FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria dell'Energia - Canale A

A.A. 2013/2014

Esercizi sulle matrici

---

1. Determinare tutti i prodotti righe per colonne possibili tra le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Per ciascuna delle matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

   (a) stabilire se la matrice è invertibile e, in caso affermativo, calcolarne l'inversa;
   (b) calcolarne il determinante.

3. Calcolare il rango di ciascuna delle matrici degli esercizi 1 e 2.

4. Stabilire per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ sono invertibili le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ k & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & k & k \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} k & -1 & 1 \\ -1 & k & k \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & k+1 & 1 \\ k & 0 & k \\ k^2-k & k^2+k & k^2+k \end{pmatrix}.$$

5. Determinare al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ il rango delle matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ k & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & k & k \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} k & -1 & 1 \\ -1 & k & k \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & k+1 & 1 \\ k & 0 & k \\ k^2-k & k^2+k & k^2+k \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 0 & k & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1+k \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & k & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} k & 0 & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 0 & k & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -k \end{pmatrix}.$$

6. Per ciascuna delle matrici A seguenti,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix},$$

   (a) trovare, se possibile, una matrice B tale che $BA = \mathbb{I}_2$. Se tale matrice esiste, è unica?
   (b) trovare, se possibile, una matrice C tale che $AC = \mathbb{I}_3$. Se tale matrice esiste, è unica?

7. Per ciascuna delle matrici A seguenti,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix},$$

   (a) trovare, se possibile, una matrice B tale che $BA = \mathbb{I}_3$. Se tale matrice esiste, è unica?
   (b) trovare, se possibile, una matrice C tale che $AC = \mathbb{I}_2$. Se tale matrice esiste, è unica?