

Cognome e nome _____ Matricola _____

Appello dell'8 SETTEMBRE 2022 - Calcolo Numerico
(Ing. Chimica e dei Materiali)

Si risolvano i seguenti esercizi, **riportando le sole risposte in questi fogli**.
Risposte illeggibili NON saranno prese in considerazione.

Esercizio 1 (10 punti) (Tutto l'esercizio deve essere svolto in **aritmetica esatta**). Si consideri la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. **(3 pt.)** Si applichi il metodo di Gauss **CON** pivoting, calcolando le matrici P , L ed U e verificando che sia $P \times A = L \times U$:

 $L =$ $U =$ $P =$

2. **(2 pt.)** Si calcoli il determinante di A utilizzando la fattorizzazione ottenuta:

$$\det(L) = \underline{\hspace{2cm}} \quad \det(U) = \underline{\hspace{2cm}} \quad \det(P) = \underline{\hspace{2cm}} \quad \det(A) = \underline{\hspace{2cm}}$$

3. **(3 pt.)** Considerato il vettore $\mathbf{b} = (1, 3, -4)^T$ ed utilizzando tale fattorizzazione, si risolva il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

$$\mathbf{y} = \underline{\hspace{2cm}} \quad \mathbf{x} = \underline{\hspace{2cm}}$$

4. **(2 pt.) Domanda 1 (obbligatoria):**

- Con questa matrice, si sarebbero potute calcolare le matrici L e U della fattorizzazione con il metodo di Gauss **SENZA** pivoting? SI NO

- Si espongano le proprie considerazioni: _____

Esercizio 2: (9 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = x^4 - 1 - x.$$

1. (2 pt.) Si determinino graficamente le due soluzioni reali α_1 ed α_2 dell'equazione $f(x) = 0$, e si scrivano i due intervalli, **di ampiezza esatta 1, con estremi interi, che le contengono:**

$$\alpha_1 \in \underline{\hspace{10em}} \qquad \alpha_2 \in \underline{\hspace{10em}}$$

2. (1 pt.) Si calcoli la derivata prima della funzione:

$$f'(x) = \underline{\hspace{10em}}$$

3. (2 pt.) Considerata la **soluzione negativa**, si calcolino le approssimazioni x_1 e x_2 del metodo di Newton a partire da x_0 definito come punto medio dell'intervallo individuato (8-9 cifre decimali):

$$x_0 = \underline{\hspace{10em}}$$

$$x_1 \simeq \underline{\hspace{10em}}$$

$$x_2 \simeq \underline{\hspace{10em}}$$

4. (2 pt.) Si calcoli (facendo la differenza a mano) l'errore relativo dell'iterata x_2 rispetto alla soluzione di riferimento $\alpha_1 = -0.724491959000516$ (valore esponenziale normalizzato con 3 cifre decimali dopo il punto di radice e normalizzazione $0.xxxx\dots$):

$$\varepsilon_r = \underline{\hspace{10em}}$$

5. (2 pt.) A partire dall'equazione $f(x) = 0$ si costruiscano almeno tre metodi di punto fisso $x = g(x)$ (che abbiano la possibilità di convergere alla soluzione negativa):

$$g_1(x) = \underline{\hspace{10em}}$$

$$g_2(x) = \underline{\hspace{10em}}$$

$$g_3(x) = \underline{\hspace{10em}}$$

Esercizio 3: (2 punti) Domanda 2 (obbligatoria):

La funzione $f_1(x) = x^4 - 1$ ha una sola radice di molteplicità 4. Cosa ci si aspetta dal metodo di Newton quando la successione prodotta converge all'unica soluzione $\alpha^* = 1$? In tal caso cosa potremmo fare?

Esercizio 4 (10 punti) (Tutto l'esercizio deve essere svolto in **aritmetica esatta**). Si consideri la funzione dell'esercizio 2.

1. (1 pt.) Si costruisca la tabulazione nei nodi $\{-1, 0, 1\}$.

x_i	$y_i = f(x_i)$

2. (2 pt.) Utilizzando la forma di Newton alle **differenze divise**, si costruisca lo schema e poi si scriva il polinomio di interpolazione $P_2(x) \in \mathcal{P}_2$, verificando che restituisca le ordinate della tabulazione:

Prima riga dello schema alle differenze divise

$$P_2(x) = \underline{\hspace{10cm}}$$

3. (2 pt.) Utilizzando la forma di Newton alle **differenze finite in avanti**, si costruisca lo schema e poi si scriva il polinomio di interpolazione $P_2(x) \in \mathcal{P}_2$, verificando che restituisca le ordinate della tabulazione:

Prima riga dello schema alle differenze finite

$$P_2(x) = \underline{\hspace{10cm}}$$

4. (1 pt.) Si determini per estrapolazione in valore approssimato di $f(2)$:

$$P_2(2) = \underline{\hspace{10cm}}$$

5. (2 pt.) Si calcoli $E_2(2)$:

$$E_2(2) = \underline{\hspace{10cm}}$$

6. (2 pt.) **Domanda 3 (obbligatoria):**

- Le due prime righe dei due schemi sono uguali? SI NO

Perchè? Che relazione esiste tra i valori? _____

- I due polinomi sono uguali? SI NO

Perchè? _____
