Riassunto
giovedì 1 giugno 2023 13:56

zeri di funzioni:

N.R $\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}$ $\frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k^{\,p}} = M$ $p=2$ $M = \frac{1}{2}\left|\frac{f''(\xi)}{f'(\xi)}\right|$ se $f'(\xi)=0$ $p=1$ $M=\frac{1}{2}$

se $f'(\xi), \dots f^{(r-1)}(\xi) = 0$ $p=1$ $M = 1-\frac{1}{r}$

M.N.M $\boxed{x_{k+1} = x_k - r\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}$ con $r>1$ $p=2$ $M = \frac{f^{(r+1)}(\xi)}{f^{(r)}(\xi)}$

N.R. converge se $|\varepsilon_0| < \frac{1}{\bar{M}}$ $\bar{M} = \frac{1}{2}\frac{\max|f''(x)|}{\min|f'(x)|}$

$|\varepsilon_{k+1}| \simeq M S_{k+1}^2 \rightarrow \frac{|S_{k+1}|}{|S_k|^2} = M$

S.V. $\boxed{x_{k+1} = x_k - f(x_k)\cdot\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k)-f(x_{k-1})}}$ $p = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ $M = \frac{1}{2}\frac{f''(\xi)}{f'(\xi)}$

T.F. $\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_0)}}$ $p=1$ $M = \left|1-\frac{f'(\xi)}{f'(x_0)}\right|$

R velocità di convergenza $= -\log_{10} M$

punto fisso $f(\xi)=\xi$

se $|g'(x)| \le m < 1 \Rightarrow \xi$ unica soluzione e il metodo iterativo $\boxed{x_{k+1} = g(x_k)}$ converge

- $g'(\xi) \neq 0$ $p=1$ $M = |g'(\xi)|$ $\rightarrow E_{k+1} = \frac{g'(\xi)}{1-g'(\xi)}\cdot S_{k+1}$ $g'(\xi)<1$ ipotesi necessaria per la convergenza
- $g'(\xi) = 0$, $g''(\xi)\neq 0 \rightarrow p=2$ $M = \left|\frac{1}{2}g''(\xi)\right|$

AITKEN $\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{(g(x_k)-x_k)^2}{g(g(x_k)) - 2g(x_k) + x_k}}$ $p=2$ $M = \frac{|g'(\xi)|\left|\frac{g''(\xi)}{2}\right|}{|g'(\xi)-1|}$

STEFFENSEN $\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)^2}{f(x_k+f(x_k)) - f(x_k)}}$ $p=2$ $M = \left|\frac{1+f'(\xi)}{f'(\xi)}\right|\cdot\frac{|f''(\xi)|}{2}$

$E = p^{\frac{1}{s}}$ s = n. di valutazioni di funzioni per iterazione

	P	S	E
NR	2	2	1,4
SV	1,6	1	1,6
TF	1	1	1
AI	2	2	1,4
ST	2	2	1,4
PF	1	1	1

metodo di bisezione $p=1$ $M=\frac{1}{2}$

ALGEBRA

matrice definita positiva: $x^T A x > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^n \neq 0^n$

$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\cdot(-1)^{i+k}\det \alpha_{ik}$ α_{ik} = matrice senza riga i e colonna k

A regolare $\rightarrow \exists A^{-1} \Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow Ax=0$ ha sol.

$A = A^+ = (A^*)^T$ trasposta coniugata $\rightarrow$ hermitiana — $A = A^T$ simmetrica

$A = -A^+$ antiermitiana — $A = -A^T$ antisimmetrica

$A^+ = A^{-1} \rightarrow A^+A = AA^+ = I$ — $A^T = A^{-1}$ ortogonale $A^TA = AA^T = I$

PROPRIETÀ: non commutativa, associativa, distributiva; $(A\cdot B)^T = B^T\cdot A^T$; $(A\cdot B)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}$; $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

... $A\,A = A\,A = I$ ... ortogonale $A\,A = A\,A = I$

PROPRIETÀ: no commutativa, associativa, distributiva, $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$, $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$, $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

raggio spettrale di $A = \max \{ |\lambda_i| \mid \lambda_i \in \lambda(A) \} = \rho(A)$

$\det(A) = \det(A^T)$, autoval A^{-1}: $\frac{1}{\lambda}$

$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{a_{nn}} \end{pmatrix}$

TEO GERSHGORIN $C_i = \{ z \mid |z - a_{ii}| \leq p_i \}$ n cerchi nelle righe $p_i = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} |a_{ik}|$ somma elementi extradiagonali in riga i

$D_i = \{ z \mid |z - a_{ii}| \leq q_i \}$ n cerchi in colonne $q_i = \ldots$

gli autovalori si trovano nell'intersezione tra C e D, se intersezioni disgiunte → ognuna ha almeno 1 autoval.

SISTEMI LINEARI

$e = x - x_a$ residuo $r = Ae$

$\boxed{\text{CRAMER}}$ $x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$ $A_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ costo di $(n+1)!$ elevato

sistemi triangolari: costo $\frac{n^2}{2}$ $PAx = Pb$ non altera le soluzioni

<u>pivoting parziale</u>: trovo il + grande pivot in colonna per evitare cancellazione numerica → ottengo $Ux = y$ costo: $\frac{n^3}{3}$

<u>pivoting totale</u>: scambio anche colonne $(P_1 A P_2)(P_2^T x) = (P_1 b)$

$\quad B \quad y = c$ devo tener conto della permutazione nella soluzione,

se 1 sola permutazione $y = P_2^T x$ $x = P_2 y$

TEO LU $\det A \neq 0$ → a meno di permutazioni di righe, esiste una $A = LU$ $l_{ii} = 1$

↳ altrimenti $PA = LU$

Fattorizzazioni: Gauß - Doolittle: $l_{ii} = 1$

Gauß - Crout : $u_{ii} = 1$

Inversa della matrice $Ax = I$ $\boxed{LUx = I \quad Ly = I \quad Ux = y}$ metodo di risoluzione per ogni sistema con fatt. LU

con fatt di Doolittle $\det(A) = \pm \prod_{i=1}^{n} u_{ii}$

da Doolittle a Crout $A = LU$ → $A = \tilde{L}\tilde{U}$ $\tilde{L} = LD$ $\tilde{U} = D^{-1}U$

TEO LDU: $\det(A) \neq 0$ ∃ una $A = LDU$ $A = LD\tilde{U}$

FATT DI CROUT la sappiamo

TEO LDL^T se tutti minori principali di $A \neq 0$ e $A = A^T$ ∃ una fatt. di Cholesky $A = LDL^T$ $l_{ii} = 1$

da $A = LDL^T$ → $A = MM^T$: $A = LDL^T = \underbrace{LD^{\frac{1}{2}}}_{M} \underbrace{D^{\frac{1}{2}}L^T}_{M^T}$

da $A = LDL^T \Rightarrow A = MM^T$: $A = LDL^T = \underbrace{LD^{\frac{1}{2}}}_{M} \underbrace{D^{\frac{1}{2}}L^T}_{M^T}$

M reale se e solo se A simmetrica e def. positiva

FATT DI CHOLESKY la sappiamo

MALCONDIZIONAMENTO

$\delta_x = e = x - x_a$ errore $\rightarrow \frac{1}{\|x\|} \leq \frac{\|A\|}{\|b\|}$

$\delta b = r = Ae$ residuo $\rightarrow \frac{\|e\|}{\|x\|} \leq \|A\| \, \|A^{-1}\| \frac{\|r\|}{\|b\|}$ relazione tra errore e residuo

$\frac{1}{\|A\|\|A^{-1}\|} \cdot \frac{\|r\|}{\|b\|} \leq \frac{\|e\|}{\|x\|} \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \frac{\|r\|}{\|b\|}$ limitato sup e inf errore/sol

$K(A) = \|A\| \, \|A^{-1}\|$ numero di condizionamento

$K_2(A) = \sqrt{\frac{\lambda_{max}(A^TA)}{\lambda_{min}(A^TA)}}$

METODI ITERATIVI

$x^{k+1} = x^k + C \cdot r^k$

metodi stazionari: $x^{k+1} = E \cdot x^k + q$ convergono $\Leftrightarrow \rho(E) < 1$

$P = 1$ $M = \rho(E)$ $R = -\log_{10} \rho(E)$ $\rho(E)^k \geq \frac{\|e^k\|}{\|e^0\|}$ per sapere quante iterazioni servono: $K > \frac{-\log_{10} \varepsilon}{R}$

$A = L + D + U$

JACOBI $E_J = I - D^{-1}A$ $q_J = D^{-1}b \rightarrow$ $\boxed{\begin{aligned} x^{k+1} &= (I - D^{-1}A)x^k + D^{-1}b \\ x^{k+1} &= D^{-1}(b - Lx^k - Dx^k) \end{aligned}}$ per componenti: $\boxed{x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - (Lx^k)_i - (U_x^k)_i\right)}$

GAUSS-SEIDEL $E_S = -(L+D)^{-1}U$ $q_S = (L+D)^{-1}b \rightarrow$ $\boxed{x^{k+1} = -(L+D)^{-1}U x^k + (L+D)^{-1}b}$ per componenti: $\boxed{x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - (Lx^{k+1})_i - (U_x^k)_i\right)}$ alcune componenti devono essere risolte prima perché sono un dato per le altre

RILASSAMENTO $\boxed{x^{k+1} = x^k + w\left[x_S^{k+1} - x^k\right]}$ se $w = 1 \rightarrow$ Seidel

TEO JACOBI-SIEDEL: se A irriducibile e diagonalmente dominante (tramite permutazione di righe e colonne non posso trovare una forma) $\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline 0 & A_3 \end{array}$ o $\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline A_2 & A_3 \end{array}$ e quando $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| < a_{ii}$

$0 < w < 2 \Leftarrow$ rilassamento converge (TEO KAHAN)

$\Rightarrow$ se $A = A^T$ e $x^TAx > 0$ (OSTROWSKI-REICH)

matrice ciclica: $\exists$ indici $S, T \mid S \cup T = \{1, 2, \ldots n\}$ e $\forall a_{ij} \neq 0$ se $i = j$ $a_{ii} \neq 0$ e se $j \neq i$ $\begin{array}{l} i \in S \rightarrow j \in T \\ i \in T \rightarrow j \in S \end{array}$

matrice coerentemente ordinata: $\exists q \in \mathbb{R}^n \mid \forall a_{ij} \neq 0$ si ha $\begin{array}{ll} \text{se } j > i & q_j - q_i = 1 \\ \text{se } i > j & q_j - q_i = -1 \end{array}$

esempi: $\begin{array}{c|c} D & A \\ \hline A & D \end{array}$, $\begin{pmatrix} \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$

TEO YOUNG-VARGA: vale per matrici cicliche e coerentemente ordinate $w_{opt} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho(E_J)^2}} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho(E_S)}}$

$R_S = -\log_{10} \rho(E_S) = 2R_J$

per matrici non speciali w si trova via sperimentale minimizzando $w(K)$ K = n di iter

$$\rho(E) = \frac{\|e^{K+1}\|}{\|e\|} \qquad \|e^K\| \leq \frac{\rho^{K+1}}{1-\|E\|}$$

SISTEMI DI EQUAZIONI

$\boxed{\text{NEWTON SCHEMATIZZATO}}$

$$\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{df}{dx} & \frac{df}{dy} \\ \frac{dg}{dx} & \frac{dg}{dy} \end{pmatrix}_{x_K, y_K} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}_{x_K, y_K} \qquad x_{K+1} = x_K + \Delta x \qquad y_{K+1} = y_K + \Delta y$$

$\|e_{K+1}\| \leq K \cdot \|e_K\|^2$ ha convergenza quadratica quando $f'(\bar{\xi}) \neq 0$

se $\det\left(J(x_K, y_K)\right) = 0$ metodo si ferma, non possiamo risolverlo

INTERPOLAZIONE (trovare polinomio passante da nodi)

nodi: $(x_0, y_0)(x_1, y_1) \dots (x_n, y_n)$

sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

matrice di Vandermonde (molto malcondizionata)

$\boxed{\text{LAGRANGE}}$

$$F_0(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

$$F_1(x) = (x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)$$

ecc...

$$L_2(x) = \frac{F_2(x)}{F_2(x_2)} = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} \qquad \left(\frac{\text{Polinomio}}{\text{scalare}}\right)$$

$$P_n(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) \dots y_n L_n(x)$$

Si dimostra che è di interpolazione sostituendo

$$L_K(x_j) = \underbrace{\delta_{jK}}_{\text{delta di Kronecker}} = \begin{cases} 1 & j = K \\ 0 & j \neq K \end{cases}$$

$$E(x) = f(x) - P_n(x) \qquad x \in [x_0, x_n] \qquad E(x) = \frac{f^{n+1}(\xi_x) F(x)}{(n+1)!}$$

n grado del polinomio, $F(x) = (x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_n)$

$\boxed{\text{POLINOMIO DI NEWTON}}$

$$\begin{array}{cccccc} x_0 & y_0 & & & \\ & & \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0} & & \\ x_1 & y_1 & & \frac{a_2-a_1}{x_2-x_0} & \\ & & \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} & & \frac{b_2-b_1}{x_3-x_0} \\ x_2 & y_2 & & \frac{a_3-a_2}{x_3-x_1} & \\ & & \frac{y_3-y_2}{x_3-x_2} & & \\ x_3 & y_3 & & & \\ & & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ & & a_1, a_2, a_3 & b_1, b_2 & c \end{array}$$

$$P_3 = y_0 + a_1(x-x_0) + b_1(x-x_0)(x-x_1) + c(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

(identico a Lagrange)

$\boxed{\text{POLINOMIO DI TAYLOR}}$ come Newton ma al posto dei coeff. presi da diff. divise metto: $\frac{f^n(\xi)}{n!}$

DERIVAZIONE NUMERICA

$$f'(x_1) = \underbrace{\frac{f(x_2)-f(x_1)}{h}}_{\text{formula}} - \underbrace{\frac{h}{2} f''(\eta)}_{\text{errore}}$$

$$f'(x_1) = \frac{f(x_2)-f(x_0)}{2h} - \frac{h^2}{6} f'''(\alpha)$$

problema di canc. numerica

$$f''(x_1) = \frac{f(x_2)-2f(x_1)+f(x_0)}{\ \ } - \frac{h^2}{\ \ } f''''(\eta)$$

problema di canc. numerica

$$h''(x_1) = \frac{h(x_2) - 2h(x_1) + h(x_0)}{h^2} - \frac{h^2}{12} h''''(\eta)$$

ALGEBRA PT 2

matrice strettamente diagonalmente dominante se $|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} |a_{ik}|$

↳ def positiva

$A \in M_n$, $a_{ii} > 0$, A diag dominante $\rightarrow Re(\lambda) > 0$ $\quad 0 < Re(\lambda)$ di $D^{-1}A < 2$

A diagonalizzabile $\iff$ ha n autovettori lin. indip. $\quad SDS^{-1} = A \quad S^{-1}AS = D$

$H = H^+$ allora autovalori reali e autovettori ortonormali

matrici P sono ortogonali $P^T = P^{-1}$

MATRICE	AUTOVALORI	AUTOVETTORI
Non simmetrica	Reali o a coppie complesse	Reali o a coppie complesse
Simmetrica	Reali	Reali e ortonormali
Simmetrica e definita positiva	Reali e positivi	Reali e ortonormali
Ortogonale	Reale (-1 o 1) o complessi con norma 1	Reali o a coppie complesse
Antisimmetrica	Nulli o a coppie complesse	Reali o a coppie complesse

NORME DI VETTORI

si enunciano da: $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ con $p \geq 1$

NORMA EUCLIDEA: $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

NORMA ASSOLUTA: $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i$

NORMA MASSIMA: $\|x\|_\infty = \lim_{p \to \infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{|x_i|}{\|x\|_\infty} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}}$

NORME DI MATRICI

$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}| \right\}$ indotta da $\|x\|_\infty$ somma elementi di ogni riga, riga + alta vince

$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}| \right\}$ indotta da $\|x\|_1$ idem con colonne

norma spettrale o hilbertiana $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$ indotta da $\|x\|_2$

norma di Frobenius: $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|^2}$

APPROSIMAZIONE AI MINIMI QUADRATI

minimizzazione di $\sum_{k=0}^{m} (P_n(x_k) - y_k)^2$ (sommatoria distanze tra punti e nostro polinomio) il quadrato è per eliminare il modulo

RETTA $\begin{bmatrix} m & \sum_{k=1}^{m} x_k \\ \sum_{k=1}^{m} x_k & \sum_{k=1}^{m} x_k^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{m} y_k \\ \sum_{k=1}^{m} x_k y_k \end{bmatrix}$ sistema $Qa = v$ $\quad$ retta $= a_0 + a_1 x$

Q simmetrica e def. pos.

GENERICO POLINOMIO (grado n): $\begin{bmatrix} m+1 & \sum x_k & \dots & \sum x_k^n \\ \sum x_k & \sum x_k^2 & & \\ \vdots & & & \\ \sum x_k^{n+1} & \dots & \dots & \sum x_k^{2n} \end{bmatrix}$ $(n+1) \times (n+1)$

per minimizzare gli scarti in orizzontale anziché in verticale invertiamo x e y ottenendo $b_0, b_1 \dots$

coefficiente di correlazione $r = \sqrt{a_1 b_1}$

MODELLI NON LINEARI:

- potenza $y = a x^b$ $\quad \log x \Rightarrow x \quad \log y \Rightarrow y \quad a = e^{a_0} \quad b = a_1$
- esponenziale $y = a \cdot b^x$ $\quad a = e^{a_0} \quad e^{a_1} = b$

INTEGRALI

TRAPEZI : $\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\left[\frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(b)\right]$ $\quad S = 1$

CAVALIERI SIMPSON $\int_a^b f(x)\,dx = \frac{(b-a)}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$ $\quad E = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi)$ o $-\frac{(b-a)^5}{2880} f^{4}(\xi)$ $\quad (\xi)$ un punto di f in $[a,b]$ ecc. $\quad S = 3$

TRAPEZI COMPOSTA: $\int_a^b f(x)\,dx = \frac{(b-a)}{2n}\left[f(x_0) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(x_n)\right]$

CAVALIERI SIMPSON COMPOSTA: $\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6n}\left[f(x_0) + 2\sum_{n=1}^{m-1} f(x_{2n}) + 4\sum_{n=0}^{m-1} f(x_{2n+1}) + f(x_{2n})\right]$