Esercitazione 18-01-2021

1) Sia (X_n) IID e.t.c. $E(X_1)=0$ e $E(X_1^2)=1$ → visto che sono iid. anche $E(X_n)=0\ \forall n$

Si studi conv. d. di $Z_n = \dfrac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}}$ Ricorda!

S

- Per il TLC $\dfrac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1)$
- Quindi applico la legge forte dei grandi numeri su (X_n^2)

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n} \xrightarrow{qc} E(X_1^2)=1$$

- Infine $\dfrac{\sum X_i}{\sqrt{\sum X_i^2}} = \underbrace{\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{\sum X_i^2}{n}}}}_{\text{legge forte} \Rightarrow\ = \frac{1}{\sqrt{1}}} \cdot \dfrac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{n}} =$ → TLC ⇒ $\xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1)$

$\sqrt{n}$ → $\sqrt{n \cdot \sigma^2}$, ma $\sigma = 1 \Rightarrow \sqrt{n}$

- Concludo dicendo che $Z_n \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1)$ "scelgo la conv. più debole" ⇒ lascio perdere qc.

2) Si determini $P(X^2=Y)$, X indip Y, $Y \sim Bin(3, 1/2)$, $X \sim Poisson(1)$

- valuto Y e dico che assume solo i valori $\{0,1,2,3\}$
- Quindi visto che sono indip. $P(X^2=Y) = \sum_{j=0}^{3} P(X^2=Y)\cdot P(Y=j) =$

$$= \sum_{j=0}^{3} P(X=\sqrt{j})\cdot P(Y=j)$$

- Ma Poisson è definita solo negli interi ≥0 ⇒ se $X=1$, $\sqrt{1}=1$ ✓
  $X=0$, $\sqrt{0}=0$ ✓
  $X=2$, $\sqrt{2} \neq$ intero ≥0
- Quindi dico $\sum_{j=0}^{1} P(X=\sqrt{j})\cdot P(Y=j) =$

$$P(X=\sqrt{0})\cdot P(Y=0) + P(X=\sqrt{1})\cdot P(Y=1)$$

! $Y = Bin(3, 1/2)$

$P(X=j) = \binom{n}{j} p^j \cdot (1-p)^{n-j}$

! X Poisson(1)

$P(X=j) = \dfrac{e^{-\lambda}\cdot \lambda^j}{j!}$

$$\frac{e^{-1}\cdot 1^0}{0!} \qquad \binom{3}{0}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)^{3-0}$$

$$e^{-1}\cdot\binom{3}{0}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{e^{-1}\cdot 1^1}{1!}\cdot\binom{3}{1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)^{3-1}$$

$$= e^{-1}\cdot\binom{3}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + e^{-1}\cdot\binom{3}{1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{e}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{e}\cdot 3\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2e}$$

4) Si studi la convergenza d. di $Z_n = \dfrac{\sum X_i}{\sqrt{n}}$

Per ipotesi (X_n) indip, $E(X_n)=0$, $E(X_n^2)=2$, $E(|X_n|^3) < 111$

- Noto che sono indip e $E(X_n)=0\ \forall n$ di conseguenza dico che se è vero $\dfrac{\sum E(|X_i|^3)}{(\sum E(X_i^2))^{3/2}} \to 0$ posso concludere che

- $\dfrac{\sum X_i}{\sqrt{n}}$ posso scriverla $\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sum X_i}{\sqrt{2n}}$ che è $= \sqrt{var \sum X_i} = \sqrt{\sum var X_i} = \sqrt{n\sigma^2}$ → $E(X_n^2)=2$ → $=2$

$$\sqrt{2}\cdot\frac{\sum X_i}{\sigma(\sum X_i)} \xrightarrow{d} \sqrt{2}\,\mathcal{N}(0,1) = \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,2)$$

$Z_n \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,2)$

- Quindi mi basta verificare $\dfrac{\sum E(|X_i|^3)}{(\sum E(X_i^2))^{3/2}} \to 0$

$$\to = \frac{\sum E(|X_i|^3)}{(2n)^{3/2}} \leq \frac{n\cdot 111}{(2n)^{3/2}} \to 0$$

5) Si determini la f. di rip. di $Z = X+Y$ dove X e Y sono IID $\sim exp(1)$

- Pongo $F(z) = P(Z \leq z) = \begin{cases} 0 & \text{se } z \leq 0 \\ & \text{se } z > 0 \end{cases}$

! Se $Z = X+Y$ e $X, Y \sim exp(1)$, anche $Z \sim exp(1)$ ⇒ $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x<0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

- $F(z) = P(X+Y \leq z) = E_x\{P(X+Y \leq z \mid X=x)\}$
  $= E_x\{P(Y \leq z-x)\} = \int_0^\infty P(Y \leq z-x)\cdot e^{-x}\,dx$
  ma se $z < x$ si ha $P(Y \leq z-x) = 0$
- Quindi $F(z) = \int_0^z P(Y \leq z-x)e^{-x}\,dx = \int_0^z (1-e^{-(z-x)})e^{-x}\,dx =$
  $= 1-(1+z)e^{-z}$

Nelle exp $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ e $P(X>x) = 1-F(x) = e^{-\lambda x}$