FORMULARIO CONTROLLI

Trasformata Laplace	$Y(s) = L[y(t)] = \int_0^{\infty} y(t)e^{-st}dt \qquad t \geq 0$
Antitrasformata di Laplace	$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} Y(s)e^{+st}ds$
Formula di ricorrenza	$A_{i,r-k} = \frac{1}{k!}\frac{d^k[(s-p_i)^r Y(s)]}{ds^k}\Big\rvert_{s=pi}$
Modello I/U	$u(t) = \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + a_1\frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t)$ condizioni iniziali $y(t_0) = y_0$ e $y'(t_0) = y_{01}$
Modello ISU	$\begin{cases} x' = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$ D=0 per puramente dinamici

Uscita nel dominio del tempo

$$y(t) = ce^{A(t-t_0)}x_0 + c\int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}bu(\tau)d\tau + du(t)$$

Uscita nel dominio complesso (trasformate) per sistema ISU puramente dinamico

$$\begin{cases} X(s) = (sI-A)^{-1}x(0) + (sI-A)^{-1}bU(s) \\ Y(s) = c^T(sI-A)^{-1}x(0) + c^T(sI-A)^{-1}bU(s) \end{cases} \Rightarrow \quad Y(s) = c^T\frac{agg(sI-A)}{det(sI-A)}x(0) + c^T\frac{agg(sI-A)}{det(sI-A)}bU(s)$$

Risposta forzata nel caso di delta di Dirac (U(S)=1)	$Y(s) = G(s) = \sum_i \frac{ki}{s-pi}$ $y(t) = g(t) = \sum_i kie^{pit}$

Costanti

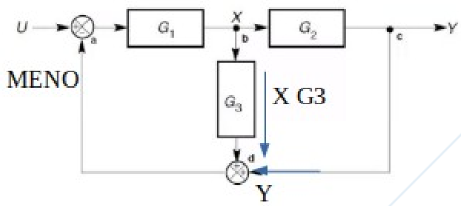
$\frac{\beta_m}{\alpha_n} = K' = cost\ di\ trasferimento$ (no significato fisico)

$\tau_z = \frac{-1}{zi} \qquad \tau_p = \frac{-1}{pi}$ → costanti di tempo

$K = K'\frac{\tau_{p1}\tau_{p2}}{\tau_{z1}\tau_{z2}}$ → costante di guadagno → ha significato fisico (guadagno del sistema)

$lim_{s\to 0}s^g G(s) = K$ → cost guadagno

SCHEMI A BLOCCHI



- METODO 1 :
  $$G_0 = \frac{G1G2}{1 + G1[G2 + G3]}$$
- METODO 2:
  - spostare ramo da ingresso a uscita → G e 1/G
  - spostare ramo da uscita a ingresso → G e G
  - spostare nodo sommatorio da ingresso a uscita → DG + UG =Y
  - spostare nodo sommatorio da uscita a ingresso → (U + D/G) G = Y
  - ANELLO (retroazione positiva o negativa)
    - retroazione negativa : $G_0 = \frac{Y}{U} = \frac{G1}{1 + G1G2}$
    - retroazione positiva: $G_0 = \frac{Y}{U} = \frac{G1}{1 - G1G2}$

SISTEMA 1° ORDINE → no oscillazioni, solo velocità di risposta	Sistema del tipo: $b_0u(t) = a_1y'(t) + a_0y(t) \qquad y(t_0) = y_0$ $Y(s) = \frac{a_1y_0}{sa_1+a_0} + \frac{b_0U(s)}{sa_1+a_0}$ Se condizione iniziale nulla : $Y(s) = \frac{b_0U(s)}{sa_1+a_0} \rightarrow G(s) = \frac{b_0}{sa_1+a_0}$ Se u(t) = 1 (gradino unitario) : $Y(s) = \frac{b_0}{s(sa_1+a_0)} \rightarrow y(t) = \frac{b_0}{a_0} - \frac{b_0}{a_0}e^{(-a_0/a_1)t}$ Cost di guadagno (se tipo 0) : $K = lim_{s\rightarrow 0}s^gG(s) = \frac{b_0}{a_0}$ Funzione di trasferimento in termini di K e τ : $G(s) = \frac{K}{1+s\tau} \qquad \tau = \frac{a_1}{a_0}$ tempo di smorzamento → $t_z = 3\tau$
SISTEMA DEL 2° ORDINE	Sistema del tipo: $b_0u(t) = a_2y''(t) + a_1y'(t) + a_0y(t)$ $y(t_0) = y_0 \quad y'(t_0) = y'_0$ $Y(s) = \frac{a_2sy_0 + a_2y'_0 + a_1y_0}{a_2s^2+a_1s+a_0} + \frac{b_0U(s)}{a_2s^2+a_1s+a_0}$ Se condizione iniziale nulla: $Y(s) = \frac{b_0U(s)}{a_2s^2+a_1s+a_0} \rightarrow G(s) = \frac{b_0}{a_2s^2+a_1s+a_0}$ Cost di guadagno (se tipo 0): $K = lim_{s\rightarrow 0}s^gG(s) = \frac{b_0}{a_0}$ Se poli complessi coniugati: $G(s) = \frac{K\omega^2}{s^2+2\delta\omega s+\omega^2}$ $\omega = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}} \qquad 2\delta\omega = \frac{a_1}{a_2}$ δ = coeff di smorzamento Casi possibili: $\delta > 1$ poli reali $\delta = 1$ poli reali coincidenti $0 < \delta < 1$ poli complessi coniugati $\delta = 0$ poli puramente immaginari

Massima sovraelongazione	$S = 100e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$ S=100% se $\delta = 0$ S=0 se $\delta = 1$ S=70% → $\delta = 0,1$ S= 50% → $\delta = 0,2$ S= 25% → $\delta = 0,4$
Tempo di massima sovraelongazione	$t_m = \frac{\pi}{\omega\sqrt{1-\delta^2}}$
Tempo di salita (passo da 10% a 90% del valore finale)	$\omega t_s = \frac{1,8}{1,5-\delta}$
Tempo di assestamento (uscita arriva a +5% o -5% del valore finale)	$\omega t_a = \frac{3}{\delta}$

ERRORI A REGIME
Formula generale :

$$e_{reg} = lim_{s\to 0} sR(s)\underline{\frac{1+H(s)G(s)-G(s)}{1+H(s)G(s)}} \Longrightarrow e_{reg} = lim_{s\to 0} sR(s)\frac{1}{1+G(s)} \quad se\ H = 1$$

in generale : e = r – y → E(s) = R(s) – Y(s) = rosso

Segnale canonico	G tipo 0	G tipo 1	G tipo 2
Gradino $y = K$ $R(s) = \frac{K}{s}$	$e = \frac{A}{1+K}$	NULLO	NULLO
Rampa $y = mt$ $R(s) = \frac{m}{s^2}$	INFINITO	$e = \frac{m}{K}$	NULLO
Parabola $y = B\frac{t^2}{2}$ $R(s) = B\frac{1}{s^3}$	INFINITO	INFINITO	$e = \frac{B}{K}$

LUOGO DELLE RADICI = rappresentazione nel piano di Gauss dei poli al variare della cost di guadagno (simmetrico rispetto all'asse reale)
CRITERIO DI EVANS → fase : $arg[H(s)G(s)] = (2v+1)\pi$, modulo : $|H(s)G(s)| = 1$

Criterio che usiamo noi → $K' = \frac{-D(s)}{N(s)}$ (cost trasferimento) → $0 < |K'| < \infty$

- K'=0 → poli
- K' → ∞→ zeri → sono rami che partono dai poli e finiscono negli zeri
- n = numero di poli , m = numero di zeri → ci sono n – m asintoti

punto di intersezione tra asintoti e asse R	$\sigma = \frac{\sum_i pi - \sum_i zi}{n-m}$
Angolo tra asintoti e asse R v max = n – m – 1	K' >0 → $\theta = \frac{(2v+1)\pi}{n-m}$ K' <0 → $\theta = \frac{2v\pi}{n-m}$
Punti di biforcazione → ci sono poli multipli	$\sum_i \frac{1}{\sigma - pi} = \sum_i \frac{1}{\sigma - zi}$ (se molteplicità 2)
Punto dell'asse reale appartiene al luogo	• K' > 0 → se a dx ha numero DISPARI di poli e zeri (contati con la molteplicità) • K' < 0 → a dx ha un numero PARI di zeri e poli contati con la molteplicità

CRITERIO DI BODE :

$m_a = \frac{1}{|G(\omega_\pi)|}$ $ma[dB] = 20log(ma) = -|G(\omega_\pi)|$ → asint stabile se ma> 1 , ma [dB] >0

$\theta = \pi - |\theta_C|$ → $\theta > 0$ per asintotica stabilità

stabilità robusta se ma tra 4 e 6 , fase tra 45 e 60

in ω_C→ $|G(j\omega_c)| = 1$

RETE CORRETTRICE – RITARDATRICE (condensatore in serie) → lo zero (che ha alpha arriva dopo il polo) → $\omega_A = \frac{1}{\tau}$ $\omega_B = \frac{1}{\alpha\tau}$	$G(s) = \frac{1+\tau\alpha s}{1+\tau s}$ $\alpha = \frac{R2}{R1+R2}$ $\tau = (R1+R2)C$
RETE CORRETTRICE – ANTICIPATRICE (condensatore in parallelo) → $\omega_A = \frac{1}{\tau}$ $\omega_B = \frac{1}{\alpha\tau}$	$G(s) = \frac{\alpha(1+\tau s)}{1+\alpha\tau s}$ $\alpha = \frac{R2}{R1+R2}$ $\tau = R1C$