \rightarrow$$

$$5761 \div 6 = 960 \text{ con resto } \textcircled{1} \rightarrow$$

$$960 \div 6 = 160 \text{ con resto } \textcircled{0} \rightarrow$$

806

$$160 \div 6 = 26 \text{ con resto } \textcircled{4} \rightarrow$$

$$26 \div 6 = 4 \text{ con resto } \textcircled{2} \rightarrow$$

$$4 \div 6 = 0 \text{ con resto } \textcircled{4}$$

807 per cui sostituendo all'indietro, si ha la seguente espansione

$$34567 = (((((4 \cdot 6 + 2) \cdot 6 + 4) \cdot 6 + 0) \cdot 6 + 1) \cdot 6 + 1$$

808

$$= 4 \cdot 6^5 + 2 \cdot 6^4 + 4 \cdot 6^3 + 1 \cdot 6^1 + 1 \cdot 6^0$$

809 che presenta 6 cifre dato che la massima potenza di b che compare nell'espansione è 5. Dunque
810 risulta

811

$$[34567]_{10} = [424011]_6.$$

812 1.3.9 Esercizi

813 **Esercizio 1.3.15.** Nel sistema di numerazione ternaria le tre sole cifre usate sono 0, 1 e 2. Quindi,
814 ad esempio, si hanno le uguaglianze seguenti (nelle quali il numero in basso ricorda la base):

$$815 \quad [0]_{10} = [0]_3, \quad [1]_{10} = [1]_3, \quad [2]_{10} = [2]_3, \quad [3]_{10} = [10]_3, \quad [4]_{10} = [11]_3, \quad [5]_{10} = [12]_3$$

816 eccetera. Quale dei seguenti numeri è 912_{10} in forma ternaria?

817 A. 12101_3

818 B. 20121_3

819 C. 1020210_3

820 D. 210212_3

821 E. 1010101_3

Bibliography

- 822
- 823 [1] Burton D. M., Elementary Number Theory. McGraw-Hill, 7th Ed., 2011
- 824 [2] Cafiero F., Zitarosa A., Elementi di Teoria degli Insiemi. Liguori, 1977.
- 825 [3] Fiorenza R., Appunti delle Lezioni di Analisi Funzionale, Università degli Studi di Napoli
826 Federico II, COINOR, 1988–2011.
- 827 [4] Giusti E., Analisi Matematica 1, Boringhieri, 3rd Ed., 2002.
- 828 [5] Kane J. M., Writing Proofs in Analysis, Springer, 2016
- 829 [6] Koshy T., Elementary Number Theory with Applications, Academic Press, 2nd Ed., 2007.
- 830 [7] Marcellini P. Sbordonc C., Analisi Matematica Uno, Liguori Editore, 1998.
- 831 [8] Mariconda C., Tonolo A., Provenzano L., Matematica di Base, Corso on line on Federica Web
832 Learning
- 833 [9] ‘Barber paradox’ (2021) Wikipedia. Available at: [https://en.wikipedia.org/wiki/Barber_](https://en.wikipedia.org/wiki/Barber_paradox)
834 [paradox](https://en.wikipedia.org/wiki/Barber_paradox) (Accessed: 17 February 2022).