MATRICI e VETTORI

* PRODOTTO SCALARE

il risultato è uno <u>SCALARE</u>

$$c = \sum_{i=1}^{m} (a_i b_i) = a_1 b_1 + \dots + a_m b_m$$

* NORME VETTORIALI

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^2 \right)^{1/2}$$

$$\|x\|_1 = \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i| \right)$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le m} |x_i|$$

* MATRICE TRASPOSTA

$$a^T_{ij} = a_{ji} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$$

* PRODOTTO MATRICE - VETTORE

il risultato è un <u>VETTORE</u> : $R^{m \times m} \cdot R^m = R^m$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_{11} \cdot b_1) + (a_{12} \cdot b_2) \\ (a_{21} \cdot b_1) + (a_{22} \cdot b_2) \\ (a_{31} \cdot b_1) + (a_{32} \cdot b_2) \end{bmatrix}$$

* PRODOTTO MATRICE - MATRICE

è una MATRICE : $R^{m \times m} \cdot R^{m \times l} = R^{m \times l}$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_{11} \cdot b_{11}) + (a_{12} \cdot b_{21}) & (a_{11} \cdot b_{12}) + (a_{12} \cdot b_{22}) \\ (a_{21} \cdot b_{11}) + (a_{22} \cdot b_{21}) & (a_{21} \cdot b_{12}) + (a_{22} \cdot b_{22}) \\ (a_{31} \cdot b_{11}) + (a_{32} \cdot b_{21}) & (a_{31} \cdot b_{12}) + (a_{32} \cdot b_{22}) \end{bmatrix}$$

* NORME MATRICIALI

$$\|A\|_1 = \max_{1 \le j \le n} \left(\sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| \right) \rightarrow \text{massimo della SOMMA COLONNE}$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le m} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right) \rightarrow \text{massimo della SOMMA RIGHE}$$

* DETERMINANTE MATRICE $n \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

A_{ij} = matrice di ordine $n-1$ (elimino riga/colonna A)

$$\text{compl}(a_{ij}) = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$$

$$\det(A) = a_{1i}(-1)^{1+i} \det(A_{1i}) + \dots + a_{ni}(-1)^{n+i} \det(A_{ni})$$

* MATRICI TRIANGOLARI

$$\text{SUPERIORI} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\text{INFERIORE} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

* MATRICI INVERSE

A è INVERTIBILE se $\det(A) \neq 0$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

* RANGO MATRICE

- se non nulla: $rk(A) \ge 1 \wedge rk(A) \le \min\{m, n\}$
  - ↳ $\det(A) \neq 0 \rightarrow rk(A)$ = ESTREMO DX DISUGUAGLIANZA
  - ↳ $\det(A) = 0 \rightarrow rk(A)$ = ESTREMO SX DISUGUAGLIANZA

SISTEMI LINEARI

* **MATRICE $(A|b)$**

è una matrice $m \times (n+1)$, ottenuta accostando le colonne della matrice A, dei coefficienti di x, e il vettore b, dei termini noti

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \implies (A|b) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \end{bmatrix}$$

* **TEOREMA CRAMER**

Sia A una MATRICE QUADRATA e $b \in \mathbb{R}^n$, il sistema $Ax=b$, AMMETTE UNA e UNA SOLA SOLUZIONE SE E SOLO SE:

$$\det(A) \neq 0$$

* **TEOREMA ROUCHÉ - CAPELLI**

Sia A una MATRICE $m \times n$ e $b \in \mathbb{R}^m$, il sistema $Ax=b$, AMMETTE SOLUZIONE SE e SOLO SE:

$$rk(A) = rk(A|b)$$

in questo caso ci sono due situazioni, posto $r = rk(A)$:

- $r = n \rightarrow$ il sistema AMMETTE UNA e UNA SOLA SOLUZIONE
- $r < n \rightarrow$ il sistema AMMETTE INFINITE SOLUZIONI

→ studiare la risolubilità di un sistema lineare:

① applico Cramer
- $\det(A) \neq 0$: MI FERMO e dico che ha una e una sola soluzione
- $\det(A) = 0$: VADO a ②

② applico Rouché - Capelli
- trovo rango A
- trovo rango $(A|b)$
- confronto $rk(A)$ e $rk(A|b)$
  - $rk(A) \neq rk(A|b)$: NON AMMETTE SOLUZIONI
  - $rk(A) = rk(A|b) \wedge rk(A) = n$: UNA e UNA SOLA SOLUZIONE
  - $rk(A) = rk(A|b) \wedge rk(A) < n$: INFINITE SOLUZIONI

METODI DIRETTI - SISTEMI LINEARI

* matrici TRIANGOLARI INFERIORI

$$\begin{cases} l_{11} x_1 = b_1 \\ l_{21} x_1 + l_{22} x_2 = b_2 \\ l_{31} x_1 + l_{32} x_2 + l_{33} x_3 = b_3 \end{cases} \Longrightarrow L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix}$$

si risolve con METODO delle SOSTITUZIONI in AVANTI :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1}{l_{11}} \\ x_2 = (b_2 - l_{21} x_1) \dfrac{1}{l_{22}} \\ x_3 = (b_3 - l_{31} x_1 - l_{32} x_2) \dfrac{1}{l_{33}} \end{cases} \Longrightarrow x_i = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} (l_{ij} x_j) \right) \cdot \frac{1}{l_{ii}}$$

* matrici TRIANGOLARI SUPERIORI

$$\begin{cases} u_{11} x_1 + u_{12} x_2 + u_{13} x_3 = b_1 \\ u_{22} x_2 + u_{23} x_3 = b_2 \\ u_{33} x_3 = b_3 \end{cases} \Longrightarrow U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

si risolve con METODO delle SOSTITUZIONI INDIETRO

$$\begin{cases} x_1 = (b_1 - u_{12} x_2 - u_{13} x_3) \dfrac{1}{u_{11}} \\ x_2 = (b_2 - u_{23} x_3) \dfrac{1}{u_{22}} \\ x_3 = \dfrac{b_3}{u_{33}} \end{cases} \Longrightarrow x_i = \left(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} (u_{ij} x_j) \right) \cdot \frac{1}{u_{ii}}$$

* RISOLUZIONE con MEG

- PASSO 0 $\longrightarrow A^{(1)} = A \wedge b^{(1)} = b$
- PASSO 1 $\longrightarrow$ a) costruisco $A^{(2)}$ mantenendo I riga $A^{(1)}$

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ / & / & / \\ / & / & / \end{bmatrix} \qquad b^{(2)} = \begin{bmatrix} b_1 \\ / \\ / \end{bmatrix}$$

$$l_{21} = \frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$$

b) aggiorno II riga

$$a_{2j}^{(2)} = a_{2j}^{(1)} - \left(l_{21} \cdot a_{1j}^{(1)} \right)$$

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ / & / & / \end{bmatrix} \qquad b^{(2)} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ / \end{bmatrix}$$

$$l_{31} = \frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$$

c) aggiorno III riga

$$a_{3j}^{(2)} = a_{3j}^{(1)} - \left(l_{31} \cdot a_{1j}^{(1)} \right)$$

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad b^{(2)} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

- PASSO 2 $\longrightarrow$ a) costruisco $A^{(3)}$ mantenendo I, II riga $A^{(2)}$

$$A^{(3)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ / & / & / \end{bmatrix} \qquad b^{(3)} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ / \end{bmatrix}$$

$$l_{32} = \frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}$$

b) completo $A^{(3)}$

$$a_{3j}^{(3)} = a_{3j}^{(2)} - \left(l_{32} \cdot a_{2j}^{(2)} \right)$$

$$A^{(3)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad b^{(3)} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

- PASSO 3 : RISOLVO $A^{(3)}$ con METODO SOSTITUZIONI all' INDIETRO

il Matlab il MEG é IMPLEMENTATO dal COMANDO \

* FATTORIZZAZIONE LU

Con il MEG si costruisce anche la TRIANGOLARE INFERIORE

- SUPERIORE $= U = A^{(3)} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$
- INFERIORE $= L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix}$

$$L \cdot U = A$$

$$Ax = b \iff LUx = b$$

* MATRICI SIMMETRICHE DEFINITE POSITIVE

Una MATRICE SIMMETRICA è DEFINITA POSITIVA se:

$$Ax \cdot x \geq 0 \quad \wedge \quad Ax \cdot x = 0 \iff x = 0$$

Per SYLVESTER una matrice simmetrica è DEFINITA POSITIVA SE E SOLO SE:

$$\det(A_k) > 0$$

sottomatrice con le prime k righe e colonne

* FATTORIZZAZIONE di CHOLESKY

Data A SIMMETRICA e DEFINITA POSITIVA, allora $\exists$ una matrice TRIANGOLARE SUPERIORE tale che:

$$A = R^T \cdot R$$

$$Ax = b \iff R^T R x = b$$

METODI ITERATIVI - SISTEMI LINEARI

* AUTOVALORI

L'autovalore è la SOLUZIONE dell'equazione caratteristica:

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$$

↳ matrice identità: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

→ PROPRIETÀ

① $\det(A) = \prod_{i=1}^{m} \lambda_i(A)$

② insieme degli autovalori è $\sigma(A)$ = SPETTRO di A

③ TRACCIA di $A = tr(A) = \sum_{i=1}^{m}(a_{ij}) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_1(A)$

④ RAGGIO SPETTRALE $= \rho(A) = \max_{i=1,\dots,m} |\lambda_i(A)|$

è il massimo del modulo degli autovalori di A

⑤ $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T \cdot A)}$

⑥ un METODO ITERATIVO CONVERGE SE e SOLO SE: $\rho(B) < 1$

* METODO JACOBI

Dal sistema generale e dal vettore iniziale $x^{(0)}$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \wedge \quad x^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{bmatrix}$$

Si calcola la generica iterazione PONENDO $K \geq 0$:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)}\right) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}x_1^{(k)} - a_{32}x_2^{(k)}\right) \end{cases} \Longrightarrow x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1 \neq i}^{m}(a_{ij}x_j^{(k)})\right)$$

* METODO GAUSS - SEIDEL

Dato il sistema e il vettore $x^{(0)}$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \wedge \quad x^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{bmatrix}$$

Si calcola la generica iterazione ponendo $k \geq 0$:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)}\right) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)}\right) \end{cases} \Rightarrow x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right)$$

* MATRICI di ITERAZIONE

dalla matrice dei coefficienti: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} ; \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -a_{21} & 0 & 0 \\ -a_{31} & -a_{32} & 0 \end{bmatrix} ; \quad F = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} \\ 0 & 0 & -a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

↳ JACOBI CONVERGENZA

JACOBI CONVERGE se:

$$\rho(B_J) = \max|\lambda(B_J)| < 1$$

ricavo $\lambda(B_J)$ con la formula:

$$\det(\lambda D - E - F) = 0$$

↳ GAUSS - SEIDEL CONVERGENZA

il metodo converge se:

$$\rho(B_{GS}) < 1$$

ricavo $\lambda(B_{GS})$ con la formula: $\det(\lambda(D-E) - F) = 0$

INTERPOLAZIONE POLINOMIALE

Si deve trovare il GENERICO POLINOMIO di GRADO N:

$$P_N(x) = \sum_{j=0}^{N} c_j x^j = c_0 + c_1 x + \dots + c_m x^m$$

* METODO VANDERMONDE

si impone il passaggio del POLINOMIO per i punti; si risolve il sistema ottenuto per trovare $c_0, c_1, \dots, c_N$:

$$\begin{cases} c_0 + c_1 x_0 + c_2 x_0^2 + \dots + c_N x_0^N = y_0 \\ c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_1^2 + \dots + c_N x_1^N = y_1 \\ \dots \\ c_0 + c_1 x_N + c_2 x_N^2 + \dots + c_N x_N^N = y_N \end{cases} \Rightarrow V = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^N \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^N \\ \dots \\ 1 & x_N & x_N^2 & \dots & x_N^N \end{bmatrix}$$

SE i VARI x_i sono DIVERSI $\rightarrow \det(V) \neq 0 \rightarrow$ SOLUZIONE UNICA del SISTEMA

* METODO di LAGRANGE

Per trovare il polinomio che interpola x_i PUNTI:

① CALCOLO POLINOMIO LAGRANGE per OGNI PUNTO

$$L_i(x) = \prod_{j=0 \neq i}^{N} \left(\frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right) = \left(\frac{x - x_0}{x_i - x_0} \right) \cdot \left(\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \right) \cdot \left(\frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \right) \cdot \left(\frac{x - x_N}{x_i - x_N} \right)$$

② CALCOLO POLINOMIO INTERPOLATORE

$$P_N(x) = \sum_{i=0}^{N} y_i \cdot L_i(x)$$

↳ calcolo errore

$$\epsilon = |f(x) - P_N(x)|$$

↳ stima errore

$$|f(x) - P_N(x)| = S_N \leq \frac{\max_{t \in I} |w(t)|}{(N+1)!} \cdot \max_{t \in I} |f^{(N+1)}(t)|$$

con $w(t) = (x - x_0)(x - x_1)\dots \quad \wedge \quad f^{(N+1)} =$ DERIVATA di $f(x)$

MINIMI QUADRATI e SPLINE LINEARI

Si vuole trovare una retta che approssimi dei punti:

$$R(x) = a_0 + a_1 x$$

Per trovare i valori a_0, a_1 va RISOLTO il SISTEMA delle EQUAZIONI NORMALI:

$$\begin{cases} (N+1)a_0 + \left(\sum_{i=0}^{N} x_i\right) a_1 = \sum_{i=0}^{N} (y_i) \\ \left(\sum_{i=0}^{N} x_i\right) a_0 + \left(\sum_{i=0}^{N} (x_i)^2\right) a_1 = \sum_{i=0}^{N} (x_i y_i) \end{cases}$$

* SPLINE LINEARE

S^1 è un POLINOMIO di I GRADO in OGNI SOTTOINTERVALLO, rappresento la CURVA come una FUNZIONE a TRATTI:

$$S^1(x) = \begin{cases} R^1(x) \\ R^2(x) \end{cases}$$ con $R^1(x)$ e $R^2(x)$ RETTE passanti per 2 PUNTI

$$R^1(x) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) + y_0$$

$$R^2(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$$

↳ errore interpolazione:

$$|f(x) - S^1(x)|$$

↳ stima errore:

$$\max_{x \in [a;b]} |f(x) - S^1(x)| \leq \frac{1}{8} h^2 \max_{x \in [a;b]} |f''(x)|$$

con $h = \max_{0 \leq i \leq N-1} (x_{i+1} - x_i)$

$h = \frac{b-a}{M}$ quando fornito M = nn. sottointervalli

INTEGRAZIONE NUMERICA

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$$

* METODO del PUNTO MEDIO

$$\tilde{I}_m(f) = (b-a)\, f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\text{errore} = \epsilon = I(f) - \tilde{I}_m(f) = \frac{(b-a)^3}{24} f''(x)$$

* METODO del TRAPEZIO

$$\tilde{I}_T(f) = \frac{b-a}{2}\left[f(a) + f(b)\right]$$

$$\text{errore} = \epsilon = I(f) - \tilde{I}_T(f) = -\frac{(b-a)^3}{12} \cdot f''(x)$$

* METODO CAVALIERI - SIMPSON

$$\tilde{I}_{cs}(f) = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

$$\text{errore} = \epsilon = I(f) - \tilde{I}_{cs}(f) = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{IV}(x)$$

Nei METODI COMPOSITI si SUDDIVIDE $[a;b]$ in SOTTOINTERVALLI

M = nr. sottointervalli

H = ampiezza = $\dfrac{b-a}{M}$

$a_i = a + iH \quad \begin{cases} a_0 = a \\ a_M = b \end{cases}$

* PUNTO MEDIO COMPOSITA

$$\tilde{I}^c_{PM}(f) = \sum_{i=1}^{M} H f\left(\frac{a_{i-1} + a_i}{2}\right)$$

↳ errore CLASSICO = $\dfrac{b-a}{24} H^2 f''(\eta)$

↳ errore ASINTOTICO = $\dfrac{H^2}{24} [f'(b) - f'(a)]$

* TRAPEZIO COMPOSITA

$$\tilde{I}^c_T(f) = \sum_{i=1}^{M} \frac{H}{2} [f(a_{i-1}) + f(a_i)]$$

↳ errore CLASSICO = $-\dfrac{b-a}{12} H^2 f''(\eta)$

↳ errore ASINTOTICO = $-\dfrac{H^2}{12} [f'(b) - f'(a)]$

* CAVALIERI - SIMPSON COMPOSITA

$$\tilde{I}^c_{CS}(f) = \sum_{i=1}^{M} \frac{H}{6} \left[f(a_{i-1}) + 4f\left(\frac{a_{i-1} + a_i}{2}\right) + f(a_i)\right]$$

↳ errore CLASSICO = $-\dfrac{b-a}{2880} H^4 f^{IV}(\eta)$

↳ errore ASINTOTICO = $-\dfrac{H^4}{2880} [f'''(b) - f'''(a)]$

ZERI FUNZIONE

* TEOREMA degli ZERI

Data $f(x)$ $[a;b] \to \mathbb{R}$:

- continua su $[a;b]$
- $f(a)f(b) < 0$

$\Longrightarrow \exists\, \alpha \in [a;b] \mid f(\alpha) = 0$

* METODO BISEZIONE

① PASSO 1 : pongo $a_0 = a \wedge b_0 = b$

$$x_1 = \frac{a_0 + b_0}{2} \quad \wedge \quad |x_1 - \alpha| < \frac{b-a}{2}$$

② PASSO 2 → SE $f(a_0)f(x_1) < 0$ allora $a_1 = a_0 \wedge b_1 = x_1$

$$x_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} \quad \wedge \quad |x_2 - \alpha| < \frac{b-a}{2^2}$$

→ SE $f(a_0)f(x_1) > 0$ allora $a_1 = x_1 \wedge b_1 = b_0$

③ PASSO n → SE $f(a_{n-2})f(x_{n-1}) < 0$ allora $a_{n-1} = a_{n-2} \wedge b_{n-1} = x_{n-1}$

→ SE $f(a_{n-2})f(x_{n-1}) > 0$ allora $a_{n-1} = x_{n-1} \wedge b_{n-1} = b_{n-2}$

$$x_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} \quad \wedge \quad |x_n - \alpha| < \frac{b-a}{2^n}$$

* METODO NEWTON

Si deve trovare la retta $r_0(x)$ tangente ad $f(x)$ in x_0 :

$$r_0(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

il valore per cui $r_0(x) = 0$ è :

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

IL METODO CONVERGE per :

$$f(x_0)\, f''(x_0) > 0$$

con x_0 = estremo di FOURIER

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

h = passo (fornito)

$t_j = t_0 + jh$

* METODO EULERO

↳ ESPLICITO: posto $u_0 = y_0$, $\forall n \geq 0$

$$u_{n+1} = u_n + h f(t_n, u_n)$$

↳ IMPLICITO: posto $u_0 = y_0$, $\forall n \geq 0$

$$u_{n+1} = u_n + h f(t_{n+1}, u_{n+1})$$

* METODO CRANK - NICOLSON: posto $u_0 = y_0$, $\forall n \geq 0$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}\left[f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_{n+1}) \right]$$

* METODO HEUN: posto $u_0 = y_0$, $\forall n \geq 0$

$$u^*_{n+1} = u_n + h f(t_n, u_n)$$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}\left[f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u^*_{n+1}) \right]$$

SISTEMI

* EULERO ESPLICITO: posto $u_1^0 = y_1^0 \wedge u_2^0 = y_2^0$

$$\begin{cases} u_1^{n+1} = u_1^n + h f_1(t_n, u_1^n, u_2^n) \\ u_2^{n+1} = u_2^n + h f_2(t_n, u_1^n, u_2^n) \end{cases}$$

* EULERO IMPLICITO: posto $u_1^0 = y_1^0 \wedge u_2^0 = y_2^0$

$$\begin{cases} u_1^{n+1} = u_1^n + h f_1(t_n, u_1^{n+1}, u_2^{n+1}) \\ u_2^{n+1} = u_2^n + h f_2(t_n, u_1^{n+1}, u_2^{n+1}) \end{cases}$$

RICORDA: $t = x$

$u = y$