CI Matematica - Elementi di Matematica A
Prova in Itinere: 26 Novembre 2019

COGNOME	NOME	MATRICOLA	FIRMA

Prof. Giovanni Valente

ISTRUZIONI

- Riportare le soluzioni e i procedimenti seguiti per lo svolgimento degli esercizi nello spazio sotto alle domande.
- Utilizzare esclusivamente una penna nera o blu.
- Tempo a disposizione: 1h 30'.

SPAZIO RISERVATO AL DOCENTE

Esercizio 1	Esercizio 2	Esercizio 3	Esercizio 4	Esercizio 5	Totale

ESERCIZIO 1 (*4 punti*)
Determinare se le seguenti asserzioni sono vere (V) oppure false (F).

F • (a) (*1 punto*) La funzione $f(x) = 4\tan x$ ha una discontinuitá di seconda specie in $x = 0$.

V • (b) (*1 punto*) La funzione $f(x) = |-2x + 3x^3|$ é pari.

V • (c) (*1 punto*) Date le funzioni $f(x) = x^2$ e $g(x) = x^3$, si ottiene l'uguaglianza $f(g(x)) = g(f(x))$ per le funzioni composte.

V • (d) (*1 punto*) La funzione $f(x) = x^{2\alpha}$ é sempre non-negativa se α é un numero naturale.

ESERCIZIO 2 (*8 punti*)
Si risolvano i seguenti limiti, derivate ed integrali.

• (a) (*1 punto*) $\lim_{x\to+\infty} \frac{(x^3+2)}{(-x+1)x^2} =$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{-x^3} = -1$$

• (b) (*2 punti*) $\lim_{x\to+1} \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1} =$

$$= \lim_{x\to+1} \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \lim_{x\to+1} \frac{\cancel{x-1}}{\cancel{x-1}} \cdot \frac{1}{x+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

$$= \lim_{x\to+1} \frac{1}{x+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{1+1} \cdot \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{4}$$

- (c) (*1 punto*) $\frac{d}{dx}(x^2 \ln(\sqrt{2x}+1)) =$

$$= 2x \cdot \ln(\sqrt{2x}+1) + x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2x}+1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x}} \cdot 2$$

$$= 2x \cdot \ln(\sqrt{2x}+1) + \frac{x^2}{\sqrt{2x}(\sqrt{2x}+1)}$$

$$= x\left(2 \ln(\sqrt{2x}+1) + \frac{x}{\sqrt{2x} \cdot (\sqrt{2x}+1)}\right)$$

- (d) (*2 punti*) $\frac{d}{dx}(\frac{\sqrt{x}}{2\sin x^2}) =$

$$= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} 2 \sin x^2 - \sqrt{x} \cdot 2\cos x^2 \cdot 2x}{4\sin^2 x^2}$$

$$= \frac{\frac{\sin x^2}{\sqrt{x}} - 4\sqrt{x} \cos x^2}{4 \sin^2 x^2} = \frac{\sin x^2 - 4x\cos x^2}{4\sqrt{x} \sin^2 x^2}$$

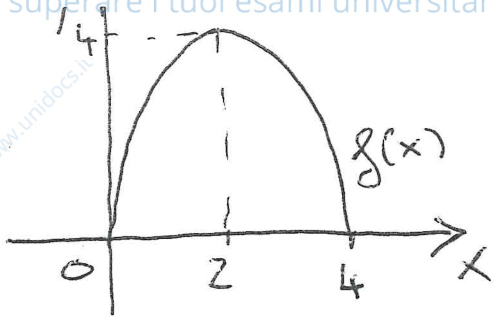
- (e) (*2 punti*) $\int_3^4 \frac{1}{x^2-3x+2} dx = \int_3^4 \frac{1}{(x-1)(x-2)} dx = \int_3^4 \left(\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}\right) dx$

$$Ax - 2A + Bx - B = 1 \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ -2A-B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-B \\ 2B-B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_3^4 \frac{-1}{x-1} dx + \int_3^4 \frac{1}{x-2} dx = -\ln|x-1| \Big|_3^4 + \ln|x-2| \Big|_3^4$$

$$= -\ln 3 + \ln 2 + \ln 2 - \ln 1$$

$$= -\ln 3 + 2\ln 2 + 0 = \ln 4 - \ln 3 = \ln \frac{4}{3}$$



ESERCIZIO 3 (*4 punti*)
Sia data la funzione $f(x) = -x^2 + 4x$.

- (a) (*2 punti*) Calcolare l'area A compresa fra la curva determinata da $f(x)$ e l'asse delle ascisse.

$$f(x) = 0 \iff \begin{matrix} x=0 \\ x=4 \end{matrix}$$

$$A = \int_0^4 f(x)\,dx = \int_0^4 (-x^2+4x)\,dx = -\frac{1}{3}x^3\Big|_0^4 + 2x^2\Big|_0^4$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot 4^3 - \frac{1}{3}0^3 + 2\cdot 4^2 - 2\cdot 0^2$$

$$= -\frac{64}{3} + 32 = \frac{-64+96}{3} = \frac{32}{3}$$

- (b) (*2 punti*) Calcolare il volume V del solido di rotazione ottenuto ruotando attorno all'asse delle ascisse la funzione $f(x)$ nell'intervallo $[0, +1]$.

$$V = \pi \int_0^1 [f(x)]^2 dx = \pi \int_0^1 (-x^2+4x)^2 dx$$

$$= \pi \int_0^1 (x^4 - 8x^3 + 16x^2)\,dx$$

$$= \pi \left[\frac{1}{5}x^5\Big|_0^1 - 2x^4\Big|_0^1 + \frac{16}{3}x^3\Big|_0^1 \right]$$

$$= \pi\left(\frac{1}{5} - 2 + \frac{16}{3}\right) = \pi\,\frac{3-30+80}{15} = \frac{53}{15}\pi$$

ESERCIZIO 4 (*4 punti*)
Problema di Cauchy. Sia data la seguente equazione differenziale nell'incognita y con dati iniziali fissati:

$$\begin{cases} y'(t) = & (2t^2 - t)y \\ y(1) = & e \end{cases}$$

- (*3 punti*) Determinare la soluzione $y(t)$.

$$\frac{dy}{dt} = (2t^2 - t)y \Rightarrow \frac{dy}{y} = (2t^2 - t)dt$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int (2t^2 - t)dt \Rightarrow \ln|y| = \frac{2}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + C$$

$$\Rightarrow y(t) = e^{\frac{2}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + C}$$

ATO INIZIALE

$$y(1) = e \Rightarrow e^{\frac{2}{3}\cdot 1^3 - \frac{1}{2}\cdot 1 + C} = e^{\frac{2}{3} - \frac{1}{2} + C} = e$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + C = 1 \Rightarrow C = 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

$$\boxed{\text{SOLUZIONE} \quad y(t) = e^{\frac{2}{3}t^3 - \frac{1}{2}t + \frac{5}{6}}}$$

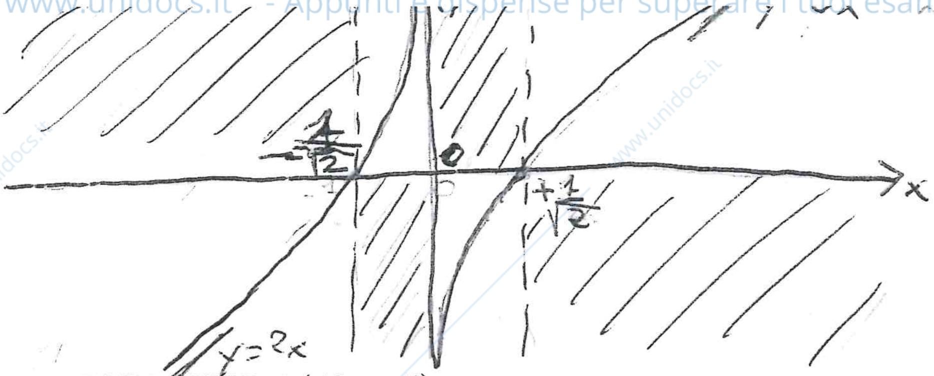
- (*1 punti*) Calcolare la pendenza della retta tangente a $y(t)$ nel punto $t = -1$.

$$y'(t) = (2t^2 - t)\, y(t) = (2t^2 - t)\, e^{\frac{2}{3}t^3 - \frac{1}{2}t + \frac{5}{6}}$$

$$y'(-1) = [2(-1)^2 - (-1)] \cdot e^{\frac{2}{3}(-1)^3 - \frac{1}{2}(-1) + \frac{5}{6}}$$

$$= 3e^{-\frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{5}{6}} = 3 \cdot e^{\frac{2}{3}}$$

PENDENZA DELLA RETTA TANGENTE A $y(t)$ IN $t =$



ESERCIZIO 5 (*10 punti*)
Si studi la funzione $f(x) = \frac{2x^2-1}{x}$. In particolare si determinino relativamente a $f(x)$: dominio, punti di singolaritá, zeri, segno, limiti, asintoti, crescenza e decrescenza, estremi locali e globali, curvatura, punti di flesso. Se ne tracci inoltre un grafico qualitativo.

DOMINIO $\quad x \neq 0 \Rightarrow D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$x=0$ PUNTO DI SINGOLARITA'

ZERI $\quad 2x^2-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{\sqrt{2}} \wedge x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

SEGNO $\quad \left\| \begin{array}{l} 2x^2-1 \geq 0 \\ x>0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\| \begin{array}{l} x \leq -\frac{1}{\sqrt{2}} \vee x \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x>0 \end{array} \right.$

$-\frac{1}{\sqrt{2}} \quad 0 \quad \frac{1}{\sqrt{2}}$
$+++++ \quad - - - - \quad +++++++$
$- - - - - - \quad +++++++++$
$- \quad + \quad - \quad +$

$\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \cup \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$

LIMITI E ASINTOTI

$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2-1}{x} = -\infty$ $\qquad m=\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2-1}{x^2} = 2 \;\Big|\; q=\lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{2x^2-1}{x} - 2x\right) = 0$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2-1}{x} = +\infty$ $\qquad \Rightarrow y = 2x$ ASINTOTO OBLIQUO

$\lim_{x\to0^-} \frac{2x^2-1}{x} = \frac{-1}{0^-} = +\infty \;\Big|\; \lim_{x\to0^+} \frac{2x^2-1}{x} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$ $\qquad x=0$ ASINTOTO VERTICALE

CRESCENZA E ESTREMI

$f'(x) = \frac{4x\cdot x-(2x^2-1)\cdot 1}{x^2} = \frac{4x^2-2x^2+1}{x^2} = \frac{2x^2+1}{x^2}$

$f'(x)=0 \quad \nexists x \in D(f)$ $\qquad$ NO ESTREMI

$f'(x) \geq 0 \quad \left\| \begin{array}{l} 2x^2+1 \geq 0 \\ x^2 \geq 0 \end{array} \right. \quad \forall x \in D(f)$ $\qquad$ SEMPRE CRESCENTE

CURVATURA E PUNTI DI FLESSO

$f''(x) = \frac{4x\cdot x^2-(2x^2+1)\cdot 2x}{x^4} = \frac{4x^3-4x^3-2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3}$

$f''(x)=0 \quad \nexists x \in D(f)$ NO PUNTI DI FLESSO

$f''(x) \geq 0 \quad -x^3 \geq 0 \Rightarrow x \leq 0$ CONVESSA $\;|\; x \geq 0$ CONCAVA

CI Matematica - Elementi di Matematica A
Verifica per Corso di Ripasso: 26 Novembre 2019

COGNOME	NOME	MATRICOLA	FIRMA

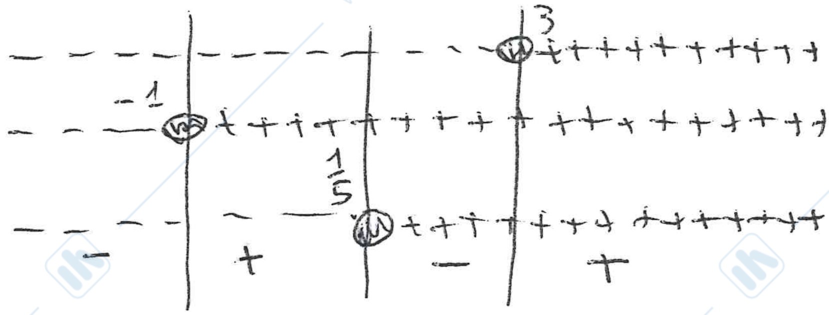
Prof. Giovanni Valente

ISTRUZIONI: Riportare le soluzioni e i procedimenti seguiti per lo svolgimento degli esercizi nello spazio sotto alle domande. Utilizzare esclusivamente una penna nera o blu. Tempo a disposizione: 20'.

1. Trovare i valori di x per cui: $\frac{x^2-2x-3}{1-5x} \le 0$

$$\frac{x^2-2x-3}{1-5x} \le 0 \Rightarrow \frac{(x-3)(x+1)}{5x-1} \ge 0$$

$$\begin{cases} x-3 \ge 0 \\ x+1 \ge 0 \\ 5x-1 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge 3 \\ x \ge -1 \\ x \ge \frac{1}{5} \end{cases}$$



$$\left[-1, \frac{1}{5}\right] \cup [3, +\infty)$$

2. Risolvere la seguente equazione: $\log x + 2\log 2 = \log(x^2+4)$

$$\log x + \log 2^2 = \log(x^2+4)$$

$$\Rightarrow \log(4x) = \log(x^2+4) \Rightarrow 4x = x^2+4$$

$$\Rightarrow x^2-4x+4=0$$

$$\Rightarrow (x-2)^2=0 \Rightarrow \boxed{x=2}$$