Proprietà del determinante:

sia $A \in M(n, \mathbb{K})$

- $\det A \neq 0 \longleftrightarrow \text{Rango}(A) = n$
- $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$
- $\det(A) = \det(A^{-1})$

$f: V \longrightarrow W$ associata a una matrice $A \in M(n, \mathbb{K})$ con Rango $A = n$

- f è suriettiva e iniettiva $\longrightarrow$ f è un isomorfismo, in particolare f è invertibile.

$\Rightarrow$ esiste f^{-1} e f^{-1} è lineare

$f: V \longrightarrow W$ ISOMORFISMO

$\mathcal{B}$ $\quad$ $\mathcal{A}$ basi

f sarà associata ad una matrice A rispetto a queste basi

f^{-1} " " X

La composizione $f^{-1} \circ f: V \longrightarrow V$ è l'identità in V

$f^{-1} \circ f = id_V$ $\qquad$ Rispetto alle basi scelte si ha allora che:

$X \cdot A$ = matrice associata a id_V rispetto a B

Se $\mathcal{P} = \{V_1, \ldots, V_n\}$

$id_V(V_1) = V_1 = 1 \cdot V_1 + \ldots$

$\vdots$

$id_V(V_n) = V_n = 0 \cdot \ldots + 1 \cdot V_n$

$\rightarrow$ La matrice associata all'identità rispetto alla base $\mathcal{P}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix} = I_n$$

cioè l'elemento neutro del prodotto tra matrice

$X \cdot A = I \qquad X = A^{-1}$

FORMULA PER IL CALCOLO DI A^{-1}

$$(A^{-1})_{ij} = \frac{\alpha_{ji}}{\det(A)}$$

dove α_{ij} è il complemento algebrico di a_{ij}.

Ad esempio

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{17} & \frac{3}{17} \\ \frac{5}{17} & -\frac{2}{17} \end{pmatrix} \qquad A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det A = -17$

$$Ax = b_1 \qquad Ax = b_2 \qquad Ax = b_3$$

$$\left(A \mid b_1 \mid b_2 \mid b_3 \right)$$

$$A \cdot X^{-1} = I$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & y_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

x_1

$$Ax = \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\vdots$

$$Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(A \mid I \right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{Riduzione}} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -17 & -5 & 2 \end{array}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & +\frac{5}{17} & -\frac{2}{17} \end{array}\right) \cdot (-3)$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & -\frac{15}{17} & \frac{6}{17} \\ 0 & 1 & +\frac{5}{17} & -\frac{2}{17} \end{array}\right) \cdot \frac{1}{2}$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{17} & \frac{3}{17} \\ 0 & 1 & \frac{5}{17} & -\frac{2}{17} \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{17} \\ -\frac{5}{17} \end{pmatrix}$$

$(A|I)$ Riduzione + "Riduzione inversa", si trova $(I|A^{-1})$

$$\underset{\mathcal{B}}{V} \xrightarrow{id_V} \underset{\mathcal{B}}{V}$$

$\Rightarrow id_V \leftarrow I_n$

Questo non è vero se si usano basi diverse in partenza e in arrivo.

Se in arrivo abbiamo una base diverso da $\{v_1 \dots v_n\}$: $\{w_1 \dots w_n\}$ i coeff. di $v_1 \dots v_n$ scritti come combinazione lineare di $\{w_1, \dots w_n\}$ non possono essere quelli che portano alla matrice identica.

Infatti se le basi sono diverse $\exists\, i : v_i \neq w_i$

$\Rightarrow v_i \neq 0w_1 \ldots + 1w_i + 0 \ldots + 0w_n$ altrimenti $v_i = w_i$

quindi la i-esima colonna è diversa da $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i$

e la matrice non può essere I_n

ESEMPIO

$id_{\mathbb{R}^2} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$\mathcal{B}\{v_1, v_2\}$ $\quad \mathcal{B}_1' = \{v_1, v_1 - v_2\}$

① $\mathcal{B}$ partenza e in arrivo

② $\mathcal{B}$ partenza $\mathcal{B}'$ in arrivo

①

$id(v_1) = v_1 = 1 \cdot v_1 + 0\, v_2$

$id(v_2) = v_2 = 0 \cdot v_1 + 1\, v_2$

$\Downarrow$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$

②

$id(v_1) = v_1 = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot (v_1 - v_2)$

$id(v_2) = v_2 = 1 \cdot v_1 - 1(v_1 - v_2)$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \neq I_2$

CAMBIAMENTO DI BASE

Dato $f: V \longrightarrow W$ consideriamo delle basi

$\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ di V $\qquad \mathcal{A}, \mathcal{A}'$ di W

e supponiamo che f sia associata ad una matrice A rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{A}$

$$\underset{\mathcal{B}}{V} \xrightarrow{A} \underset{\mathcal{A}}{W}$$

Vogliamo determinare la matrice associata a f rispetto . . . . .

$$V \xrightarrow{id_V} V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{id_W} W$$

$$\underset{\mathcal{B}'}{V} \longrightarrow \underset{\mathcal{B}}{V} \xrightarrow{A} \underset{\mathcal{A}}{f(w)} \longrightarrow \underset{\mathcal{A}'}{f(v)}$$

A' = matrice associata a f rispetto alle basi $\mathcal{B}'$ e $\mathcal{A}'$

Quindi indicando con U = matrice associata a id_V rispetto alle basi $\mathcal{B}'$ $\mathcal{B}$
V = // id_W // $\mathcal{A}$ $\mathcal{A}'$

$\Longrightarrow$ $A' = V \cdot A \cdot U$ Formula del cambiamento di base

Spesso è più conveniente utilizzare una formula che utilizza sempre le basi "nuove" in partenza e quelle "vecchie" in arrivo:

U = matrice associata a id_V rispetto alle basi $\mathcal{B}'$ $\mathcal{B}$
V = // id_W // $\mathcal{A}$ $\mathcal{A}'$
Z = // $\mathcal{A}'$ $\mathcal{A}$

$$\underset{\mathcal{A}}{W} \xrightarrow{id_W} \underset{\mathcal{A}'}{W} \xrightarrow{id_W} \underset{\mathcal{A}}{W}$$
$$\underbrace{id_W}_{I}$$

$Z \cdot V = I$
$V = Z^{-1}$

Quindi la formula del cambiamento di base è $A' = Z^{-1} \cdot A \cdot U$

1/12/2021

$f: V \longrightarrow W$ lineare $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ basi di V
$\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ basi di W

A matrice associata a f rispetto alle basi $\mathcal{B}, \mathcal{A}$
A' // // // $\mathcal{B}', \mathcal{A}'$
X // a id_V // $\mathcal{B}', \mathcal{B}$
Z // id_W // $\mathcal{A}', \mathcal{A}$

$\Longrightarrow A' = Z^{-1} A X \longrightarrow$ cambiamento di base

Esempio

$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ associata, rispetto alla base canonica $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$f(x,y) = (3x+y, 2x-y)$

Consideriamo le basi:

$\mathcal{B}' = \{(3,-1);(2,0)\}$ $\quad \mathcal{A}' = \{(1,2);(-1,1)\}$ di $\mathbb{R}^2$

Possiamo utilizzare la formula del cambiamento di base con $\mathcal{B} = \mathcal{A} =$ base canonica

Dobbiamo determinare la matrice X associata a $id_{\mathbb{R}^2}$ avendo come base di partenza $\mathcal{B}'$ e base di arrivo la base canonica.

Calcoliamo $id_{\mathbb{R}^2}(3,-1) = (3,-1) = 3(1,0) + (-1)(-3,1)$

$id_{\mathbb{R}^2}(2,0) = (2,0) = 2(1,0) + 0(0,1)$ $\quad \Longrightarrow X = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Poi dobbiamo determinare la matrice Z associata a $id_{\mathbb{R}^2}$ avendo come base di partenza la base $\mathcal{A}'$ e base di arrivo la base canonica.

$id_{\mathbb{R}^2}(1,2) = 1 \cdot (1,0) + 2(0,1)$

$id_{\mathbb{R}^2}(-1,1) = -1(0,1) + 1(0,1)$ $\quad \Longrightarrow Z = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$

$$Z^{-1} = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right) \Longrightarrow Z^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

La matrice A' associata all'applicazione lineare rispetto alle basi $\mathcal{P}'$ $\mathcal{A}'$ è

$$A' = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ALGEBRA DELLE APPLICAZIONI LINEARI

$f, g : V \longrightarrow W$ lineari; $\lambda \in \mathbb{K}$

Possiamo definire:

- $(f+g) : V \longrightarrow W \quad (f+g)(v) = f(v) + g(v)$
- $(\lambda f) : V \longrightarrow W \quad (\lambda f)(v) = \lambda \cdot f(v)$

queste sono ancora applicazioni lineari

Con queste operazioni l'insieme delle applicazioni lineari $V \longrightarrow W$ è uno spazio vettoriale:

$\boxed{\quad\quad}$?

Fissato una base $\mathcal{S}$ di V e una base $\mathcal{U}$ di W e $f \sim A, g \sim B$

Allora

$(f+g) \sim A+B$

$(\lambda f) \sim \lambda A$

DIAGONALIZZAZIONE di applicazione lineari

Def: sia $f: V \longrightarrow V$ lineare

Un vettore $v \in V$ é un autovettore di f se:

1. $v \neq 0_V$
2. $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ t.c. $f(v) = \lambda v$

λ é detto AUTOVALORE relativo all'autovettore v.

Sia v un autovettore per f:

$$
\begin{aligned}
f(v) = \lambda v &\iff f(v) - \lambda v = 0_V \iff f(v) - \lambda\, id(v) = 0 \\
&\iff f(v) - (\lambda\, id_V)(v) = 0 \\
&\iff (f - \lambda\, id_V)(v) = 0_V \\
&\iff v \in Ker(f - \lambda\, id_V)
\end{aligned}
$$

v é un autovettore per f relativo all'autovalore λ

$\Updownarrow$

v é un elemento non nullo di $Ker(f - \lambda\, id_V)$

Quindi esistono autovettori relativi all'autovalore λ

$\iff Ker(f - \lambda\, id)$ é non banale.

Sia B una base di V, e sia A la matrice associata a f rispetto a tale base (IN PARTENZA E IN ARRIVO)
abbiamo che id_V è allora associata alla matrice identità I.
Ne segue che
$f - \lambda id_V$ è associata a $A - \lambda I$

f ammette autovettori relativi all'autovalore $\lambda \iff \operatorname{Ker}(f - \lambda id_V)$ è non banale
$\iff$ Il sistema omogeneo associato a $(A-\lambda I)$ ammette soluzioni non banali
$\iff$ Il rango di $(A-\lambda I)$ non è massimo
$\iff \det(A-\lambda I)=0$

Esempio

Sia $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ associata, rispetto alla base canonica, alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

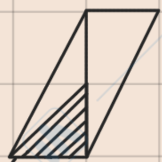
Consideriamo la matrice

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1-\lambda & 4 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

Calcoliamo

$$\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -\lambda & 2 \\ 2 & -1-\lambda & 4 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3+4\lambda^2-5\lambda+2$$



In generale $\det(A-\lambda I)$ è un polinomio in λ che ha al più un numero finito di radici, detto POLINOMIO CARATTERISTICO di f (o della matrice

$\lambda = 1$ è una radice

$$\begin{array}{l|l} -\lambda^3+4\lambda^2-5\lambda+2 & \lambda-1 \\ \hline -\lambda^3+\lambda^2 & -\lambda^2+3\lambda-2 \\ \hline 3\lambda^2-5\lambda+2 & \\ 3\lambda^2-3\lambda & \\ \hline -2\lambda+2 & \\ -2\lambda+2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\det(A-\lambda I) = (\lambda-1)(-\lambda^2+3\lambda-2)$$
$$= -(\lambda-1)^2(\lambda-2)$$

$\Rightarrow$ le radici del polinomio caratteristico sono:

1 con molteplicità 2

2 // 1

La molteplicità di λ come radice del polinomio caratteristico è detta MOLTEPLICITÁ ALGEBRICA di λ.

Trovati i valori di λ che annullano il polinomio caratteristico: $\lambda_1 \dots \lambda_k$

Per ciascuno di questi valori abbiamo, per $i = 1 \dots k$

$\det(A-\lambda I) = 0 \Rightarrow$ Rango $(A-\lambda_i I)$ non è massimo

$\Rightarrow$ Il sistema omogeneo associato ha soluzioni non banali

$\Rightarrow$ esistono autovettori relativi all'autovalore λ_i

Determiniamo gli autovettori relativi agli autovalori $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$ che abbiamo trovato

Dobbiamo sostituire λ_i in $(A-\lambda I) = \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1-\lambda & 4 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$

① $\lambda=1$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ Risolviamo il sistema omogeneo associato

$$\downarrow$$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $x-y+z=0$

$x=y-2z$

ha soluzioni:

$$(y-2z, y, z) = y(1,1,0) + z(-2,0,1)$$

$\Longrightarrow$ gli autovettori relativi a $\lambda=1$ sono gli elementi non nulli di $L((1,1,0); (-2,0,1))$

② $\lambda=2$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = A-2I$$

$$\downarrow$$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} x-y+z=0 & x=z \\ -y+2z=0 & y=2x \end{cases}$

le soluzioni del sistema omogeneo sono $(z, 2z, z) = z(1,2,1)$

Gli autovettori relativi a $\lambda=2$ sono gli elementi non nulli di

$\mathcal{L}(1,2,1)$ (STIAMO LAVORANDO CON LA BASE CANONICA)

In conclusione

$V_1 = (1,1,0)$ $V_2 = (-2,0,1)$ $V_3 = (1,2,1)$ sono autovettori relativi agli autovalori $1, 1, 2$ rispettivamente.

$f(v_1) = V_1$ $f(v_2) = V_2$ $f(v_3) = 2V_3$

$\{V_1, V_2, V_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

Cerchiamo la matrice associata a f rispetto a questa base:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Se esiste una base di V formata da autovettori di f allora f si dice DIAGONALIZZABILE

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari
www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari
www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari