

CALCOLO NUMERICO - 2° appello - 6 luglio 2023
Ingegneria Civile e Ingegneria per l'Ambiente e il Territorio (canale 2)
 (Prof.ssa Annamaria Mazza)

TEMA N. 2
 (Esprimere i risultati con almeno 7 cifre significative)

1. Si consideri l'integrale:

$$I = \int_0^1 e^{3x} \sin(\pi x) dx$$

- Calcolare le stime Q_1 e Q_2 di I mediante la formula di Cavalieri-Simpson applicata rispettivamente a 1 e 2 suddivisioni in parti uguali dell'intervallo di integrazione e fare l'estrapolazione di Richardson.
- Determinare una stima di I utilizzando la formula di Newton-Cotes di ordine 4, sapendo che i coefficienti $C_i^{(4)}$ valgono $7/90$, $32/90$, $12/90$, $32/90$ e $7/90$. Cosa si può osservare rispetto all'approssimazione ottenuta con l'estrapolazione di Richardson?
- Ricordando l'approccio teorico che porta alla formula dell'estrapolazione di Richardson e utilizzando solamente i valori Q_1 e Q_2 , fornire una stima degli errori ϵ_1 e ϵ_2 commessi con la formula di Cavalieri-Simpson semplice e composta. Sapendo poi che il valore esatto dell'integrale è $I = 3.5105223$, confrontare i risultati ottenuti con gli errori veri.

2. È data la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & 0 \\ -1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

che dipende da un parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha < 2$.

- Si trovi l'intervallo in cui far variare α in modo che il metodo di Jacobi converga. Con gli stessi valori di α converge anche il metodo di Gauss-Seidel? Se sì, per quale motivo? Spiegare.
- Si ponga poi $\alpha = -1$ e si calcoli il raggio spettrale della matrice di Jacobi. Il metodo di Jacobi converge con questo valore assegnato ad α ?
- Sempre con $\alpha = -1$ si vuole risolvere il sistema $Ax = \mathbf{b}$, con $\mathbf{b} = (3, 5, 3)^T$, applicando il metodo di Gauss-Seidel. Si giustifichi la convergenza del metodo (senza calcolare la matrice di iterazione di Gauss-Seidel). Partendo dal vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0)^T$, si calcolino tre approssimazioni $\mathbf{x}^{(1)}$, $\mathbf{x}^{(2)}$ e $\mathbf{x}^{(3)}$ del vettore soluzione \mathbf{x} .
- Sapendo che le norme infinito del vettore scarto alle iterazioni 11 e 8 sono rispettivamente $\|\mathbf{d}^{(11)}\|_\infty = 6.8890500 \times 10^{-6}$ e $\|\mathbf{d}^{(8)}\|_\infty = 2.5515000 \times 10^{-4}$, stimare il raggio spettrale della matrice di Gauss-Seidel.

3. Spiegare quando lo schema di punto fisso è lineare e ricavare, in tal caso, il fattore di convergenza dello schema e la relazione tra l'errore $|e_n|$ e l'errore iniziale $|e_0|$ attraverso il fattore di convergenza. Spiegare, inoltre, il legame tra la pendenza della retta del grafico di convergenza dello schema di punto fisso lineare e il fattore di convergenza.

Tempo a disposizione: 2 ore.

Punteggio esercizi: (10, 10, 10)