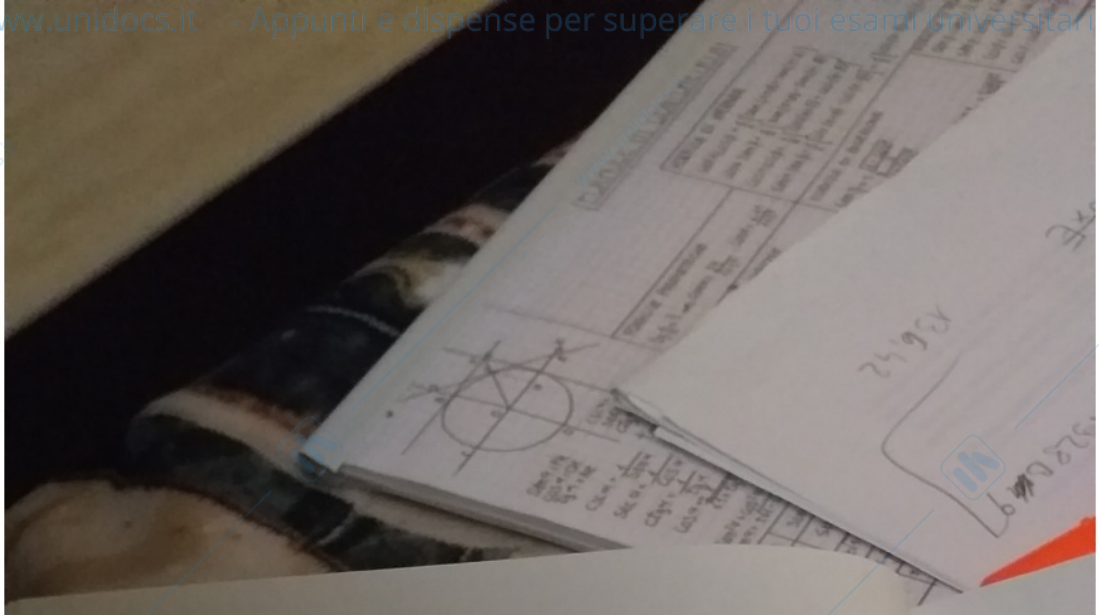
www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari



1.9.1 Operazioni con potenze aventi la stessa base

Si ricordi che $10^{-x} = 1/10^{x}$ e che $1/10^{-x} = 10^{x}$

1. *Prodotto di due potenze aventi la stessa base*: è una potenza che ha per base la stessa base e per esponente la somma degli esponenti.

ESEMPIO $10^4 \times 10^3 = 10^{(4+3)} = 10^7$; $10^{-4} \times 10^{-5} = 10^{[-4+(-5)]} = 10^{-9}$;
$10^4 \times 10^{-2} = 10^{[4+(-2)]} = 10^2$; $10^{-4} \times 10^3 = 10^{(-4+3)} = 10^{-1}$

Se le potenze hanno coefficienti diversi da 1, questi vanno moltiplicati tra loro.

ESEMPIO $(2{,}4 \times 10^3) \times (6{,}3 \times 10^2) = (2{,}4 \times 6{,}3) \times (10^3 \times 10^2) = 15{,}12 \times 10^5 =$
$= 1{,}512 \times 10^6$

2. *Rapporto di due potenze aventi la stessa base*: è una potenza che ha per base la stessa base e per esponente la differenza tra gli esponenti.

ESEMPIO $10^5/10^2 = 10^{(5-2)} = 10^3$; $10^5/10^{-2} = 10^{[5-(-2)]} = 10^7$;
$10^{-4}/10^{-1} = 10^{[-4-(-1)]} = 10^{-3}$; $10^{-5}/10^2 = 10^{(-5-2)} = 10^{-7}$

Se le potenze hanno coefficienti diversi da 1, questi vanno divisi tra loro.

ESEMPIO $(2{,}4 \times 10^5)/(6{,}3 \times 10^2) = (2{,}4 : 6{,}3) \times (10^5 : 10^2) = 0{,}381 \times 10^3 =$
$= 3{,}81 \times 10^2$

3. *Somma e sottrazione di potenze in base dieci*: le potenze devono avere lo stesso esponente e i coefficienti vanno sommati (o sottratti).

ESEMPIO $6{,}02 \times 10^{23} + 4{,}5 \times 10^{21} = 602 \times 10^{21} + 4{,}5 \times 10^{21} = 606{,}5 \times 10^{21} =$
$= 6{,}065 \times 10^{23}$

Oppure: $6{,}02 \times 10^{23} + 4{,}5 \times 10^{21} = 6{,}02 \times 10^{23} + 0{,}045 \times 10^{23} =$
$= 6{,}065 \times 10^{23}$

ESEMPIO $8{,}45 \times 10^4 - 7{,}33 \times 10^3 = 84{,}5 \times 10^3 - 7{,}33 \times 10^3 = 77{,}17 \times 10^3 =$
$= 7{,}717 \times 10^4$

Oppure: $8{,}45 \times 10^4 - 7{,}33 \times 10^3 = 8{,}45 \times 10^4 - 0{,}733 \times 10^4 =$
$= 7{,}717 \times 10^4$

1.10 Operazioni con le radici

Si ricordi che: $\sqrt{x} = x^{1/2}$; $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$; $\sqrt[n]{x^y} = x^{y/n}$ e che, se si vuole calcolare mentalmente la radice quadrata di una potenza di dieci, l'esponente della potenza deve essere un multiplo di due (cioè un numero pari).

ESEMPIO $\sqrt{10^3} = \sqrt{10 \times 10^2} = 10\sqrt{10}$; $\sqrt{3 \times 10^5} = \sqrt{30 \times 10^4} = 10^2\sqrt{30}$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

CAPITOLO 1

Grandezze e unità di misura. Richiami di matematica

Grandezze e unità di misura

1.1 Grandezze fondamentali

Ricordiamo che una grandezza è una entità misurabile e che il numero che esprime il suo valore dipende dalle unità di misura adottate.

Il Sistema Metrico Internazionale si basa su sette grandezze fondamentali che sono riportate in Tabella 1.1, con i relativi simboli e le relative unità di misura.

Tabella 1.1

Grandezza	Unità di misura	Simbolo
Lunghezza	metro	m
Massa	kilogrammo	kg
Tempo	secondo	s
Corrente elettrica	ampere	A
Temperatura termodinamica	kelvin	K
Quantità di sostanza	mole	mol
Intensità luminosa	candela	cd

1.2 Grandezze derivate

Tutte le altre grandezze possono essere derivate da quelle fondamentali attraverso le co dette equazioni definitrici. In Tabella 1.2 sono riportate alcune grandezze derivate.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

1.4 Prefissi decimali moltiplicativi e riduttivi

A causa delle unità di misura adottate, a volte capita che il valore di una grandezza debba essere espresso con numeri che risultano troppo grandi o troppo piccoli. In questi casi è conveniente introdurre dei prefissi moltiplicativi o riduttivi che indicano alcune potenze decimali dell'unità di base. In Tabella 1.4 vengono riportati questi prefissi.

Tabella 1.4

Prefisso	Simbolo	Fattore moltiplicativo o riduttivo
tera	T	10^{12}
giga	G	10^{9}
mega	M	10^{6}
kilo	k, K	10^{3}
etto	h	10^{2}
deca	da, D	10
deci	d	10^{-1}
centi	c	10^{-2}
milli	m	10^{-3}
micro	μ	10^{-6}
nano	n	10^{-9}
pico	p	10^{-12}
femto	f	10^{-15}
atto	a	10^{-18}

1.5 Numeri, notazione scientifica e cifre significative

Quando si effettua una misura, come può essere la determinazione della lunghezza o della massa di un corpo, il valore ottenuto non rappresenta mai il valore vero di quella grandezza, in quanto ogni misura è affetta da una certa imprecisione che dipende dalla sensibilità dello strumento usato. In generale, quanto più sensibile è lo strumento tanto più precisa risulta la misura e quindi tanto più il valore ottenuto si avvicina al valore vero.

Supponiamo, ad esempio, di misurare una moneta su una bilancia sensibile al grammo e che il suo peso risulti "11 g".

Supponiamo ora di ripesare la stessa moneta con altre bilance sensibili rispettivamente al decimo, al centesimo, al millesimo e al decimillesimo di grammo, e che il peso risulti:

10,9 g 10,91 g 10,919 g 10,9190 g

Come si vede, il numero di cifre, dette cifre significative, che esprime il valore della grandezza in esame dipende dalla sensibilità dello strumento con cui viene effettuata la misura. Nel caso in

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

1.7 Regole per arrotondare i risultati

Si lascia invariata l'ultima cifra da scrivere se la prima cifra da eliminare è inferiore a 5.

ESEMPIO Se il risultato 7,6941 deve contenere tre cifre significative, lo si arrotonda a 7,69 in quanto la prima cifra da eliminare, 4, è inferiore a 5.

Si aumenta di una unità l'ultima cifra da scrivere se la prima cifra da eliminare è superiore a 5.

ESEMPIO Se il risultato 9,47872 deve contenere quattro cifre significative, lo si arrotonda a 9,479 in quanto la prima cifra da eliminare, 7, è superiore a 5.

Nel caso in cui la cifra da eliminare sia proprio 5:

a) Si lascia invariata l'ultima cifra da scrivere se essa è pari (es. se il risultato 0,245 deve contenere due cifre significative, lo si arrotonda a 0,24, perché si elimina il 5 e la cifra precedente, 4, è pari).

b) Si aumenta di una unità l'ultima cifra da scrivere se essa è dispari (es. se il risultato 0,2375 deve contenere tre cifre significative, lo si arrotonda a 0,238, perché si elimina il 5 e la cifra precedente, 7, è dispari).

Richiami di matematica

1.8 Minimo comune multiplo (m.c.m.) e massimo comune divisore (m.c.d.)

Dati due o più numeri, per trovare il loro m.c.m. e/o il loro m.c.d. i numeri devono essere scomposti in fattori.

Il **m.c.m.** è dato dal prodotto dei fattori comuni e non comuni presi con il massimo esponente.

Il **m.c.d.** è dato dal prodotto dei fattori comuni presi col minimo esponente.

ESEMPIO Trovare il m.c.m. e il m.c.d dei numeri 12.600 e 750.
Scomponendo in fattori, si ha:

$12.600 = 2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 7$; $750 = 2 \times 3 \times 5^3$

m.c.m. $= 2^3 \times 3^2 \times 5^3 \times 7 = 63.000$; m.c.d. $= 2 \times 3 \times 5^2 = 150$

1.9 Operazioni con le potenze

Ricordiamo che una potenza è costituita da un numero elevato ad un certo esponente.

Così, col simbolismo a^b si intende che il numero a (base) va moltiplicato per se stesso tante volte quanto è il valore di b (esponente). Pertanto, $a^3 = a \times a \times a$.

Si ricordi che $a^0 = 1$ e che $a^1 = a$.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Tabella 1.2

Grandezze derivate	Unità di misura	Simbolo	Dimensioni
Volume	metro cubo	m^3	m^3
Carica elettrica	coulomb	C	$A \cdot s$
D.d.p. elettrico	volt	V	$J \cdot A^{-1} \cdot s^{-1} = kg \cdot m^2 \cdot A^{-1} \cdot s^{-3}$
Energia	joule	J	$kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}$
Forza	newton	N	$kg \cdot m \cdot s^{-2}$
Frequenza	hertz	Hz	s^{-1}
Pressione	pascal	Pa	$N \cdot m^{-2} = kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-2}$
Resistenza	ohm	Ω	$V \cdot A^{-1} = kg \cdot m^2 \cdot A^{-2} \cdot s^{-3}$
Potenza	watt	W	$J \cdot s^{-1} = kg \cdot m^2 \cdot s^{-3}$
Conduttanza	siemens	S	$\Omega^{-1} = A \cdot V^{-1}$

1.3 Fattori di conversione tra grandezze

Sebbene il Sistema Metrico Internazionale raccomandi l'uso delle surriportate unità di misura, molto spesso tali raccomandazioni vengono disattese. Ad esempio, la pressione, che deve essere espressa in pascal, nella maggior parte dei casi viene riportata in atmosfere o in bar; la forza, che deve essere espressa in newton, viene riportata in dine, ecc.

In Tabella 1.3 vengono riportati i fattori di trasformazione tra alcune grandezze.

Tabella 1.3 Fattori di conversione tra grandezze

Grandezza da convertire	Fattore moltiplicativo	Grandezza convertita
Atmosfere (atm)	760	millimetri di mercurio (mmHg)
Atmosfere	101.325	pascal (Pa)
Atmosfere	1,0333	kilogrammi/cm^2
Atmosfere	1,0132	bar
Pascal (Pa)	$9{,}869 \times 10^{-6}$	atmosfere
Pascal	0,0075	millimetri di mercurio
Bar	0,987	atmosfere
Kilogrammi/cm^2	0,968	atmosfere
Millimetri di mercurio	133,322	pascal
Kilocalorie	4.186,8	joule
Joule	$2{,}3884 \times 10^{-4}$	kilocalorie
Joule	10^7	erg
Litri · atmosfere (L atm)	101,325	joule
Newton (N)	10^5	dine (dyn)
Grammi/litro (g/L)	1000	parti per milione (p.p.m.)

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

resse il numero di cifre significative risulta rispettivamente: "due" per 11 g; "tre" per 10,9; "quattro" per 10,91; "cinque" per 10,919; "sei" per 10,9190.

In generale, quando una **misura è espressa da un numero maggiore di uno**, tutte le cifre di cui è costituito il numero sono cifre significative, compresi gli zeri.

Pertanto, nelle misure: 208 g; 380 cm; 3,21 m; 1,09 L; 5,432 mm; 1,8000 Kg; 18,0 mg, ci sono, rispettivamente, tre, tre, tre, tre, quattro, cinque, tre cifre significative.

Viceversa, quando una **misura è espressa con un numero minore di uno**, gli zeri che precedono la prima cifra diversa da zero non sono cifre significative.

Ad esempio, la misura 0,083 L ha due cifre significative; la misura 0,008 L ha una sola cifra significativa.

Sono, invece, cifre significative tutti gli zeri che si trovano dopo la prima cifra diversa da zero.

Pertanto, le misure 0,030 mL; 0,00450 mL; 0,23000 g, hanno rispettivamente due, tre, cinque cifre significative.

Un modo semplice per individuare il numero delle cifre significative è quello di esprimere il numero secondo la notazione scientifica, cioè nella forma

$$A{,}bcdef \times 10^{n}$$

in cui A è un numero compreso tra 1 e 9; b, c, d, e, f sono numeri compresi tra zero e nove; n è l'esponente della base 10.

ESEMPIO Esprimere in notazione scientifica i numeri 0,0000415 (tre cifre significative) e 85.700 (cinque cifre significative):

$$0{,}0000415 = 4{,}15 \times 10^{-5} \quad ; \quad 85.700 = 8{,}5700 \times 10^{4}$$

1.6 Operazioni e cifre significative

Nelle operazioni di moltiplicazione, divisione, somma e sottrazione non si deve alterare la precisione con cui sono state effettuate le misure, e quindi, con queste operazioni non è possibile aumentare la precisione di un risultato.

Pertanto, il risultato delle operazioni deve contenere tante cifre significative quante sono quelle contenute nella misura con il minor numero di cifre significative.

ESEMPIO Nell'operazione 6,813 mg/mL × 0,712 mL = 4,85086 mg, il risultato va espresso con tre cifre significative, ovvero come 4,85 mg, perché la misura meno precisa (0,712 mL) contiene tre cifre significative.
Analogamente, nell'operazione

$$4{,}7283\ \text{g} + 3{,}879\ \text{g} + 21{,}71\ \text{g} + 4{,}5\ \text{g} + 148\ \text{g} = 182{,}81730\ \text{g}$$

il risultato deve essere espresso come 182 g, perché la somma delle quantità non può essere più precisa della quantità (148 g) che è la misura meno precisa (±1 g).

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

1.11 Logaritmi

Si definisce logaritmo di un numero (a) in una data base (b) e si scrive:

$$\log_b a = x$$

l'esponente a cui bisogna elevare la base del logaritmo per ottenere il numero.

Pertanto, si ha la seguente relazione: $b^x = a$

I logaritmi possono essere in base 10 (logaritmi decimali o di Briggs) e vengono indicati con la notazione log, oppure in base e (logaritmi naturali o neperiani, $e = 2{,}71828$) e vengono indicati con la notazione ln.

Tra le due serie di logaritmi sussiste la relazione: $\ln a = 2{,}303 \times \log a$.

1.11.1 *Operazioni con i logaritmi*

Il logaritmo di un prodotto è uguale alla somma dei logaritmi:

$$\log (a \times b) = \log a + \log b$$

Il logaritmo di un rapporto è uguale alla differenza dei logaritmi:

$$\log (a/b) = \log a - \log b \quad ; \quad \text{ne consegue che } \log (1/a) = -\log a$$

Il logaritmo di una potenza è uguale al prodotto della potenza per il logaritmo della base:

$$\log a^b = b \times \log a$$

ESEMPIO $\log \sqrt{a} = \log (a)^{y/n} = \frac{y}{n} \log a$; ; $\log \sqrt[n]{a} = \log (a)^{1/n} = \frac{1}{n} \log a$;

$$\log \sqrt[n]{a^y} = \log (a)^{y/n} = \frac{y}{n} \log a$$

1.12 Equazioni di secondo grado

Sia data la seguente equazione di secondo grado:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

in cui a, b, c sono dei numeri ed x è l'incognita.

L'equazione ammette le seguenti due soluzioni:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari