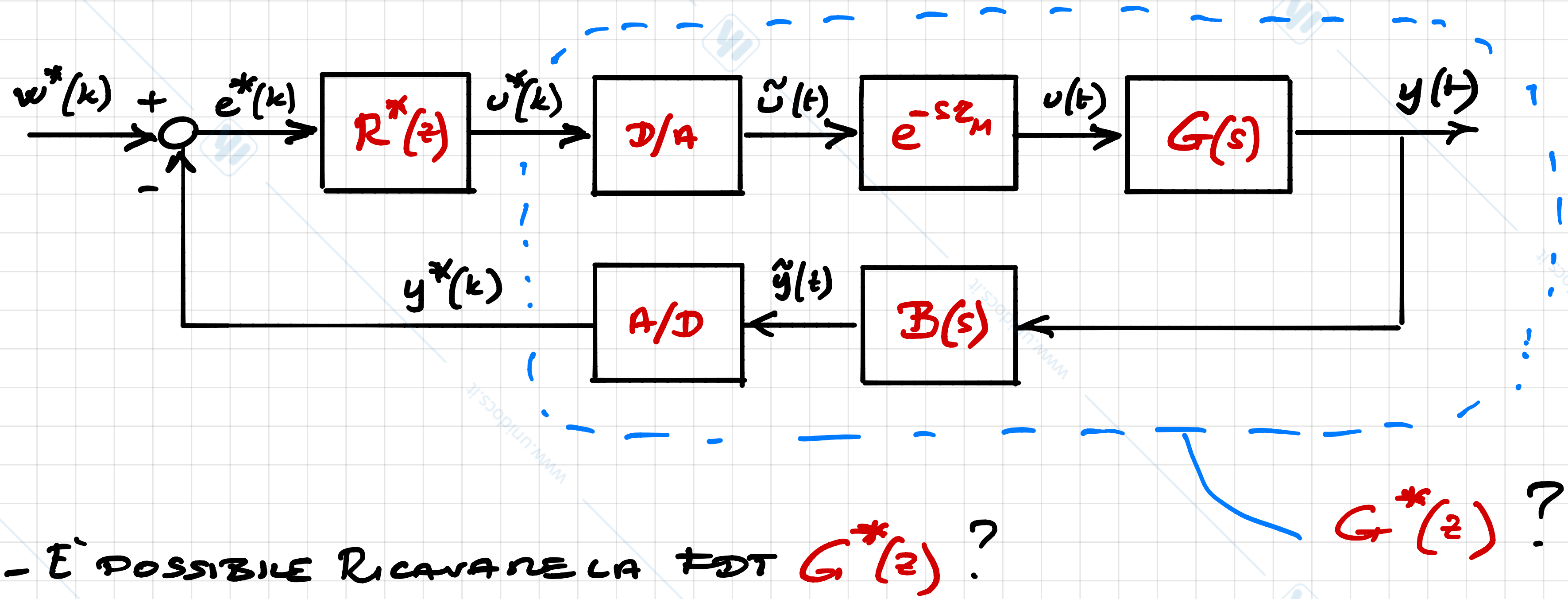
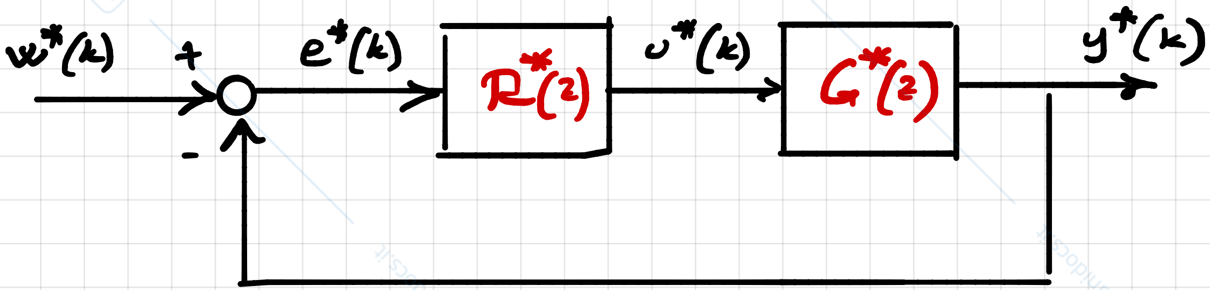
SISTEMI A SEGNALI CAMPIONATI

- ANALISI A TEMPO DISCRETO DI SISTEMI DI CONTROLLO DIGITALE



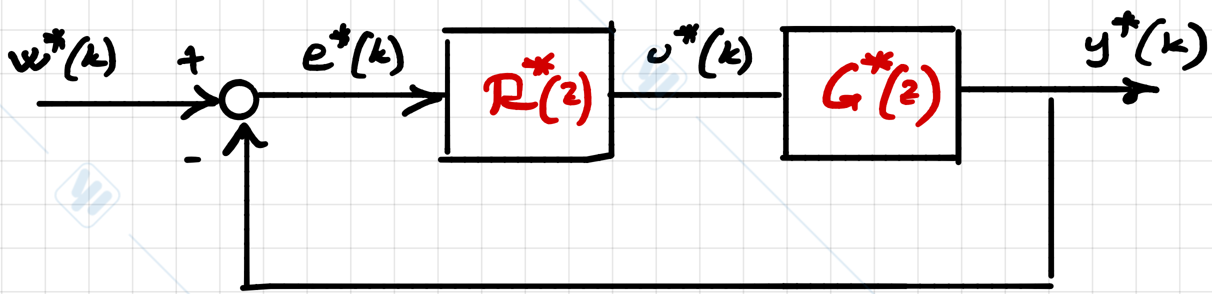
- È POSSIBILE RICAVARE LA FDT $G^*(z)$?

- IN CASO AFFERMATIVO, IL SISTEMA SI RIDUCE A:



SISTEMA RETROAZIONATO A T. DISCRETO

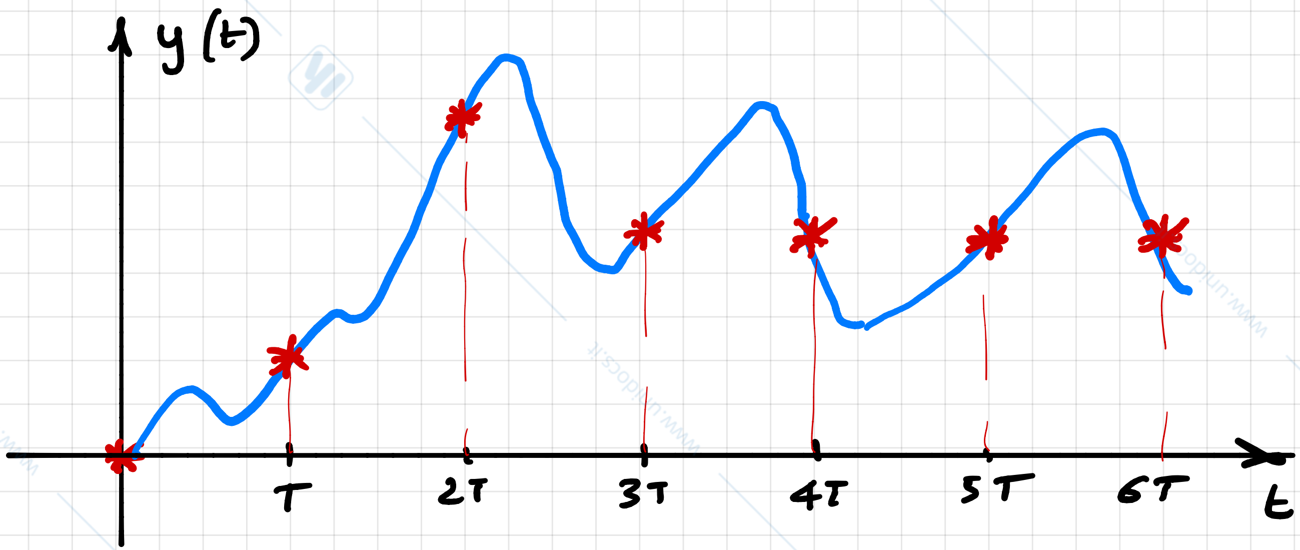
- LIMITAZIONE



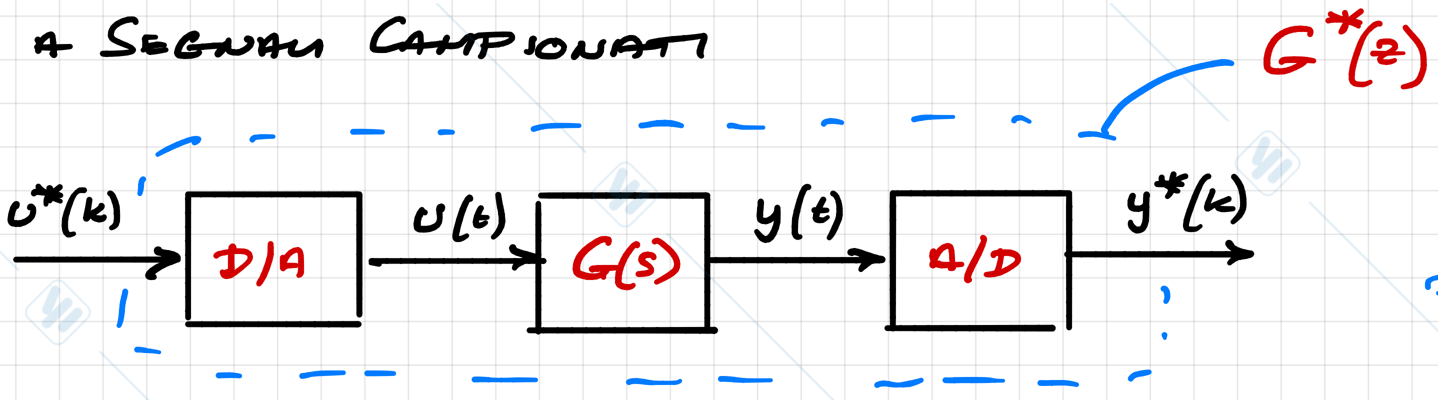
- IL MODELLO DESCRIVE L'EVOLUZIONE SOLO NEGLI ISTANTI DI CAMPIONAMENTO

- NON RIESCE A DESCRIVERE EVENTUALI OSCILLAZIONI NASCOSTE

- NOTA:
UNA SCELTA OCULATA DI T EVITA QUESTE SITUAZIONI



- SISTEMI A SEGNALI CAMPIONATI



$T > 0$
PERIODO

- MANTENITORE (ZOH): $u(t) = u^*(k) \quad kT \leq t < (k+1)T$
- SISTEMA: $Y(s) = G(s)\,U(s)$
- CAMPIONATORE: $y^*(k) = y(kT)$

- METODI PER IL CALCOLO DI $G^*(z)$
  - METODO 1 - BASATO SULLA RISPOSTA ALLO SCALINO
  - METODO 2 - BASATO SULLA RAPPRESENTAZIONE DI STATO

- METODO 1

$$u^*(k) \longrightarrow \boxed{D/A} \xrightarrow{u(t)} \boxed{G(s)} \xrightarrow{y(t)} \boxed{A/D} \longrightarrow y^*(k)$$

$u^*(k) = sca^*(k)$ $\qquad U^*(z) = \dfrac{z}{z-1}$

$u(t) = sca(t)$ $\qquad U(s) = \dfrac{1}{s}$

$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{G(s)}{s}\right]$ $\qquad$ (HEAVISIDE)

$y^*(k) = y(kT)$

$$Y^*(z) = \mathcal{Z}\left[y^*(k)\right] \Longrightarrow \boxed{G^*(z)} = \frac{Y^*(z)}{U^*(z)} = \boxed{Y^*(z)\,\frac{z-1}{z}}$$

- ESEMPIO 1 - METODO 1

$$G(s) = \frac{p}{s+p}$$

$$Y(s) = \frac{G(s)}{s} = \frac{p}{s(s+p)} = \overbrace{\frac{1}{s} - \frac{1}{s+p}}^{\text{HEAVISIDE}}$$

$$y(t) = 1 - e^{-pt} \quad , \quad t \geq 0$$

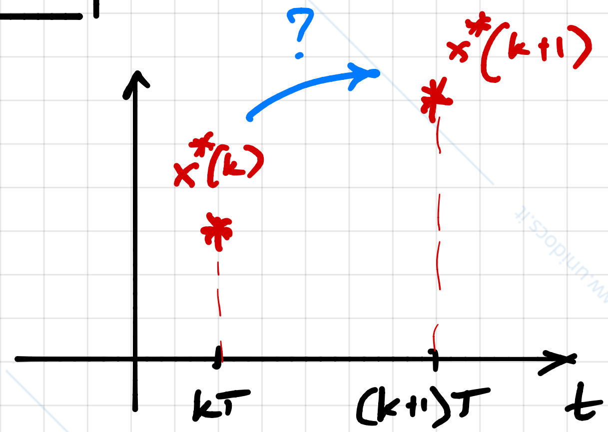
$$y^*(k) = 1 - e^{-pkT} = 1 - \lambda^k \quad , \quad k \geq 0 \, , \quad \lambda = e^{-pT}$$

$$Y^*(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-\lambda} = \frac{z(1-\lambda)}{(z-1)(z-\lambda)}$$

$$\boxed{G^*(z)} = Y^*(z)\,\frac{z-1}{z} = \frac{1-\lambda}{z-\lambda} = \boxed{\frac{1-e^{-pt}}{z-e^{-pT}}}$$

- METODO 2

$$u^*(k) \longrightarrow \boxed{D/A} \xrightarrow{u(t)} \boxed{G(s)} \xrightarrow{y(t)} \boxed{A/D} \longrightarrow y^*(k)$$



$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$ REALIZZAZIONE

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

- MOVIMENTO DA $t_0 = kT$:

$$x(t) = e^{A(t-kT)}x(kT) + \int_{kT}^{t} e^{A(t-\tau)} B u(\tau)\, d\tau$$ FORMULA DI LAGRANGE

- IN $t = (k+1)T$:

U È COSTANTE NELL'INTERVALLO

$\sigma = (k+1)T - \tau$

$$x^*(k+1) = e^{AT} x^*(k) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)} B\, d\tau\, u^*(k) =$$

$$= e^{AT} x^*(k) + \int_0^T e^{A\sigma} d\sigma\, B\, u^*(k)$$

A^*

B^*

$$x^*(k+1) = A^* x^*(k) + B^* u^*(k)$$

$$A^* = e^{AT}$$

$$B^* = \int_0^T e^{A\sigma} d\sigma \, B$$

- INOLTRE:

$$y^*(k) = C x^*(k) + D u^*(k)$$

$$\Longrightarrow \boxed{G^*(z) = C(zI - A^*)^{-1} B^* + D}$$

- ESEMPIO 1 - METODO 2

$$G(s) = \frac{p}{s+p}$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -p\,x(t) + p\,u(t) \\ y(t) = x(t) \end{cases}$$

$A = -p \quad B = p$

$C = 1 \quad D = 0$

$$A^* = e^{AT} = e^{-pT}$$

$$B^* = \int_0^T e^{A\sigma} d\sigma\, B = \int_0^T e^{-p\sigma} p\, d\sigma = \left[-e^{-p\sigma}\right]_0^T = 1 - e^{-pT}$$

$$\Longrightarrow \boxed{G^*(z)} = C(zI - A^*)^{-1}B^* + D = \boxed{\frac{1-e^{-pT}}{z - e^{-pT}}}$$

OK

- OSSERVAZIONE

  - ENTRAMBI I METODI 1 E 2 POSSONO ESSERE ESTESI AL CASO

$$G(s) = \underbrace{G'(s)}_{\text{RAZIONALE}} \underbrace{e^{-\tau s}}_{\text{RITARDO}}$$

- METODO 1 VEDI ESEMPIO 2 NELLA PAGINA SUCCESSIVA
- METODO 2 VEDI LIBRO BSS, PARAGRAFO 19.2.2

- ESEMPIO 2

$$G(s) = \frac{p}{s+p} e^{-\tau s} \quad , \quad \tau < T$$

- METODO 1 - RISPOSTA ALLO SCALINO

$$y(t) = \begin{cases} 0 & , t < \tau \\ 1 - e^{-p(t-\tau)} & , t \geq \tau \end{cases} \Rightarrow y^*(k) = \begin{cases} 0 & , k = 0 \\ 1 - e^{p\tau} e^{-pTk} & , k \geq 1 \end{cases}$$

λ^k con $\boxed{\lambda = e^{-pT}}$

$$y^*(k) = sca^*(k-1) - e^{p\tau} \lambda^k sca^*(k-1) = sca^*(k-1) - e^{p\tau} \lambda \, \lambda^{k-1} sca^*(k-1)$$

$$\lambda^{k-1} sca^*(k-1) \xrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{1}{z-\lambda}$$

$$Y^*(z) = \frac{1}{z-1} - e^{p\tau} \frac{\lambda}{z-\lambda}$$

$$\boxed{G^*(z)} = Y^*(z) \frac{z-1}{z} = \frac{1}{z} - \lambda e^{p\tau} \frac{z-1}{z(z-\lambda)} =$$

$$= \frac{z - \lambda - \lambda e^{p\tau}(z-1)}{z(z-\lambda)} = \boxed{\frac{z(1-\lambda e^{p\tau}) - \lambda(1-e^{p\tau})}{z(z-\lambda)}}$$

- LEGAMI TRA $G(s)$ E $G^*(z)$

TRASF. DI CAMPIONAMENTO

1. I POLI DI $G^*(z)$ SI RICAVANO DAI POLI DI $G(s)$ MEDIANTE $\boxed{z = e^{sT}}$

2. LA PROPRIETÀ 1 NON VALE PER GLI ZERI

3. IL NUMERO DI ZERI DI $G^*(z)$ È $\begin{cases} n & \text{SE } D \neq 0 \\ n-1 & \text{SE } D = 0 \end{cases}$

   (GLI ZERI IN ECCESSO SONO DETTI ZERI DI CAMPIONAMENTO)

4. SE $G(s)$ HA TIPO $g=0$: $\boxed{\mu^* = G^*(1) = G(0) = \mu}$ GUADAGNO STATICO

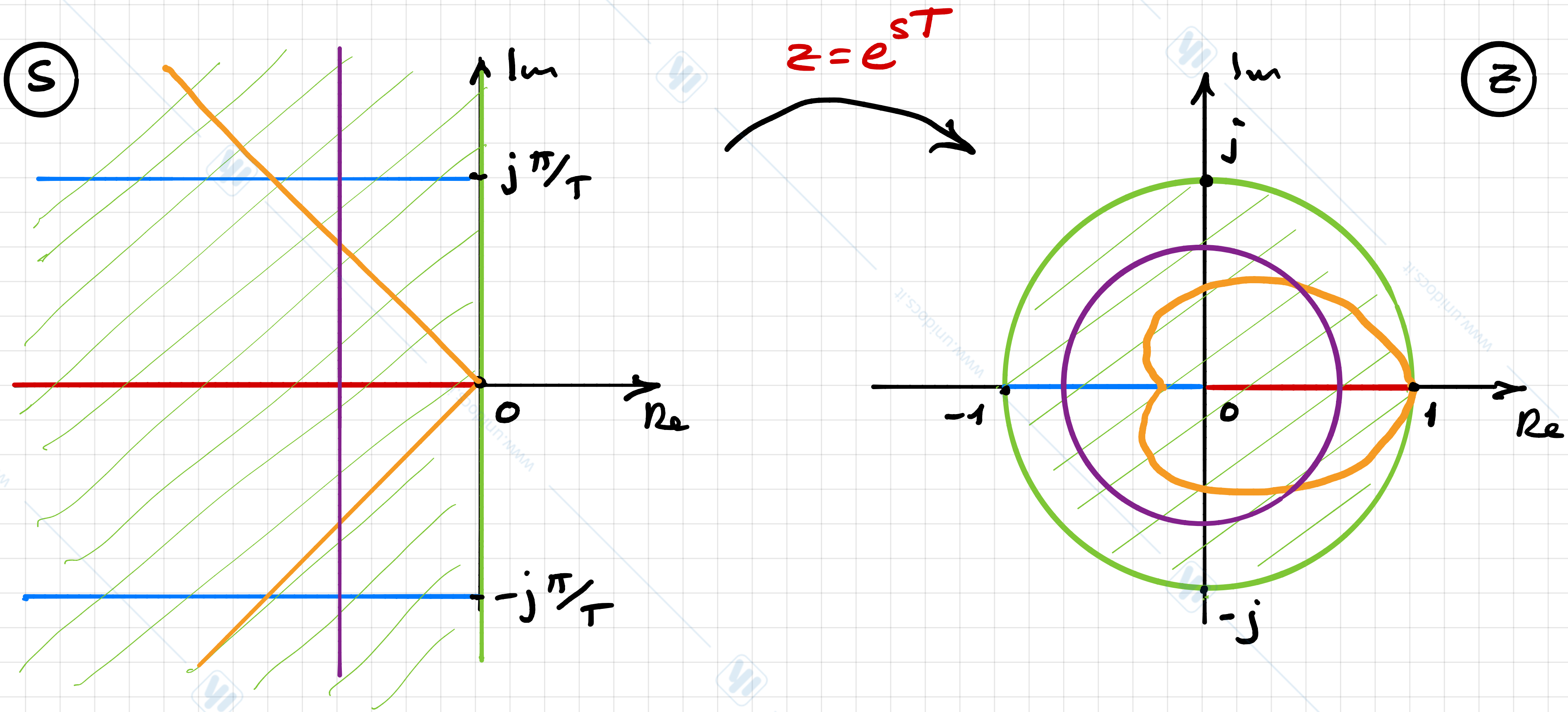
5. SE $G(s)$ HA TIPO $g>0$: $\boxed{\mu^* = \mu T^g}$

GUADAGNI GENERALIZZATI

$$\mu = \lim_{s \to 0} s^g G(s)$$

$$\mu^* = \lim_{z \to 1} (z-1)^g G^*(z)$$

- ANALISI DELLA TRASFORMAZIONE DI CAMPIONAMENTO

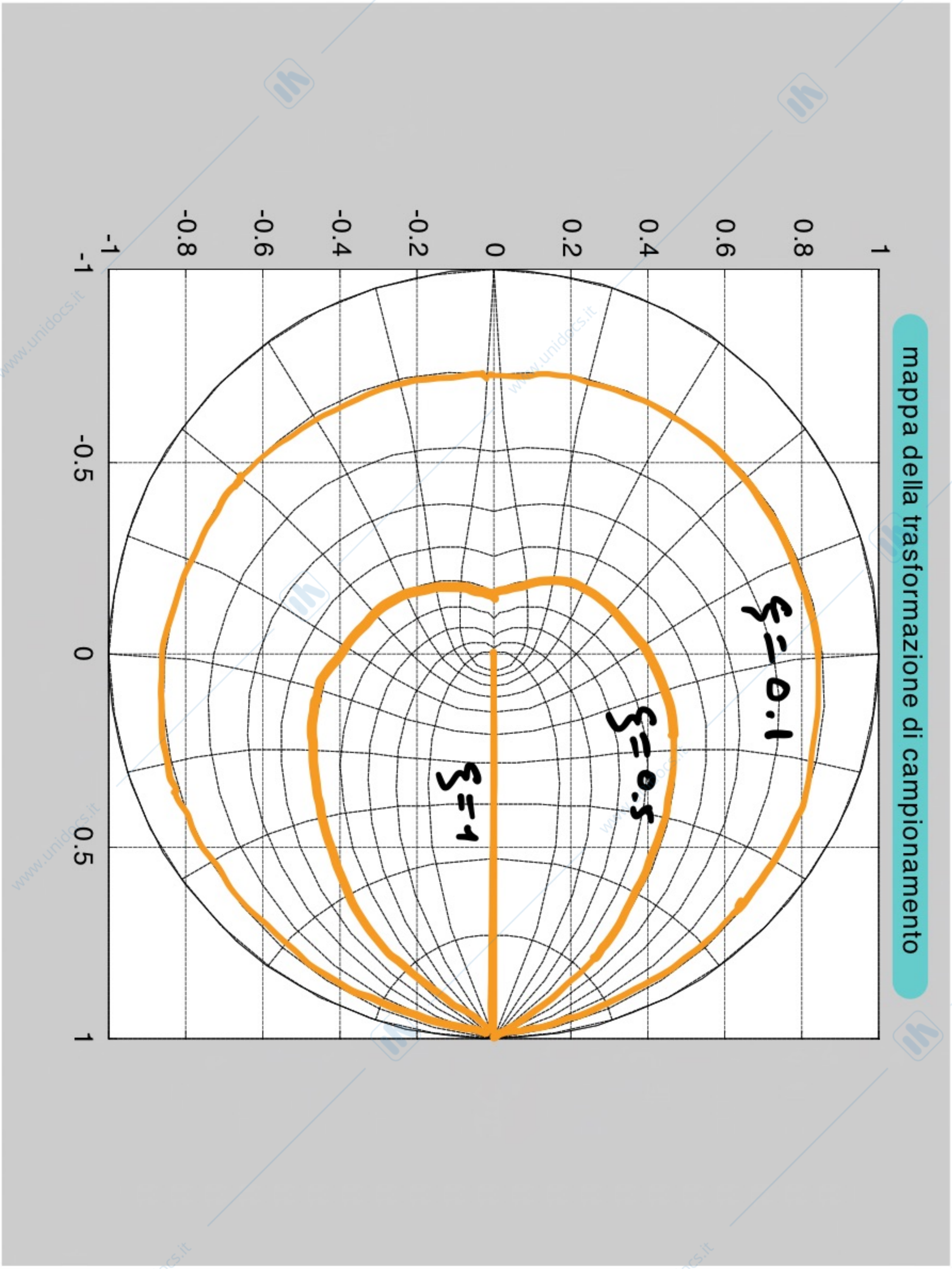


$s = \sigma + j\omega$

$z = e^{\sigma T} e^{j\omega T} = r e^{j\vartheta}$

$\begin{cases} r = e^{\sigma T} \\ \vartheta = \omega T \end{cases}$

ATTENZIONE! NON C'È
CORRISPONDENZA BIUNIVOCA


mappa della trasformazione di campionamento
ξ=0.1
ξ=0.5
ξ=1