SCHEMI CONTROLLI (dall'inizio del programma)
Trasformata di Laplace :

$$Y(s) = L[y(t)] = \int_0^\infty e^{-st} y(t)dt \qquad \text{*condizione } t \geq 0$$

- dal dominio del tempo passo nel dominio complesso (Laplace) e poi con l'antitrasformazione torno nel dominio del tempo
- trasformate utili nei sistemi dinamici, che sono descritti da derivate
- l'utilità delle trasformate risiede nel fatto che " sussiste corrispondenza biunivoca tra la trasformata di una funzione e la funzione stessa"
- antitrasformazione:
$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} e^{st} Y(s)ds$$

σ = ascissa di convergenza → è il limite per cui l'integrale esiste

TEOREMI:

LINEARITÀ	$L[y1 + y2 + yn] = L[y1] + L[y2] + L[yn]$ $L[ky(t)] = kL[y(t)]$
FUNZIONE TRASLATA NEL TEMPO *ritardo τ	$L[y(t-\tau)] = e^{-s\tau}Y(s)$
TRASFORMATA DI UNA DERIVATA	$L[y'(t)] = sY(s) - y(0)$ *istante iniziale 0 Derivata n-esima: $L[\frac{d^n y(t)}{dt^n}] = s^nY(s) - s^{n-1}y(0) - s^{n-2}\left.\frac{dy(t)}{dt}\right\|_{t=0}$
TRASFORMATA DI UN INTEGRALE	$L[\int_0^t y(\tau)d\tau] = \frac{Y(s)}{s}$
TEOREMA VALORE INIZIALE	Y(s) razionale con grado den > grado num $y(0) = lim_{s\to\infty} sY(s)$ *se c'è discontinuità nell'origine si intende 0+
TEOREMA VALORE FINALE	Y(s) razionale con grado den > grado num $lim_{t\to\infty} y(t) = lim_{s\to 0} sY(s)$ *ipotesi radici di Y(s) non positive

Tabella trasformate notevoli → vedi appunti

Funzione di trasferimento→ $G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ * zeri = radici NUM, poli= radici DEN

Procedimento di antitrasformazione- sviluppo di heavside:
- si scompone il denominatore in polinomi (che si moltiplicano tra loro, utile RUFFINI)
- si addizionano le frazioni quanti sono i polinomi, ogni fattore con molteplicità r viene contato r volte nella somma (ad esempio se un fattore è $(1+s)^2$ avrò la somma con a denominatore una volta $(1+s)$ e un 'altra volta $(1+s)^2$)
- i numeratori sono costanti dette RESIDUI, e sono da determinare
- avrò la forma:
$$G(s) = \frac{A1}{(s-p1)} + \frac{A2}{(s-p2)}... \qquad \text{*frazioni dette FRATTI SEMPLICI}$$
-

Per trovare gli Ai (residui) 2 metodi:

- per trovare i numeratori A1, A2,... pongo i termini dello stesso grado (1° grado, termine noto...) uguali a quelli (dello stesso grado) del numeratore dato in partenza (che avevo prima di scomporre i polinomi e scriverlo come somma) → risolvo il sistema e ricavo gli Ai (metodo non adatto se ho tante cost da trovare) → metodo detto PRINCIPIO DI IDENTITÀ DEI POLINOMI
- FORMULA DI RICORRENZA :

$$A_{i,r-k} = \frac{1}{k!}\frac{d^k[(s-p_i)^r Y(s)]}{ds^k}\ _{s=pi}$$

  - per k=0 si considera la cost "1"
  - r è la molteplicità dei fattori a denominatore
  - pi è una radice reale o complessa del fattore a denominatore
  - OSS:
    - ogni polo (radice del fattore a den.) ha una molteplicità r e uno o più valori di k
    - se r=2 → k=0 e k=1
    - se r=1 → k=0

→ dopo aver trovato i residui Ai posso scrivere G(s):

$$G(s) = \frac{A1}{(s-p1)} + \frac{A2}{(s-p2)}$$

e ANTITRASFORMARE , ricordando che :

5)	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
6)	$1-e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$
7)	$t\, e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
8)	$\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^n}$

OBIETTIVO: $lim_{t\to\infty} y(t) = y(t)*$ → obiettivo di inseguimento (voglio raggiungere y* nonostante i disturbi)
3 casi per sistema:

- stabile
- asintoticamente stabile
- instabile → non ha senso volerlo controllare→ dovrò verificare che il mio sistema NON sia così

* transitorio = momento in cui l'uscita varia di più, ci sono oscillazioni

MODELLISTICA → voglio fare un modello 8astratto) del sistema, ma ne esistono infiniti che dipendono dall'ingresso e uscita che scelgo, per questo per prima cosa dovrò ORIENTARE il sistema ovvero definire ingresso e uscita)

1. FASE 1 : IDENTIFICAZIONE STRUTTURALE → sollecitazioni ben precise con ingressi tipici, canonici o di saggio , in modo da facilitare l'identificazione vera e propria

- ingressi canonici:
  - sinusoidale : $u(t) = Asen(\omega(t-t_0))$ con $t \geq 0$, altrimenti u(t) =0
  - gradino : $u(t) = k$ con $t \geq 0$, altrimenti u(t) =0
    - trasformata del gradino unitario è : $\frac{1}{s}$
  - rampa : $u(t) = mt$ con $t \geq 0$, altrimenti u(t) =0 → retta per l'origine
  - impulso → derivata del gradino :
    - IMPULSO DI DIRAC: rettangolo con base che tende a 0 e altezza che tende a infinito, di area unitaria
    - la trasformata di un impulso di Dirac è 1
    - area sottesa dall'impulso di Dirac ha la relazione : $A = t_0 u_0$
    - impulso di Dirac = derivata del gradino unitario (spiegazione negli appunti)

Proprietà strutturali:

1. segnali a tempo-continuo → t considerata in tutti i suoi valori reali
2. sistema SISO → un ingresso e un uscita
3. sistemi fisicamente realizzabili → CAUSALI → l'uscita non dipende dal futuro
4. sistema statico → $y(t_0)$ dipende solo da $x(t_0)$, uscita dipende solo dal presente , esempio resistore, descritti da equazioni algebriche
5. sistema dinamico → uscita dipende dal presente e dal passato , esempio condensatore , descritti da equazioni integro-differenziali
6. sistema a parametri concentrati → resistenza uguale in ogni punto del circuito quindi posso pensare di "concentrarla" in un punto (anche induttore)
7. sistema a parametri distribuiti → barretta conduttrice vicino a fonte di calore, il lato della barretta più vicino diventerà più caldo , quindi l'uscita dipenderà sia dal tempo che dalla posizione
8. Sistema stazionario → soddisfa la proprietà di spostamento nel tempo delle cause e degli effetti → se una causa C dà un effetto E , la stessa causa traslata nel tempo dovrà dare lo stesso effetto salvo che per una traslazione δt
9. Sistema lineare → soddisfa il principio di sovrapposizione :

   y1 e y2 uscite di x1 e x2
   allora la risposta a una combinazione lineare degli ingressi : k1 x1 + k2 x2
   corrisponde a una combinazione lineare delle singole uscite : k1 y1 + k2 y2

*noi studiamo sistemi a tempo continuo, causali, stazionari o lineari, a parametri concentrati, dinamici (+ comuni) , SISO

Sistemi dinamici (equazione integro-differenziale) → servono le condizioni iniziali → se equazione differenziale di ordine N avrò N componenti dinamici, quindi N condizioni iniziali (N = ordine del sistema)

MODELLI I/U = compaiono solo ingresso e uscita

$$u(t) = \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + a_1\frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t)$$

condizioni iniziali $y(t_0) = y_0$ e $y'(t_0) = y_{01}$

MODELLI ISU = compaiono ingresso, uscita e le variabili di stato

$$\begin{cases} x' = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

con :

- x vettore con n componenti (n variabili di stato)
- A = matrice degli stati → lega x alla sua derivata x'
- B = vettore n x 1 = vettore dell'ingresso del riferimento → lega u(t) a x'
- C = vettore riga che lega uno scalare a un vettore
- D = scalare che lega uscita e ingresso → se sistema puramente dinamico D=0 e ottengo:

$$\begin{cases} x' = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

USCITA y(t) :

$$y(t) = ce^{A(t-t_0)}x_0 + c\int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}bu(\tau)d\tau + du(t)$$ → formula non dà informazioni

Teorema di composizione della risposta:
l'uscita è data dalla somma di 2 termini:

- primo termine → EVOLUZIONE LIBERA (o risposta naturale) → uscita del sistema , se questo avesse **ingresso (u(t)) nullo** e dipendesse solo dalla **situazione iniziale**
- secondo termine → EVOLUZIONE FORZATA → uscita del sistema se questo fosse **sollecitato solo dall'ingresso** e avesse **condizione iniziale nulla**

Per sistema ISU e puramente dinamico (D=0) posso scrivere:

$$\begin{cases} x' = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

Passando alle trasformate:

$$\begin{cases} X(s) = (sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}bU(s) \\ Y(s) = c^T(sI - A)^{-1}x(0) + c^T(sI - A)^{-1}bU(s) \end{cases} \Rightarrow \quad Y(s) = c^T\frac{agg(sI-A)}{det(sI-A)}x(0) + c^T\frac{agg(sI-A)}{det(sI-A)}bU(s)$$

→ anche per le trasformate vale il teorema di composizione della risposta :

- nella Y(s) primo termine = trasformata della risposta libera (naturale)
- secondo termine = trasformata della risposta forzata

IMPO: il comportamento del sistema dipende unicamente dagli AUTOVALORI, sia risposta naturale che forzata dipendono solo dagli autovalori
** a denominatore c'è il polinomio caratteristico

Fare l'analisi sulla risposta complessiva, libera o forzata è uguale→ scelgo la forzata con condizioni iniziali nulle (solo 2° termine!) → scrivo Y(s) = G(s) U(s) → G(s) = fz di trasferimento

Caso particolare → ingresso impulso di Dirac → U(s) = 1 → Y(s) = G(s) → "fz di risposta impulsiva"

$$Y(s) = G(s) = \sum_i \frac{ki}{s - pi} \quad .\rightarrow \quad y(t) = g(t) = \sum_i kie^{pit}$$

** perché se $f(t) = e^{-at} \;\rightarrow\; \dfrac{1}{s+a}$

FUNZIONE DI TRASFERIMENTO G(s)

- grado den > grado num → sistema strettamente proprio
- grado den = grado num → sistema proprio
- grado den < grado num → sistema improprio , fisicamente non realizzabile
    - dim . Negli appunti → spiegazione: se si considera un sistema SISO, del 1° ordine con sistema dinamico e si suppone che l'uscita y(t) dipenda dai valori FUTURI dell'ingresso (cosa impossibile x sistemi fisicamente realizzabili) , si ottiene che grado den < grado num.

Forma polinomiale

$$G(s) = \frac{\beta_m s^m + \; + \beta_0}{\alpha_n s^n + \; + \alpha_0}$$ → raccolgo a num e den termini comuni → $G(s) = \dfrac{\beta_m}{\alpha_n} * (Rapporto\ polinomi)$

$\dfrac{\beta_m}{\alpha_n} = K' = cost\ di\ trasferimento$ → NON ha significato fisico

**per esercizi se chiede K' (cost trasferimento) → raccolgo termini comuni a num e den , il numero che ottengo davanti alla frazione è K

Forma fattorizzata in termini di poli e zeri
→ raccolgo costanti comuni a num e den (K') e scompongo numeratore e denominatore

$$G(s) = K' \frac{(s-z1)(s-z2)...}{s^g(s-p1)(s-p2)...}$$

g → numero di poli nell'origine → indica il tipo della G(s)

zi sono gli zeri, pi sono i poli (radici)

** se i fattori a num/den sono trinomi di secondo grado $(s^2 + as + b)$→ i poli e zeri sono complessi coniugati

→ raccolgo i -zi e -pi (poli e zeri che ho tra parentesi con il meno) e i coeff dei trinomi (se ci sono)

$\tau_z = \frac{-1}{zi}$ $\tau_p = \frac{-1}{pi}$ → costanti di tempo

$K = K' \frac{\tau_{p1}\tau_{p2}}{\tau_{z1}\tau_{z2}}$ → costante di guadagno → ha significato fisico (guadagno del sistema)

**per esercizi se chiede di trovare cost di guadagno, metodo più semplice: $lim_{s \to 0} s^g G(s) = K$

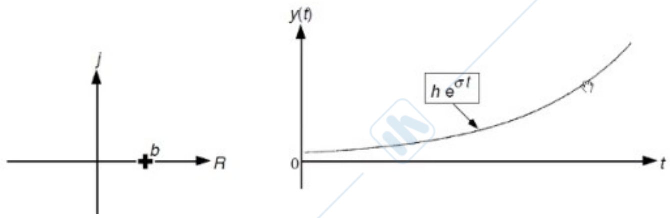
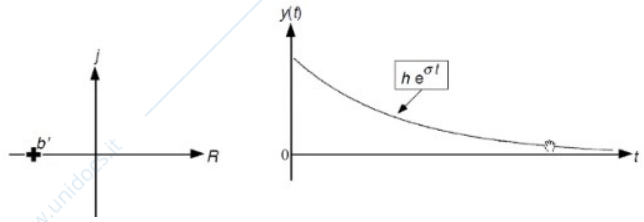
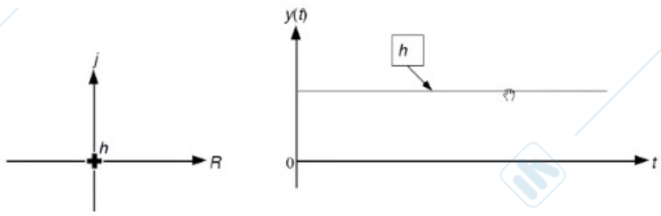
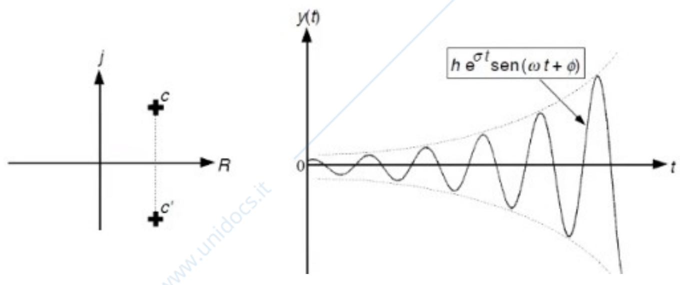
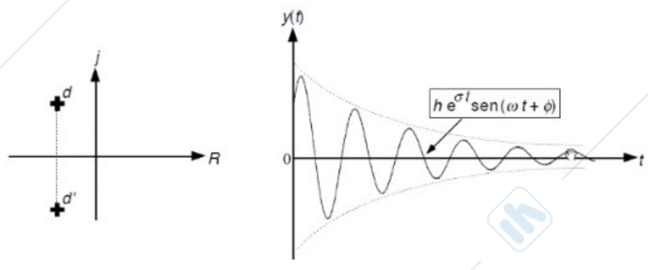
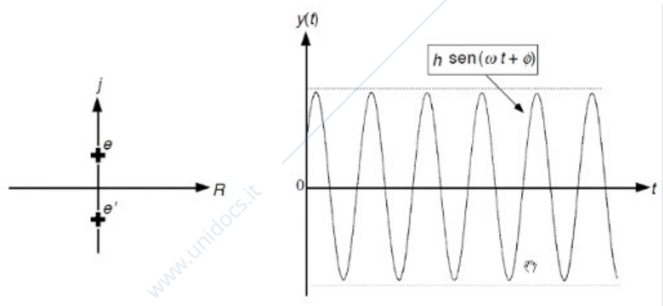
con s^g → poli nell'origine , se non ci sono metto solo G(s)

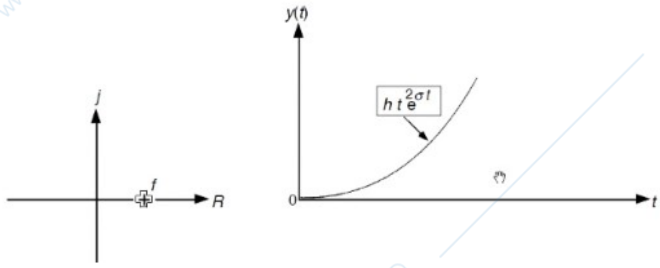
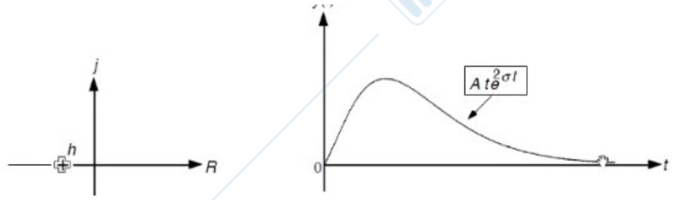
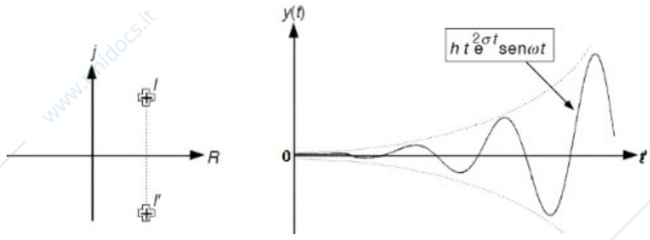
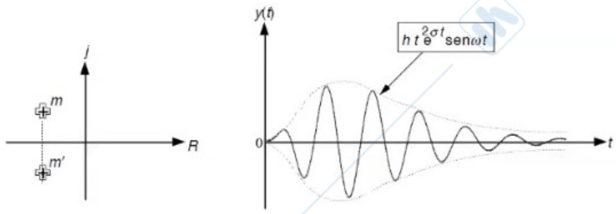
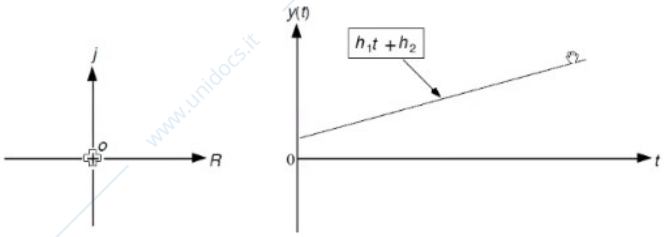
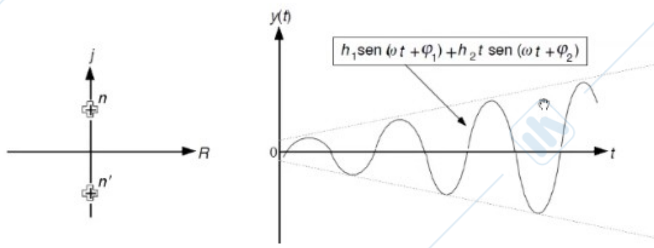
- tipo zero → g=0 → K detto guadagno statico
- tipo uno → g= 1 → K detto cost di velocità
- tipo due → g=2 → K cost di accelerazione

POLI possono essere di diverso tipo

scrivo l'uscita $y(t) = g(t) = \sum_i kie^{pit}$ (con ingresso impulso di dirac)

k= residui relativi ai poli , e^{pit}= modi

POLI SEMPLICI	
→ poli reali a parte reale positiva • transitorio NON oscillatorio • comportamento instabile	
→ poli reali a parte reale negativa (la σ è negativa) • transitorio NON oscillatorio • comportamento asintoticamente stabile	
→ polo nell'origine → $e^0 = 1$→ rimane k • transitorio NON oscillatorio • comportamento stabile	
→ coppia di poli complessi coniugati a parte reale positiva • transitorio oscillatorio • comportamento instabile	
→ coppia di poli complessi coniugati a parte reale negativa • transitorio oscillatorio • asintoticamente stabile	
→ coppia di poli complessi coniugati con parte reale nulla (andamento oscillatorio con ampiezza cost) • transitorio oscillatorio • semplicemente stabile	

POLI MULTIPLI (molteplicità > 1)	
→ polo reale a parte reale positiva • comportamento instabile (come prima)	
→ polo reale a parte reale negativa • asintoticamente stabile (come prima)	
→ coppia di poli complessi coniugati a parte reale positiva • transitorio oscillatorio • comportamento asintoticamente stabile	
→ coppia di poli complessi coniugati a parte reale negativa • transitorio oscillatorio • asintoticamente stabile (opposto a prima)	
→ polo nell’origine (Ampiezza aumenta) • instabile (diverso da prima)	
→ poli complessi coniugati a parte reale nulla • comportamento oscillatorio • instabile (diverso da prima)	

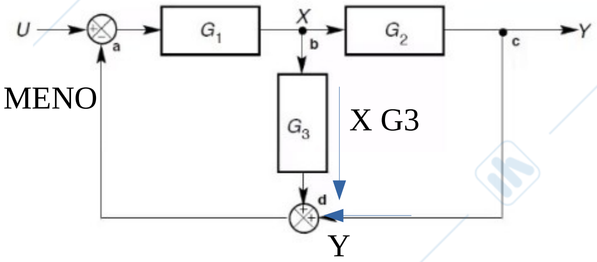
POLI:

- lenti → estinguono lentamente il transitorio (modulo della parte reale di pi minore)
- veloci → estinguono rapidamente il transitorio (modulo della parte reale di pi è molto maggiore)

→ il comportamento del sistema è determinato dai poli lenti (perché quello veloce si estingue subito)

SCHEMI A BLOCCHI → Voglio ricondurmi a schemi a blocchi più semplici (catena diretta o retroazione) per poi fare l'analisi

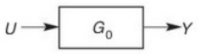
Metodo 1: operare sui segnali entranti e uscenti dai blocchi
uscita Y(s) = G(s) U(s)



X = G1 (U – (Y+ XG3)) → vista come uscita dal blocco G1
* X= G(s)* (ingresso che arriva in G1)

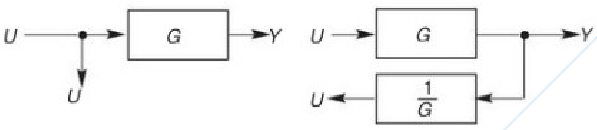
Y = G2 X → Y è l'uscita dal blocco G2

Sostituendo la X nella Y e ricavando Y , poi dividendo per l'ingresso U si ricava : $G_0 = \dfrac{G1G2}{1+G1[G2+G3]}$

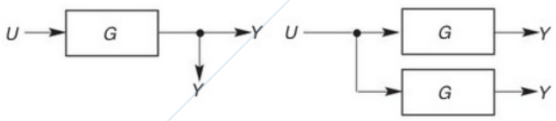


Metodo 2 : Algebra dei blocchi

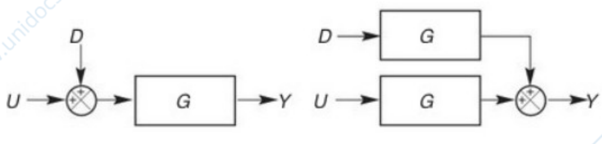
- posso invertire i blocchi e il risultato non cambia
- spostamento di un punto di diramazione dall'ingresso all'uscita di un blocco
  Impo: se blocco 1 ha G , blocco 2 ha 1/G → così il prodotto è 1 e l'ingresso rimane U



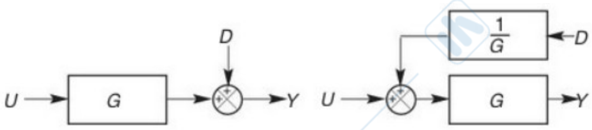
- spostamento di un punto di diramazione dall'uscita all'ingresso di un blocco
  Impo: se blocco 1 ha G , anche blocco 2 avrà G → così l'uscita rimane Y



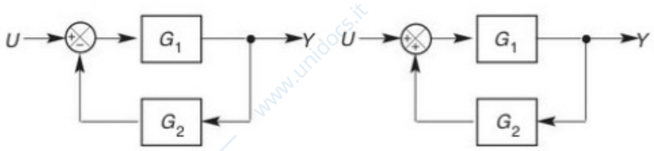
- nodo sommatore dall'ingresso all'uscita di un blocco
  nella figura 1 → (D+U) G = Y , nella figura 2 → DG + UG =Y → equivalenti



- nodo sommatore dall'uscita all'ingresso di un blocco
  figura 1 → UG + D=Y , figura 2 → (U + D/G) G = Y → equivalenti



- blocchi in serie / cascata → G è il prodotto di tutte le G (G1 G2 G3...)
- blocchi in parallelo → G è la somma di tutte le G (G1+G2+G3)
- ANELLO: retroazione negativa (se col meno) o positiva (se col più)



** G1G2 → fz trasferim di anello

$$Y = (U - YG2)G1 \rightarrow Y = U\frac{G1}{1+G1G2} \rightarrow$$
$$G_0 = \frac{Y}{U} = \frac{G1}{1+G1G2}$$

SISTEMI DEL PRIMO ORDINE

$b_0u(t) = a_1y'(t) + a_0y(t)$ condizione iniziale $y(t_0) = y_0$

Uscita complessiva trasformata

Trasformo con Laplace → $b_0U(s) = a_1sY(s) - a_1y_0 + a_0Y(s)$ → $Y(s) = \frac{a_1y_0}{a_1s + a_0} + \frac{b_0U(s)}{a_1s + a_0}$

* primo addendo risposta naturale (ingresso nullo) , secondo addendo risposta forzata (condizione iniziale nulla)

Risposta forzata e funzione di trasferimento

Se condizione iniziale nulla → solo risposta forzata → $Y(s) = \frac{b_0U(s)}{a_1s + a_0}$ → $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{a_1s + a_o}$

Cost di guadagno se tipo 0

→ è un sistema di tipo zero (non c'è s^g , no poli nell'origine) →$K = lim_{s\to 0}s^gG(s) = \frac{b_0}{a_0}$ guadagno

Caso particolare : ingresso gradino unitario

se ingresso è gradino unitario $U(s) = \frac{1}{s}$ → $Y(s) = G(s)U(s) = \frac{b_0}{s(a_1s + a_0)}$

nel dominio del tempo : $y(t) = \frac{b_0}{a_0} - \frac{b_0}{a_0}e^{(-a_0/a_1)t}$

Funzione di trasferimento in termini di guadagno- costante di tempo:

$G(s) = \frac{K}{1 + \tau s}$ $\tau = \frac{a_1}{a_0}$

OSS : sistema del 1° ordine NON ha oscillazioni, devo misurare solo quanto ci mette ad andare a regime (prontezza)

velocità di risposta si misura con il **tempo di smorzamento** (tempo in cui l'uscita raggiunge un valore che si discosta meno del 5% dal valore finale) → $t_z = 3\tau$ (raggiunge 95% del valore finale)

SISTEMA DEL SECONDO ORDINE

$b_0u(t) = a_2y''(t) + a_1y'(t) + a_0y(t)$

Uscita complessiva trasformata

$Y(s) = \frac{a_2sy_0 + a_2y_0' + a_1y_0}{a_2s^2 + a_1s + a_0} + \frac{b_0U(s)}{a_2s^2 + a_1s + a_0}$ *risposta libera e risposta forzata

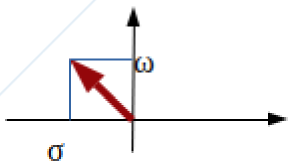
Risposta forzata e funzione di trasferimento

Se condizione iniziale nulla → $Y(s) = \frac{b_0U(s)}{a_2s^2 + a_1s + a_0}$ → $G(s) = \frac{b_0}{a_2s^2 + a_1s + a_0}$

Cost di guadagno se di tipo zero : $K = lim_{s\to 0}s^gG(s) = \frac{b_0}{a_0}$

Se radici del denominatore complesse coniugate:

$G(s) = \frac{N(s)}{(s - \sigma + j\omega)(s - \sigma - j\omega)} = \frac{K(\sigma^2 + \omega^2)}{s^2 - 2\sigma s + \sigma^2 + \omega^2} = \frac{K\omega^2}{s^2 + 2\delta\omega s + \omega^2}$



Si vuole che :

$\begin{cases} \sigma s = -\delta\omega \\ \omega^2 = \sigma^2 + \omega^2 \end{cases}$ → $\sigma = cos\phi$ e $s = \omega\left[-\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 1}\right]$

Casi possibili:
$\delta > 1$ poli reali
$\delta = 1$ poli reali coincidenti
$0 < \delta < 1$ poli complessi coniugati
$\delta = 0$ poli puramente immaginari

δ = coeff di smorzamento

Formule x esercizi: $\omega = \sqrt{\dfrac{a_0}{a_2}}$ $\quad 2\delta\omega = \dfrac{a_1}{a_2}$

Migliorare la prontezza → il transitorio si estingue prima MA aumentano le oscillazioni
Migliorare le oscillazioni → ridurre le oscillazioni MA peggiora la prontezza

prontezza dipende da ω, max sovraelongazione dipende da δ

DEF:
Massima sovraelongazione = differenza in % tra il valore max raggiunto dall'uscita e il valore finale (Dipende solo da δ)
istante di max sovraelongazione t_m = istante in cui si presenta la max sovraelongazione

tempo di salita = ts = tempo necessario affinché l'uscita passi dal 10% al 90% del valore finale
tempo di ritardo = tr= tempo necessario affinché l'uscita raggiunga il 50% del valore finale
tempo di assestamento = ta= tempo necessario affinché l'uscita rimanga a +5% o – 5% del valore finale

istante di max , o min, della risposta al gradino unitario y(t) → $t* = \dfrac{n\pi}{\omega\sqrt{1-\delta^2}}$ se n=1 è tm

Massima sovraelongazione → $S = 100e^{\frac{-\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$
Casi particolari : S=100% quando $\delta = 0$, S=0 quando $\delta = 1$

tempo di assestamento → $\omega t_a = \dfrac{3}{\delta}$

tempo di salita → $\omega t_s = \dfrac{1,8}{1,5-\delta}$

Valori utili x esercizi:

S= 100%	$\delta = 0$
S= 70%	$\delta = 0,1$
S= 50%	$\delta = 0,2$
S= 25%	$\delta = 0,4$
S= 10%	$\delta = 0,6$
S =0	$\delta = 1$

SISTEMI DI ORDINE SUPERIORE
In alcuni casi l'uscita dipende solo da alcuni dei suoi poli → poli prevalenti o dominanti
motivi:
- ci sono cost di tempo molto elevate e altre molto più piccole
- ci sono poli e zeri talmente vicini da elidersi a vicenda

In questi casi si usa il sistema di ordine ridotto, ottenuto :
- eliminando i poli troppo lontani dall'asse immaginario (rappresentativi di cost di tempo piccole)
- eliminando poli e zeri coincidenti o quasi
- IMPO: la cost di guadagno K del sistema di ordine ridotto deve essere uguale a quella originale

CRITERIO DI LIACUNOV (fa riferimento ai grafici nella tabella sopra)
- asintotica stabilità → la risposta coincide con il riferimento :
  - poli reali a parte reale negativa
  - poli complessi coniugati a parte reale negativa
- semplice stabilità → la risposta oscilla con ampiezza costante intorno al riferimento
  - poli reali a parte reale nulla con molteplicità 1 (poli semplici)
  - poli complessi coniugati a parte reale nulla con molteplicità 1 (poli semplici)
- instabile → la risposta si allontana sempre di più dal riferimento :
  - poli reali a parte reale positiva
  - poli complessi coniugati a parte reale positiva
  - nel caso di poli multipli sono instabili i casi che prima erano semplicemente stabili (parte reale nulla)

impo: si deduce che il sistema è asintoticamente stabile se ha parte reale negativa

Caso dei blocchi:

- blocchi in serie ognuno con G(s) asintoticamente stabile → anche la G(s) tot sarà asint stabile
- blocchi in parallelo ognuno con G(s) asintoticamente stabile → anche la G(s) tot lo sarà
- blocchi connessi in retroazione con G(s) asintoticam stabile → la G(s) tot NON è detto che lo sia

*so che è asintoticamente stabile perché ha poli a parte reale negativa

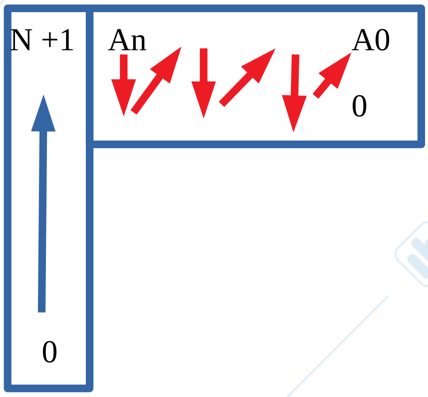
CRITERIO DI ROUTH

1. scrivo il polinomio caratteristico ordinato e completo
    1. ordinato → dal grado più alto al più basso di s
    2. completo → se mancano dei termini metto 0 , devono esserci tutti
2. se i coefficienti sono alcuni positivi e altri negativi → anche i poli sono alcuni positivi e altri negativi → il sistema è INSTABILE
3. se il polinomio NON ha termine noto → il sistema NON è asintoticamente stabile
    motivo :
    - raccolgo s^k dal polinomio → se k = 1 potrebbe essere semplicemente stabile, se k>1 INSTABILE → in ogni caso NON asintoticamente stabile

** quindi : se i coefficienti sono un po positivi e un po negativi o se il polinomio non ha termine noto NON ha senso costruire la tabella

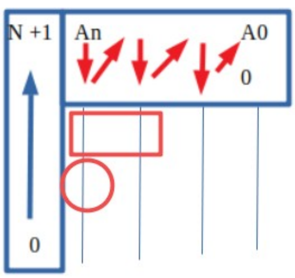
Costruzione della tabella :

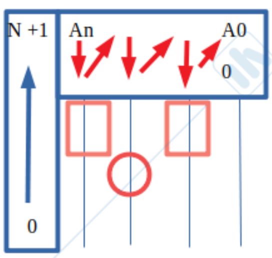
1. se il grado massimo di s è n → ho n+1 righe nella tabella (numerate a partire da 0 dal basso verso l'alto)
2. Inserisco nella tabella tutti i coefficienti come in figura:



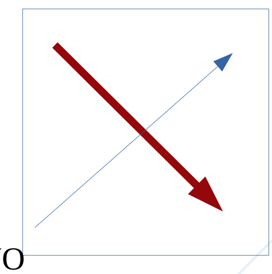
3. Per ogni riga i termini sono frazioni:
    1. DENOMINATORE → coefficiente della COLONNA 1 , RIGA SUBITO SOPRA
    2. NUMERATORE → due casi :
        1. sono nel termine della 1° colonna → numeratore = determinante cambiato di segno della matrice quadrata data da due righe sopra e prime 2 colonne
        2. sono in un termine NON della 1° colonna → numeratore = determinante cambiato di segno della matrice quadrata data da due righe sopra e prima colonna e colonna a dx di quella considerata

es. voglio trovare NUM cerchio





DETERMINANTE cambiato di segno:
determinante:



MENO

POI CAMBIO SEGNO A QUELLO TROVATO

oss. Gli ultimi termini delle righe pari sono uguali al termine noto
** esplorare elementi dall'alto al basso o viceversa è indifferente
esploro elementi dal basso verso l'alto guardando SOLO 1° COLONNA → se dal termine sotto a quello sopra stesso segno PERMANENZA , se cambia segno VARIAZIONE
tutte permanenze = parte reale negativa = ASINTOTICAMENTE STABILE
alcune permanenze, altre variazioni = INSTABILE

CASI PARTICOLARI:

1. Ho un solo zero nella prima colonna→ non posso avere 0 a denominatore, sostituisco 0 con $+\epsilon$
2. COROLLARIO → Ho uno o più zeri nella riga (di cui uno 0 nella 1° colonna) :
    1. la riga con lo zero la scrivo 3 volte, es. 2' - 2'' - 2
    2. conto quanti zeri ci sono nella riga 2' , h= numero di zeri
    3. moltiplico la riga per $(-1)^h$ e la traslo a sx di h posizioni → questa è la 2''
    4. sommo la 2' e la 2'' e scrivo la 2 definitiva → l'unica che poi considero
3. Ho (o ottengo) una riga di TUTTI zeri :
    1. devo trovare l'**equazione ausiliaria**
    2. guardo la riga SOPRA a quella di tutti 0 → il numero della riga mi darà il grado max di s impo: il grado di s passa da due in due → es. $8s^2 + 8s^0$→ se sono nella 2^ riga
    3. metodo 1 : trovo le radici dell'eq ausiliaria :
        1. complesse coniugate a parte reale nulla o poli nell'origine → semplicemente stabile
        2. a parte reale positiva → instabile
    4. metodo 2: derivo l'equazione ausiliaria e la metto al posto della riga di tutti 0 poi analizzo variazioni o permanenze dopo la riga di tutti 0 :
        1. se permanenze e variazioni sotto la riga di 0 sono bilanciate → sistema instabile
        2. se NON sono bilanciate = poli nell'origine o con parti reali nulla → semplicemente stabile
4. Chiede i valori di K per i limiti di stabilità :
    - risolvo la tabella di Routh tenendo K fino alla fine
    - faccio l'analisi sulla 1° colonna guardando i valori per cui si avrebbero solo permanenze (es. -2 < k < 8) e poi vado a sostituire k= estremi per vedere cosa succede (o semplice stabilità o instabilità) , se sostituendo ottengo una riga di 0 uso eq. Ausiliaria

ERRORI A REGIME

e = r – y → errore = riferimento – uscita E(s) = R(s) – Y(s)

segnale di errore → $\epsilon = R(s) - Y(s)H(s)$

$$E(s) = R(s)\frac{1 + H(s)G(s) - G(s)}{1 + H(s)G(s)}$$

errore a regime = errore con tempo che tende a infinito

$$e_{reg} = lim_{s\to 0} sE(s) = lim_{s\to 0} sR(s)\frac{1 + H(s)G(s) - G(s)}{1 + H(s)G(s)}$$

se la retroazione è unitaria (H=1) → $e = lim_{s\to 0}\frac{sR(s)}{1 + G(s)}$

errori a regime dipendono da: poli nell'origine (g) e dal segnale canonico scelto (R(s))

1) GRADINO di ampiezza M → $R(s) = \frac{M}{s}$

con retroazione unitaria → $e = lim_{s\to 0}\frac{sR(s)}{1 + G(s)} = \frac{sM}{s(1 + G(s))}$ → se tipo 0 : $e = \frac{M}{1 + K}$ (cost)

2) RAMPA → y= mt → $R(s) = \frac{m}{s^2}$

con retroazione unitaria → $e = lim_{s\to 0}\frac{sR(s)}{1 + G(s)} = \frac{sm}{s^2(1 + G(s))} = \frac{m}{s(1 + G(s))}$ → se tipo 0 va a ∞

se tipo 1 → $e = \frac{m}{K}$

3) PARABOLA → $y = B\frac{t^2}{2}$ $R(s) = \frac{B}{s^3}$

$$e_{reg} = lim_{s\to 0}\frac{B}{s^2(1 + G(s))}$$

LUOGO DELLE RADICI = rappresentazione nel piano di Gauss dei poli (radici del polinomio caratteristico) al variare della costante di guadagno (K)
→ simmetrico rispetto all'asse REALE (o sull'asse reale)

CRITERIO DI EVANS

per sistema in retroazione negativa → $G_0 = \dfrac{G(s)}{1+H(s)G(s)}$

considero solo il denominatore e lo pongo =0 → $H(s)G(s) = -1$

criterio della fase → $arg(H(s)G(s)) = (2v+1)\pi$

criterio del modulo → $|H(s)G(s)| = 1$

metodo che usiamo noi:

$H(s)G(s) = -1 \rightarrow 1 + K' \dfrac{N(s)}{D(s)} = 0$ dove K' è la cost di trasferimento

$K' = -\dfrac{D(s)}{N(s)}$

$0 < |K'| < \infty \rightarrow K = 0$ poli , $K = \infty$ zeri → nel grafico rami partono dai poli e arrivano negli zeri

n = numero poli , m = numero zeri → n – m asintoti

asintoti si incontrano in un punto dell'asse reale che ha ascissa → $\sigma = \dfrac{\sum_i pi - \sum_i zi}{n-m}$

angolo tra asintoto e asse reale :
v max = n – m – 1

se K' > 0 → $\theta = \dfrac{(2v+1)\pi}{n-m}$ se K' < 0 → $\theta = \dfrac{2v\pi}{n-m}$

punti di biforcazione = punti con poli multipli (molteplicità h)
→ se h=2 , biforcazione σ la trovo con : $\displaystyle\sum_i \frac{1}{\sigma - pi} = \sum_i \frac{1}{\sigma - zi}$

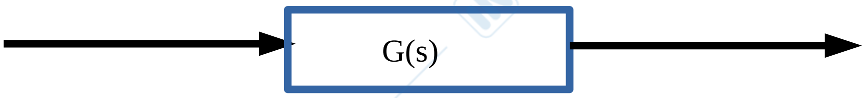
punto dell'asse reale appartiene al luogo:
- K' > 0 → a dx ha numero DISPARI di zeri e poli contati con la molteplicità
- K' < 0 → a dx ha un numero PARI di zeri e poli contati con la molteplicità

* zero è pari

ANALISI ARMONICA

- studiando il comportamento fino a ora abbiamo trovato soluzioni solo per misurare oscillazioni e prontezza per sistemi del 1° o 2° ordine → per sistemi di ordine superiore il problema rimane aperto
- per questo motivo è utile l'analisi armonica, in cui l'ingresso è una sinusoide, in quanto l'analisi è fatta graficamente e quindi non importa l'ordine del sistema

ingresso : $u(t) = Asen(\omega t)$ → $U(s) = \dfrac{A\omega}{s^2 + \omega^2}$ fz di trasferimento G(s)



l'uscita sarà: $y(t) = Y(\omega)sen(\omega t + \phi)$

- sia ampiezza che fase dell'uscita dipendono da ω

$G(j\omega)$ è la funzione di risposta armonica → è il modello nel dominio delle frequenze

$arg(G(j\omega)) = \phi$ $\quad |G(j\omega)| = \dfrac{Y(\omega)}{A}$

per ogni funzione di risposta armonica si hanno 1 diagramma polare e 2 diagrammi di Bode

DIAGRAMMA POLARE → è la rappresentazione nel piano complesso della **funzione di risposta armonica** $G(j\omega)$, per ogni valore di ω si ha un punto con parte reale e immaginaria e unendo i punti si ottiene il grafico

fase positiva = anticipo , fase negativa = ritardo

per ω→ 0 guardo i poli nell'origine :

- ci sono poli nell'origine → il diagramma **parte** da ∞
- non ci sono poli nell'origine → il diagramma parte da un punto dell'asse Reale

per $\omega \to \infty$ guardo il grado di num e den :

- grado den > grado num (strettamente proprio) → diagramma **termina** nell'origine
- grado den = grado num (proprio) → diagramma termina in un punto dell'asse Reale

PROCEDIMENTO PER COSTRUIRE IL DIAGRAMMA POLARE :

1. trovo $G(j\omega)$ → faccio le osservazionei per ω→ 0 e ω→ ∞
2. determino modulo e fase di $G(j\omega)$
3. faccio i limiti per ω→ 0 e ω→ ∞
4. trovo le intersezioni con gli assi → razionalizzo $G(j\omega)$ in modo da avere parte reale e immaginaria poi pongo Re=0 e Im=0 → ACCETTO SOLO ω POSITIVE
5. determino $G(j\omega)$ nei punti di intersezione con gli assi
6. Trovo eventuali asintoti

   $lim_{\omega \to 0} Re = K$ → Asintoto che dista K dall'asse immaginario (parallelo a Im)

DIAGRAMMA DI BODE :
2 diversi diagrammi:

- diagramma alpha, diagramma delle ampiezze → doppiamente logaritmico ($log(G(j\omega))$ - $log(\omega)$)
- diagramma beta , diagramma delle fasi → semi-logaritmico → $arg(G(j\omega))$ - $log(\omega)$

Motivi per cui si sfruttano i logaritmi:

- un prodotto diventa una somma per le proprietà dei logaritmi ed è più semplice
- i logaritmi hanno più precisione
- impo: usare log in base 10 o un 'altra base sarebbe indifferente

Diagramma di Bode = diagramma logaritmico approssimato , ovvero con linee spezzate a pendenza intera

scala lineare → la differenza tra 2 numeri successivi è costante
scala logaritmica → il rapporto tra 2 numeri successivi è costante (il rapporto farà 10)

per il diagramma delle ampiezze l'asse delle ordinate può riportare il modulo di $G(j\omega)$ in db
Pertanto si avrà → $db = 20log_{10}x$

pendenza -1 significa -20 db per decade

data $G(j\omega)$= $(kj\omega)^n$ → la pendenza della retta vale 20 n dB / decade

Costruzione diagramma di Bode:

- G in forma fattorizzata in termini di costanti di tempo
- costruisco i diagrammi di Bode di ogni fattore
- sommo punto a punto

punto di rottura = punto in cui cambia la pendenza tra 2 spezzate

errore tra diagramma di Bode e diagramma logaritmico corrispondente è massimo nel punto di rottura → l'errore vale $log(\sqrt{2})$ che equivale a 3n dB

CRITERIO DI NYQUIST → solo per sistemi chiusi in retroazione
condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema chiuso in retroazione sia asintoticamente stabile è che il diagramma polare completo (simmetria rispetto asse R) della funzione di risposta armonica di anello $(G(j\omega)H(j\omega))$ non circondi ne tocchi il punto critico P (-1+j0)

- punto critico è esterno → asintoticamente stabile
- punto critico tocca la curva → semplicemente stabile
- punto critico interno alla curva → instabile

→ se la curva del diagramma polare completo viene aperta traccio una curva in senso ORARIO che la chiude

CRITERIO DI BODE → applicabile solo se poli e zeri a parte reale NON positiva e K > 0
un sistema chiuso in retroazione è **asintoticamente stabile** se :

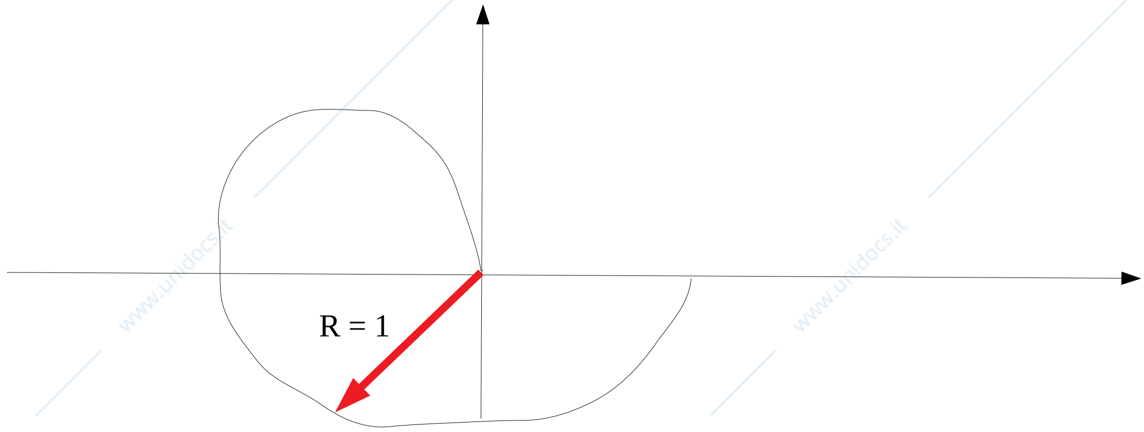
- guadagno K > 0
- margine di fase $\phi > 0$

Problema: se la curva del diagramma polare è molto vicina al punto critico non so cosa dire , quindi mi è utile usare gli **indicatori di stabilità** :

- margine di ampiezza → $m_a = \dfrac{1}{|G(\omega_\pi)|)}$ $\qquad$ ω_π = pulsazione con fase $-\pi$
- margine di fase → $\theta = \pi - |\theta_C|$ $\qquad$ θ_C = fase critica → fase quando il raggio vale 1

** margine di ampiezza $ma[dB] = 20log(ma) = -|G(\omega_\pi)|dB$

** in ω_C→ $|G(j\omega_c)| = 1$
sistema asintoticamente stabile se ma > 1 , ovvero ma > 0 dB
valori buoni per stabilità robusta → ma tra 4 e 6 , fase tra 45 e 60

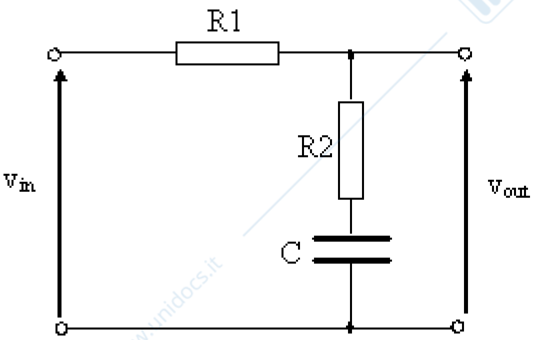


RETI CORRETTRICI → si può “forzare” il sistema ad avere il comportamento desiderato introducendo dei regolatori

possibili metodi progettuali:

1. sintesi diretta (analitica)
2. sintesi per tentativi
3. **<u>sintesi con regolatori standard</u>**
4. **<u>sintesi con reti correttrici →</u>** + note sono la ritardatrice e anticipatrice
5. sintesi tramite luogo delle radici

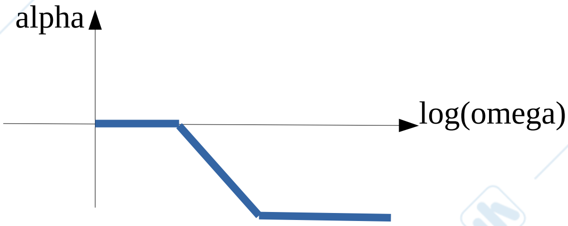
RETE RITARDATRICE



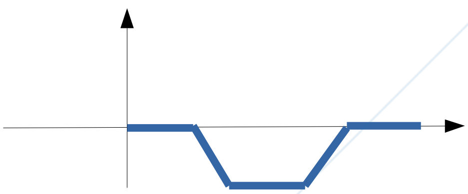
$$G(s) = \frac{1 + \alpha\tau s}{1 + \tau s} \qquad \tau = (R1 + R2)C \qquad \alpha = \frac{R2}{R1 + R2}$$

IMPO: cost di tempo del polo è τ, quella dello zero è $\alpha\tau$ quindi l’azione dello zero si fa sentire DOPO quella del polo (x questo ritardatrice)

→ Diagrammi di Bode: c’è 1 zero e 1 polo a parte reale negativa

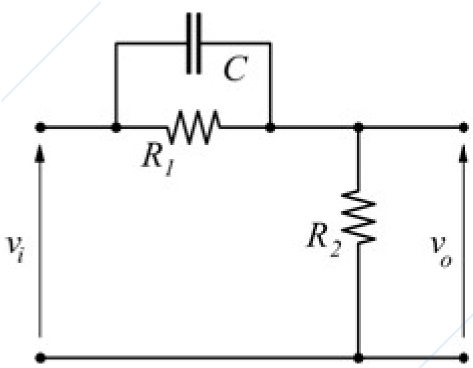


$$\omega_A = \frac{1}{\tau} \qquad \omega_B = \frac{1}{\alpha\tau}$$

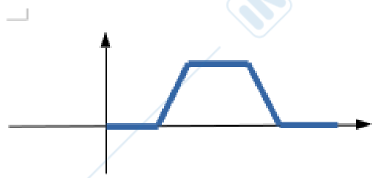


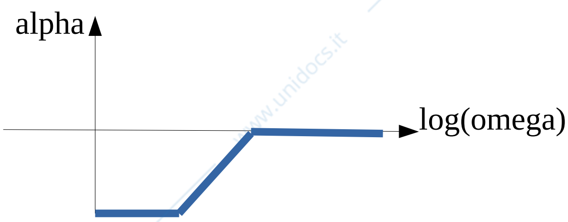
nel punto più basso vale $-\frac{\pi}{2}$

RETE ANTICIPATRICE



$$G(s) = \frac{\alpha(1 + \tau s)}{1 + \alpha\tau s} \qquad \tau = R1 * C \qquad \alpha = \frac{R2}{R1 + R2}$$





$$\omega_A = \frac{1}{\tau} \qquad \omega_B = \frac{1}{\alpha\tau}$$

REGOLATORI STANDARD → sono simili a reti correttrici ma i parametri vengono progettati 1 SOLA VOLTA e poi variati tramite manopole
ne esistono diversi tipi:

1. proporzionale (uscita proporzionale all'ingresso)
2. integrale
3. proporzionale-integrale (uscita proporzionale all'integrale dell'ingresso)
4. derivativo
5. proporzionale-derivativo (uscita proporzionale alla derivata dell'ingresso)
6. PID → proporzionale-integrale-derivativo → è il più completo

il PID agisce attraverso 3 contributi:

- contributo proporzionale all'errore
- contributo proporzionale all'integrale dell'errore
- contributo proporzionale alla derivata dell'errore

→ il regolatore PID sarebbe non realizzabile per la presenza del DERIVATORE ideale , per questo motivo , per renderlo realizzabile si introduce un polo (a frequenza alta)

x formule precise vedi appunti lezione