Esercizi sulle matrici, 1

1) Calcolare, quando possibile, i seguenti prodotti di matrici.

$$(1,2,0,-1)\cdot\begin{pmatrix}4\\3\\-3\\6\end{pmatrix}\qquad \begin{pmatrix}1&2\\3&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&-3\\2&0\end{pmatrix}\qquad \begin{pmatrix}1&0\\2&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&3&5\\0&1&2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2&1\\0&1\\1&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&0\\-1&-2&0\\3&1&-3\end{pmatrix}\qquad \begin{pmatrix}1&0&2\\3&1&1\\3&1&-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&0\\2&1&2\\-3&1&-1\end{pmatrix}\qquad \begin{pmatrix}2&1\\0&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\0&3\\-2&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2&3\\3&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4&3\\3&-2\end{pmatrix}\qquad \begin{pmatrix}2&2\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4&3\\4&-3\end{pmatrix}\qquad \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

2) Date le matrici

$$A=\begin{pmatrix}-1&2\\3&4\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}0&1\\-2&0\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}1&-3\\2&1\end{pmatrix}$$

a) verificare che $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$;
b) verificare che $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$;
c) calcolare A^2-B^2 e $(A+B)\cdot(A-B)$; sono uguali? Perchè?

3) Siano A una matrice di tipo $m\times n$ e C una matrice di tipo $p\times q$. Dire di che tipo deve essere una matrice B affinché sia possibile calcolare $A\cdot B\cdot C$. Dire di che tipo è $A\cdot B\cdot C$

4) Date le matrici $A=(2,-1)$, $\quad B=\begin{pmatrix}\beta&2\\1&4\end{pmatrix}$ e $C=\begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix}$, dire per quali valori di β si ha $A\cdot B\cdot C=0$.

5) Date le matrici $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&-2\end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$, trovare una matrice $X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ tale che $A\cdot X=B$.

6) Determinare il valore di k per cui la matrice $A=\begin{pmatrix}1&0\\2&k\end{pmatrix}$ soddisfa l'equazione $A^2=A$.

7) Data la matrice $A=\begin{pmatrix}1&2&3&1\\-1&5&-1&3\\4&3&2&-2\\2&0&1&8\end{pmatrix}$, scrivere i minori $M_{11},M_{23},M_{33},M_{42}$.

8) Calcolare i determinanti

$$\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix},\qquad \begin{vmatrix}1&-1\\-1&1\end{vmatrix},\qquad \begin{vmatrix}a&a\\1&-1\end{vmatrix},\qquad \begin{vmatrix}2&2\\1&1\end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&4\\1&2&9\end{vmatrix},\qquad \begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix},\qquad \begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&2\\0&-1&-3\end{vmatrix}.$$

Risultati.

1)

$$4,\begin{pmatrix}3&-3\\7&-9\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&3&5\\2&10&18\end{pmatrix},\text{impos.},\begin{pmatrix}-5&3&-2\\2&5&1\\11&2&4\end{pmatrix},\text{impos.},\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}z\\y\\x\end{pmatrix};$$

3) B é di tipo $n\times p$ e $(A\cdot B\cdot C)$ risulta $m\times q$;
4) $\beta=\frac{1}{2}$;
5) $X=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$;
6) $k=0$
7)

$$M_{11}=\begin{vmatrix}5&-1&3\\3&2&-2\\0&1&8\end{vmatrix},M_{23}=\begin{vmatrix}1&2&1\\4&3&-2\\2&0&8\end{vmatrix},M_{33}=\begin{vmatrix}1&2&1\\-1&5&3\\2&0&8\end{vmatrix},M_{42}=\begin{vmatrix}1&3&1\\-1&-1&3\\4&2&-2\end{vmatrix};$$

8) $-2,0,-2a,0,2,0,1$;

Esercizi sulle matrici, 2

1) Trovare (quando ciò è possibile) le inverse delle matrici (controllare il risultato verificando che $A \cdot A^{-1} = I$).

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2) Trovare le inverse delle matrici (controllare il risultato verificando che $A \cdot A^{-1} = I$).

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

3) Stabilire per quali valori dei parametri $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ le matrici

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \beta & 1 & 1 \\ 1 & \beta & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} \gamma & 1 & 0 \\ 1 & \gamma & 1 \\ 0 & 1 & \gamma \end{pmatrix}$$

risultano invertibili.

4) Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -9 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Dire per quali valori di $\lambda \in \mathbf{R}$ la matrice $A - \lambda I$ *non* è invertibile.

5) Date

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

stabilire quali delle seguenti matrici, $A + B$, $A - B$, $A + 4B$, $2A - B$, sono invertibili.

6) Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & k & 3 \end{pmatrix}$$

determinare il valore di k per cui $det(A - B) = -6$.

Risultati.

1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, non invertibile, $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, non invertibile;

2) $\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{-2}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$;

3) $\alpha \neq 1$, $\beta \neq 1, 2$, $\gamma \neq 0, \pm\sqrt{2}$;

4) $\lambda = -1, 1, 5$;

5) non invertibile, invertibile, invertibile, invertibile;

6) $k = -3$.