Derivata ordinaria

Nel caso di una funzione reale continua di una variabile reale, la sua derivata in punto x_0 nel suo dominio è il limite del rapporto incrementale al tendere dell'incremento della variabile a zero:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{df(x_0)}{dx}$$

$\frac{df(x_0)}{dx}$ *notazione di Leibniz*

$\dot{f}(x_0)$ *notazione di Newton*

$f'(x_0)$ *notazione di Lagrange*

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari
www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Derivate parziali

Caso di una funzione di più variabili ($f(x_0, x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$)

Consideriamo il rapporto tra l'incremento della funzione e l'incremento una delle variabili.

Il limite del rapporto incrementale è una derivata parziale.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0, x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_n) - f(x_0, x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{h}$$

$$= \frac{\partial f(x_0, x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{\partial x_i}$$

Equazioni differenziali

Un'**equazione differenziale** è un'equazione in cui compare una funzione incognita e alcune sue derivate.

Se la funzione è di una sola variabile, l'equazione è un'equazione differenziale ordinaria(ODE)

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 3yx = 5$$

Se l'equazione contiene derivate parziali della funzione è un'equazione alle derivate parziali (PDE)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

Moto ondulatorio

Un semplice esempio di moto ondulatorio in una dimensione è dato da uno spostamento che si propaga lungo una corda (di dimensione infinita)

$$u = f(x, t)$$

Es. singolo impulso, onda sinusoidale

Lo spostamento verso destra di un'onda è esprimibile come segue

$$f(x, t) = f(x - vt)$$

Lo spostamento verso sinistra richiede una velocità opposta

$$g(x, t) = g(x + vt)$$

Poiché l'equazione alle derivate parziali è lineare, si ha che

$$u = f(x - vt) + g(x + vt)$$

è la soluzione generale dell'equazione dell'onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

dove f e g sono funzioni arbitrarie.

***La soluzione generale di un'equazione differenziale nelle derivare parziali del secondo ordine contiene sempre due funzioni arbitrarie*.**

Onda sinusoidale

Poniamo che al tempo t=0 l'onda abbia la seguente forma sinusoidale

$$u = A\, sin(2\pi\sigma x)$$

L'andamento in un determinato istante è detto ***profilo***.

Si può traslare il profilo in modo che si sovrapponga esattamente al profilo originale.

La minima distanza necessaria è detta ***lunghezza d'onda (λ).***

La lunghezza d'onda è una misura della periodicità dell'onda nello spazio.

Introducendo la lunghezza d'onda il profilo di un'onda sinusoidale diventa:

$$u = A\, sin\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right)$$

Il reciproco della lunghezza d'onda (σ) è detto numero d'onda

$$\sigma = \frac{1}{\lambda}$$

Un'onda sinusoidale in movimento ha quindi la seguente forma

$$u = A\, sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right]$$

Dove v è la velocità di fase in quanto rappresenta la velocità di propagazione di una data fase dell'onda.

Il periodo dell'onda è il tempo (τ) che intercorre tra il passaggio di due punti in fase (es. due creste successive) in un punto x.

$$\tau = \frac{\lambda}{v}$$

La frequenza (ν), cioè il numero di oscillazioni complete nell'unità di tempo, è pari al reciproco del periodo

$$\nu = \frac{1}{\tau} = \frac{v}{\lambda}$$

Da cui l'equazione dell'onda sinusoidale si può scrive anche nella seguente forma

$$u = A\, sin[2\pi(\sigma x - \nu t)]$$

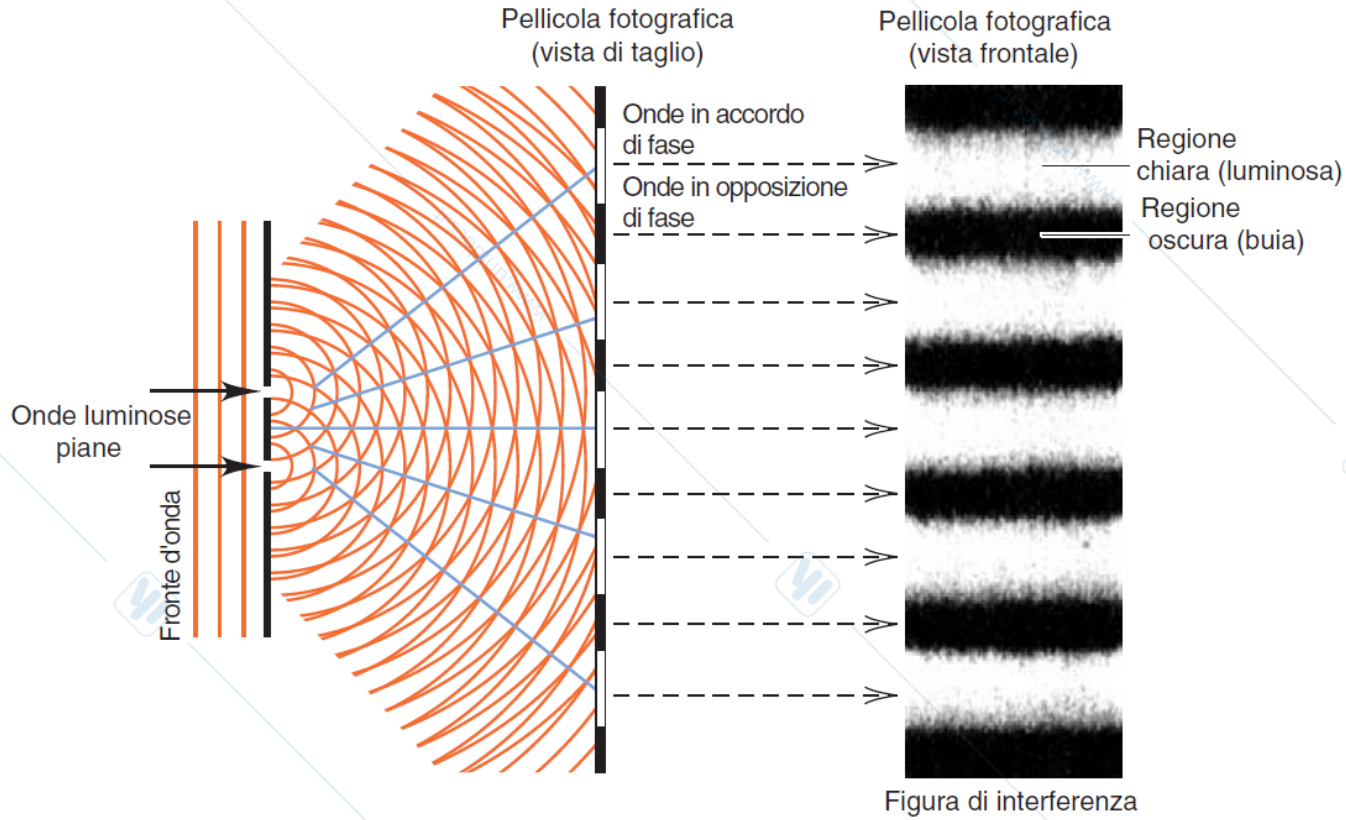
L’onda descritta è un’onda piana il suo spostamento è costante in qualsiasi piano perpendicolare alla direzione di propagazione

$$u = A\,sin[2\pi(\sigma x - \nu t)]$$

Differenziando due volte l’equazione rispetto a x e a t, si ottiene l’equazione generale del moto ondulatorio in una dimensione.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Thomas Young 1801 – diffrazione della luce



Campo di forze è una funzione che associa ad ogni posizione in una regione dello spazio un vettore che ha l'intensità e la direzione della forza.

Campo elettrico è un campo di forze generato da:

- ***cariche elettriche***
- un ***campo magnetico variabile nel tempo***.

Campo magnetico è un campo di forze generato da:

- una ***carica elettrica in movimento***
- un ***campo elettrico variabile nel tempo***.

Radiazione elettromagnetica

Le radiazioni elettromagnetiche trasferiscono energia elettromagnetica da una regione all'altra dello spazio.

Le radiazioni elettromagnetiche sono descritte da equazioni d'onda vettoriali ottenute dalle equazioni di Maxwell (1861-1862).

$$\nabla^2\vec{E} - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0 \qquad \nabla^2\vec{B} - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = 0 \qquad \varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}$$

$\vec{E}$: *intensità di campo elettrico*

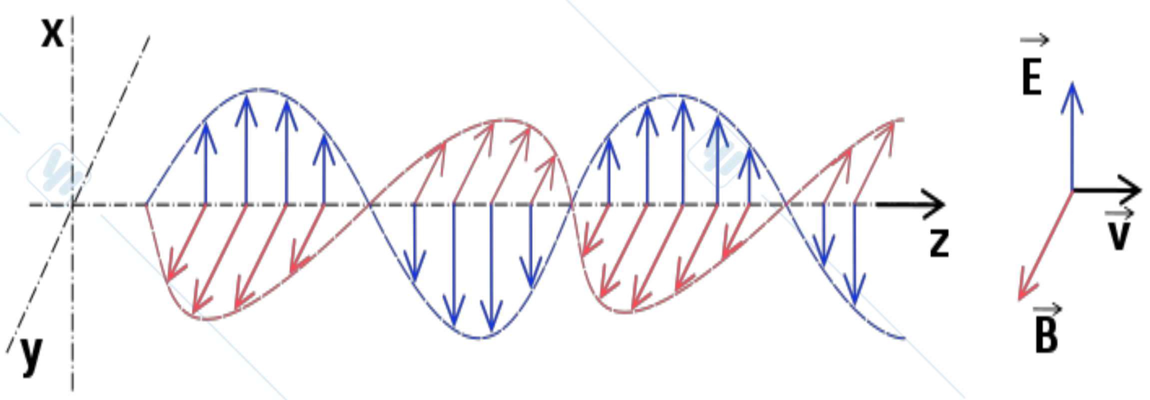
$\vec{B}$: *intensità di campo magnetico*

ε_0: *permettività elettrica nel vuoto*

μ_0: *permeabilità magnetica nel vuoto*

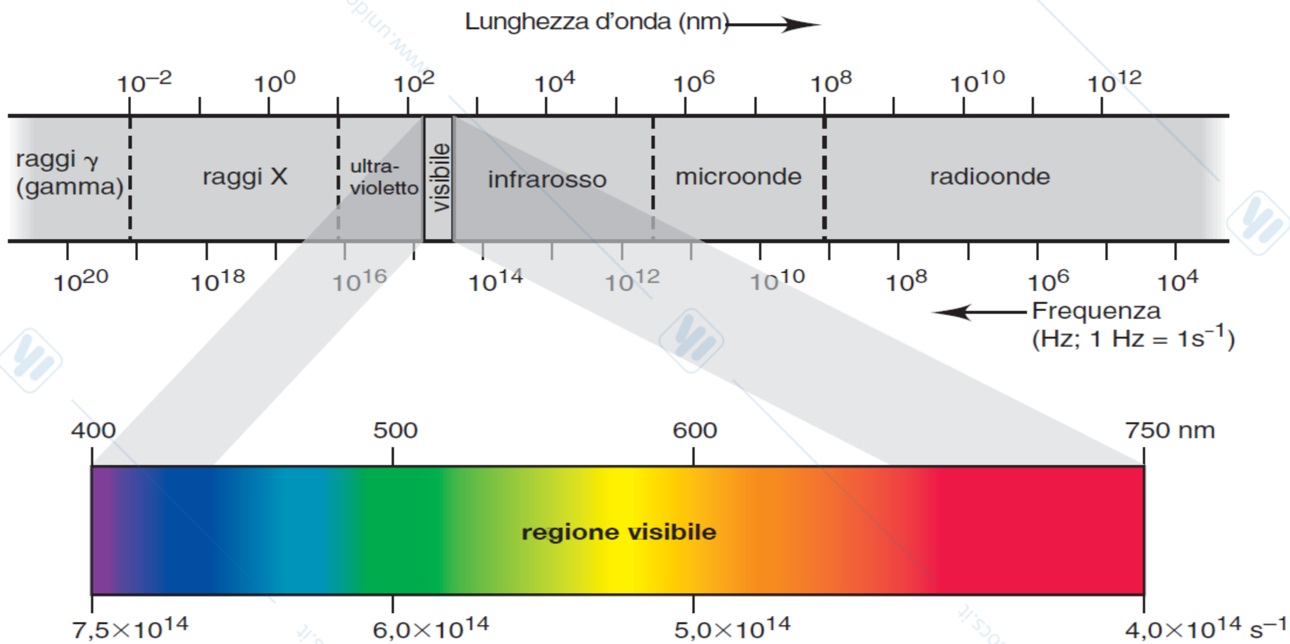
I vettori intensità di campo elettrico e intensità campo magnetico ***oscillano in fase e con la stessa frequenza***.

I vettori intensità di campo elettrico e intensità campo magnetico ***sono ortogonali tra loro e alla direzione di propagazione***.



La velocità della luce nel vuoto è una costante.

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = \lambda \nu = 299\,792\,458\ m/s$$



Corpo nero

Tutti gli oggetti assorbono ed emettono continuamente radiazioni. Le loro proprietà come assorbitori ed emittenti possono essere estremamente diverse.

Assorbimento ed emissione dipendono fortemente dalla temperatura.

In equilibrio con l'ambiente circostante, la radiazione che un corpo emette deve essere equivalente in lunghezza d'onda ed energia alla radiazione che assorbe.

Un ***assorbitore perfetto di radiazioni*** (100% della radiazione incidente è assorbita) è detto ***corpo nero***.

Legge di Stefan-Boltzman (1879)

L'intensità totale di radiazione emessa da un corpo nero su tutte le lunghezze d'onda aumenta secondo la quarta potenza della temperatura assoluta.

$$q = \sigma T^4$$

$\sigma = 5{,}670\,374\,419 \times 10^{-8}\, W m^{-2} K^{-4}$

q: $intensità\ totale\ di\ radiazione\ emessa\ (emittanza)$

σ: $costante\ di\ Stefan - Boltzmann$

Legge dello spostamento Wein (1883)

La lunghezza d'onda corrispondente al massimo di emissione radiativa di un corpo nero è inversamente proporzionale alla temperatura assoluta.

$$\lambda_{max}T = b$$

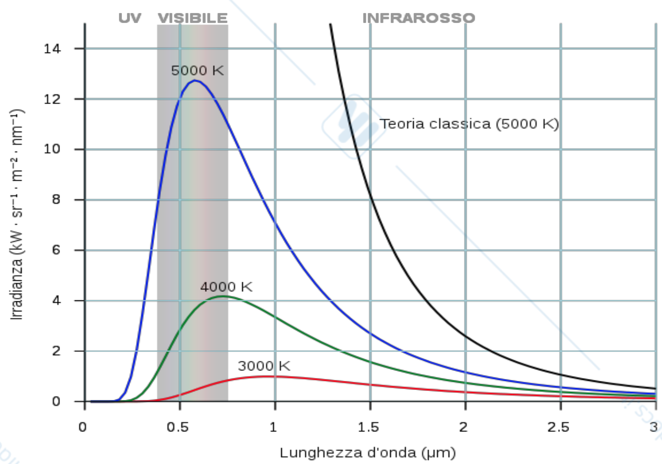
$$b = 2{,}897\,771\,955 \times 10^{-3} mK$$

Legge di Rayleigh-Jeans (1900-1905)

In fisica classica, imponendo il principio di equipartizione dell'energia

$$\rho = \frac{8\pi kT}{\lambda^4}$$

La densità spettrale tende a infinito per λ che tende a zero (catastrofe ultravioletta)



Legge della radiazione di Plank (1900)

Il corpo nero è costituito da oscillatori aventi una frequenza di vibrazione fondamentale ν i quali posso acquistare energia solo per incrementi di $h\nu$, le energie permesse sono $0, h\nu, 2h\nu, 3h\nu\ ecc.$

$E_n = nh\nu$

Densità spettrale di radiazione del corpo nero $\rho(\nu)$

$$\rho(\nu) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

$h = 6{,}626\ 070\ 15 \times 10^{-34} J\ s$

$k = 1{,}380\ 649 \times 10^{-23} J\ K^{-1}$

La densità spettrale tende a zero per λ che tende a zero.

Effetto fotoelettrico

Emissione di elettroni da parte di un metallo la cui superficie è esposta a radiazione ultravioletta.

- Non sono emessi elettroni se la radiazione non ha una frequenza maggiore a un valore di soglia caratteristico del metallo.
- Gli elettroni sono emessi immediatamente, quale che sia l’intensità della radiazione.
- L’energia cinetica degli elettroni emessi aumenta linearmente con la frequenza della radiazione incidente.

Einstein (1905)

Si assume che la radiazione elettromagnetica sia costituita da un fascio di fotoni (quantizzata).

$$h\nu = \phi + \frac{1}{2} m_e v^2$$

$h\nu: energia\ apportata\ da\ un\ fotone$

$\phi: energia\ necessaria\ a\ liberare\ l'elettrone$

$\frac{1}{2} m_e v^2: energia\ cinetica\ dell'elettrone$

- L'elettrone abbandona il metallo solo quando ha ricevuto un'energia minima pari a ϕ dal fotone

  $h\nu_0 = \phi \qquad \nu_0: frequenza\ di\ soglia)$

- Se il fotone ha energia sufficiente dalla collisione, l'espulsione dell'elettrone è immediata.

- L'energia cinetica dell'elettrone aumenta linearmente con la frequenza della radiazione incidente.

$$\frac{1}{2}m_e v^2 = h\nu - \phi$$

Elettrodinamica classica

le radiazioni elettromagnetiche hanno natura ondulatoria e sono descritte da equazioni d'onda vettoriali ottenute dalle equazioni di Maxwell.

Radiazione del corpo nero: la radiazione elettromagnetica è quantizzata.

Effetto fotoelettrico: la radiazione elettromagnetica ha natura particellare (fotoni).

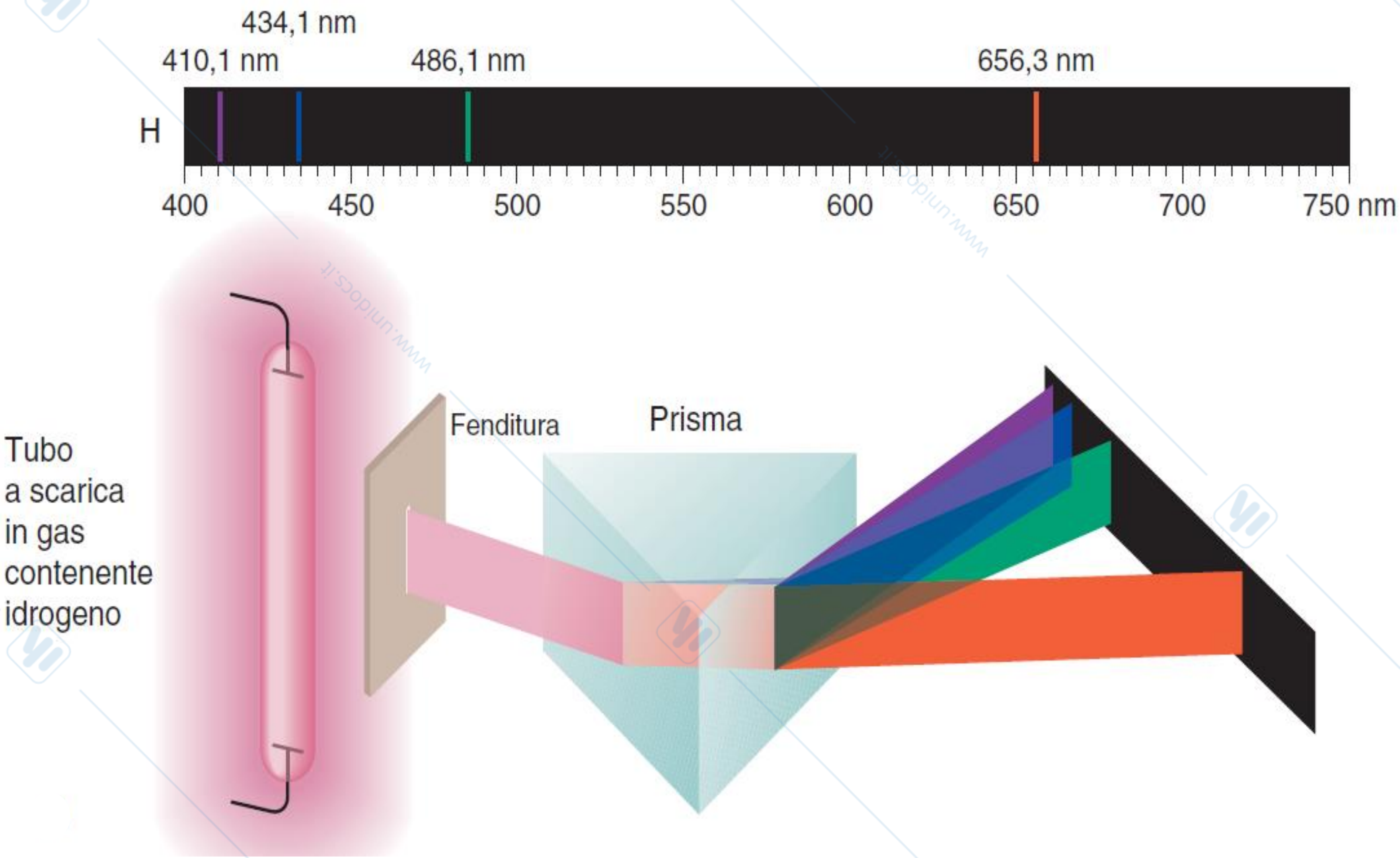
Spettri di emissione dell’idrogeno

Una scarica elettrica in un gas emette radiazioni solo di determinate lunghezze d’onda.

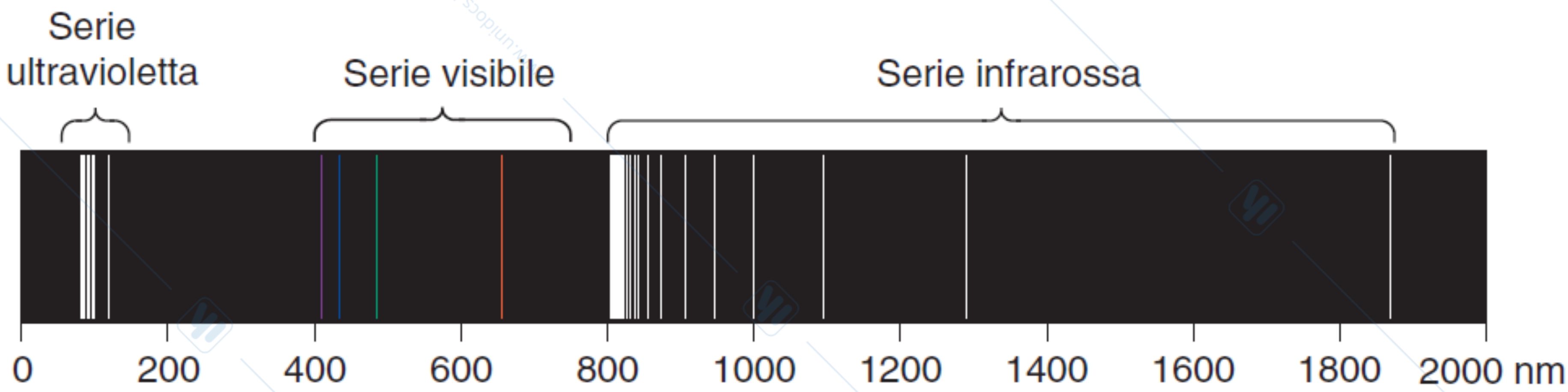
Le righe spettrali possono essere separate con un prisma o un reticolo di diffrazione e risultano molto nette ($\Delta\lambda/\lambda \sim 10^{-5}$).

L’idrogeno emette nel visibile e nell’ultravioletto.

Spettro a righe dell'idrogeno atomico



Tre serie di righe spettrali dell’idrogeno atomico



Balmer (1862) trovò che una serie di righe possono essere accuratamente rappresentate dalla seguente formula:

$$\lambda = B\frac{n^2}{n^2 - 4} \qquad n = 3,4,5 \ldots \quad e\ B = cost.$$

Questa relazione può essere scritta in termini di reciproco della lunghezza d'onda (numero d'onda)

$$\sigma = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{B}\left(\frac{n^2 - 4}{n^2}\right) = \frac{4}{B}\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right) = R_d\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

$$R = 109677{,}581\ cm^{-1} \quad (costante\ di\ Rydberg)$$

L'equazione può essere generalizzata nella forma seguente

$$\sigma = R\left(\frac{1}{{n_1}^2} - \frac{1}{{n_2}^2}\right)$$

Mediante la quale si ottengono le tutte le serie spettrali osservate sperimentalmente

$$n_1 = \begin{cases} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{cases} \quad e \quad n_2 = \begin{cases} 2,3,4 \ldots \\ 3,4,5 \ldots \\ 4,5,6 \ldots \\ 5,6,7 \ldots \\ 6,7,8 \ldots \end{cases} \Longrightarrow \quad serie\ di \begin{cases} Lyman \\ Balmer \\ Ritz - Paschen \\ Brackett \\ Pfund \end{cases}$$

Dato che

$$c = \lambda \nu \quad allora \quad \nu = \frac{c}{\lambda} = \sigma c$$

L'equazione espressa in termini di frequenza diventa

$$\nu = \frac{cR}{{n_1}^2} - \frac{cR}{{n_2}^2} = T(n_1) - T(n_2)$$

Anche le righe di emissione degli ***altri elementi*** sono rappresentate dalla differenza fra due termini, ma ***l'espressione di*** $\boldsymbol{T(n)}$ ***è più complicata***.

Principio di Ritz

La differenza fra due termini $T(n)$ *qualsiasi di un atomo fornisce la frequenza di una riga effettivamente emessa dall'atomo.*

Modelli atomici

Thomson (1907)

Il modello di J.J. Thomson (1907) che immaginava l'atomo come una sfera di carica positiva (Ze) con $10^{-10}m$ di diametro, in cui vagavano Z elettroni negativi ebbe successo per qualche anno, ma non poteva interpretare l'emissione degli spettri.

Rutherford (1911)

L'esecuzione di esperimenti di diffusione di particelle alfa (He^{2+}) da fogli sottili di vari metalli (platino, oro, ecc.) prova l'esistenza di un **nucleo atomico** confinato nel centro dell'atomo in una regione di estensione inferiore a $10^{-14}m$.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Esperimento di Rutherford di diffusione delle particelle α e scoperta del nucleo atomico