COMPLEMENTI DI MATEMATICA E FONDAMENTI DI FISICA
Corso di Laurea in Ingegneria della Produzione Industriale - Politecnico di Torino
Titolare del corso: Marina Santacroce - Dipartimento di Scienze Matematiche

Foglio 1: Matrici

Esercizio 1. Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+k \\ 3+3k & 2 & k \\ -1 & 6 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ k+1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

stabilire per quali valori di k la matrice $A - 2B$ è simmetrica ($k = 2$) e per quali è antisimmetrica (nessuno). Calcolare il rango di A e B al variare di k.

Risposta: rg(A)=3 per ogni k; rg(B)=3 per $k \neq -3/5$; rg(B)=2 per $k = -3/5$

Esercizio 2. Determinare al variare di k il rango della seguente matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & k & -1 \\ k & 0 & 1 & k \\ 1 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Risposta: se $\kappa \neq 0$ oppure $\kappa \neq 3$ il rango di A è 3; se $\kappa = 0$ oppure $\kappa = 3$ il rango di A è 2

Esercizio 3. Determinare al variare di k il rango della seguente matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & k & -1 \\ k & 0 & 1 & k \\ 1 & 0 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Suggerimento: utilizzate l'esercizio precedente.
Risposta: se $\kappa \neq 3$ il rango di A è 3; se $\kappa = 3$ il rango di A è 2

Esercizio 4. (Appello 10/7/2013) Calcolare la matrice prodotto $A^{-1}B$, dove A^{-1} è la matrice inversa di A, con

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Risposta: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & -1/6 \\ -2/3 & -1/3 & 5/6 \\ 1/3 & -1/3 & -1/6 \end{pmatrix}, \qquad A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Esercizio 5. (Appello 10/7/2013) Calcolare la matrice prodotto $A^{-1}B$, dove A^{-1} è la matrice inversa di A, con

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Risposta: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/6 & 5/6 & -1/6 \end{pmatrix}, \qquad A^{-1}B = \begin{pmatrix} 2/3 & 1 \\ 1/3 & 0 \\ 1/6 & -1/2 \end{pmatrix}$

Esercizio 6. Calcolare l'inversa della seguente matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & -4 \\ 4 & 7 & -2 \end{pmatrix}$$

Risposta: $\frac{1}{10} \begin{pmatrix} 18 & 34 & -32 \\ -10 & -20 & 20 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Esercizio 7. Per quali valori del parametro λ le due matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 1 & 1 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \\ \lambda & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

hanno lo stesso rango?
Risposta: hanno lo stesso rango per $\lambda = 0$ e per $\lambda = -1$.

Esercizio 8. (Appello 24/1/2014) Determinare per quali valori di a, b, c, d la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 2 & c & d \\ 0 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix}$$

è l'inversa della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Dire inoltre se è vera l'uguaglianza $det\,((A-B)(A+B)) = det(A^2 - B^2)$ e motivare la risposta.
Risposta: $a = 4/5$; $b = -1/5$; $c = 12/5$; $d = -3/5$. L'uguaglianza è vera.

Esercizio 9. (Appello 24/1/2014) Determinare per quali valori del parametro λ le due matrici:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 0 & 2 & \lambda \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & \lambda & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

hanno la stesso rango, e specificarlo.
Risposta: Se $\lambda \neq 1$, $\lambda \neq -2/3$, $rg(A) = rg(B) = 3$; se $\lambda = 1$, $rg(A) = rg(B) = 2$; se $\lambda = -2/3$, $rg(A) = 2$ e $rg(B) = 3$.

Esercizio 10. (Appello 19/9/2014) Calcolare il determinante della matrice $A^{-1}B$, doveA^{-1} è la matrice inversa di A e

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 3 \\ 3 & 5 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & -13 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Risposta: 12/65

Esercizio 11. Determinare il valore di k affinché $det(A) + det(A^T) = 1$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1+k \\ 0 & 1/2 & k \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Risposta: $k = 0$

Esercizio 12. Utilizzando il metodo della riduzione di matrici, determinare il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 31 & 23 & 55 & 42 \end{pmatrix}$$

Risposta: $rg(A) = 3$

Esercizio 13. Utilizzando il metodo della riduzione di matrici, determinare il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 6 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Risposta: $rg(A) = 2$

Materiale preparato da Barbara Trivellato