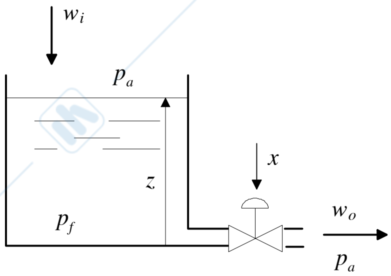
Capitolo 1
Circuiti idraulici

In questo capitolo si ricavano i modelli dei principali elementi che compongono i circuiti idraulici a partire dalle equazioni di conservazione di massa, energia e quantità di moto. Nel seguito si farà sempre l'ipotesi che i fluidi siano incomprimibili.

1.1 Serbatoio

Si consideri il serbatioi della Figura 1.1, con sezione costante di area A, portata di ingresso w_i e portata di uscita w_o. Siano poi z il livello del liquido rispetto alla base, p_i la pressione al pelo libero e p_f la pressione sul fondo.



Serbatoio.

Ricordando che $m = \rho A z$, l'equazione di conservazione della massa

$$\frac{dm(t)}{dt} = w_i(t) - w_o(t)$$

può essere riscritta come

$$\rho A \frac{dz(t)}{dt} = w_i(t) - w_o(t)$$

Si osservi ora che, supponendo circa nulla la velocità del liquido lungo la coordinata z, dall'equazione di Bernoulli applicata a due generiche sezioni a livello z costante si ottiene la legge di Stevino

$$p + \rho g z = \text{cost}$$

o

$$z^* = \text{cost}$$

dove z^* è l'altezza di carico definita come

$$z^* = \frac{p}{\rho g} + z$$

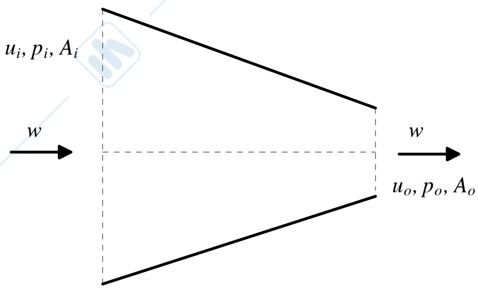
e, in particolare, risulta

$$p_f = p_a + \frac{m}{A} g = p_a + \rho g z$$

Per quanto detto in precedenza, l'equazione di conservazione della massa, per $p_a =$ costante, si può anche scrivere come

$$\rho A \frac{dz^*(t)}{dt} = \rho A \left(\frac{dz(t)}{dt} + \frac{d(p_a(t)/\rho g)}{dt} \right) = \rho A \frac{dz(t)}{dt} = w_i(t) - w_o(t)$$

1.2 Ugello



Ugello.

L'ugello, rappresentata nella Figura 1.2, è un condotto convergente in cui si suppone avvenga una trasformazione senza perdite. Lo scopo è quello di ridurre la pressione del fluido dal valore nella sezione iniziale a quello nella sezione della strozzatura, e conseguentemente di aumentare la velocità, cioé l'energia cinetica. Le forze di attrito si ritengono trascurabili a causa della piccola superficie di contatto.

Per ricavare il modello si può usare l'equazione di Bernoulli applicata alle sezioni di ingresso e uscita e in cui, date le ridotte dimensioni, è lecito porre $z_i = z_o$. Si ha quindi

$$u_o^2 - u_i^2 = \frac{2}{\rho} (p_i - p_o)$$

Poiché la portata si può ritenere costante, risulta anche

$$\rho A_i u_i = \rho A_o u_o$$

da cui

$$\frac{u_i}{u_o} = \frac{A_o}{A_i} = a \ll 1$$

e

$$u_o^2 - u_i^2 = \left(1 - a^2\right) u_o^2$$

In conclusione

$$u_o = \sqrt{\frac{1}{1-a^2}}\sqrt{\frac{2}{\rho}\left(p_i - p_o\right)} = k(A_o)\sqrt{\frac{2}{\rho}\left(p_i - p_o\right)} = k(A_o)\sqrt{2g\left(z_i^* - z_0^*\right)}$$

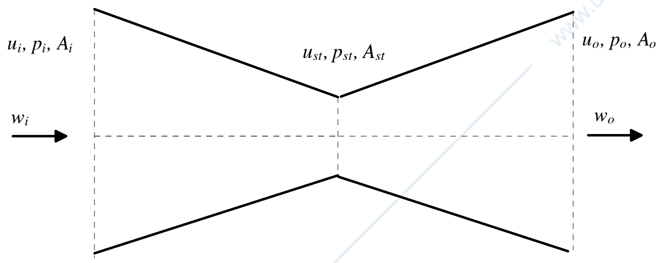
dove, se in particolare l'uscita è in atmosfera e si riferisce l'altezza all'asse dell'ugello, si può porre $z_0^* = 0$.
Si ha poi

$$w_o = \rho A_o u_o = \rho A_o k(A_o)\sqrt{2g\left(z_i^* - z_0^*\right)}$$

in cui il coefficiente k dipende dall'apertura A_o, che in alcuni casi può essere fatta variare per la regolazione della portata.

1.3 Valvola

La valvola, rappresentata nella Figura 1.3, è un componente in cui, oltre a una sezione convergente dove diminuisce la pressione e aumenta la velocità, vi è una sezione divergente in cui si dissipa l'energia cinetica.



Valvola.

Supponendo che il minimo della pressione e il massimo della velocità si abbiano in corrispondenza della strozzatuta, trascurando cioè il fenomeno della *vena contratta*, e ipotizzando che non siano presenti fenomeni di *cavitazione* o di *flashing*, si applichi, come per l'ugello, l'equazione di Bernoulli alla parte convergente, ottenendo

$$w_{st} = \rho A_{st} u_{st} = \rho A_{st} k'(A_{st}) \sqrt{\frac{2}{\rho}\left(p_i - p_{st}\right)}$$

Per descrivere la parte divergente, è prassi, come previsto nelle normative di dimensionamento delle valvole, introdurre un coefficiente di recupero, definito come

$$C_r = \sqrt{\frac{p_i - p_o}{p_i - p_{st}}}$$

che usualmente vale $0.8 \div 0.9$. Con semplici sostituzioni l'equazione della portata diventa quindi

$$w_o = \sqrt{2} A_{st} \frac{k'(A_{st})}{C_r} \sqrt{\rho \left(p_i - p_o\right)}$$

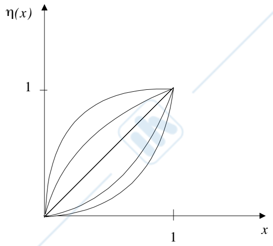
In questa espressione, A_{st} rappresenta l'area della strozzatura.
Per tener conto che l'apertura della valvola è variabile, così da consentire il suo impiego come elemento di regolazione, si può porre $A_{st} k'(A_{st}) = A_v \eta(x)$ dove A_v è l'apertura massima della valvola e $\eta(x)$ è una funzione della corsa x tale che

$$\eta(0) = 0$$
$$\eta(1) = 1$$

Il modello si può quindi scrivere nella forma

$$w_o = k A_v \eta(x) \sqrt{\rho \left(p_i - p_o\right)}$$

dove il coefficiente k è definito dalle relazioni precedenti.
La funzione $\eta(x)$, si veda per esempio la Figura ,1.3 dipende dalle caratteristiche costruttive (valvole lineari, rotative, a farfalla) e deve essere fornita dal costruttore.



Caratteristica della valvola.

Notando che $z_i \simeq z_o$, l'equazione della portata può anche essere scritta come

$$w_o = kA_v\eta(x)\rho\sqrt{g}\sqrt{\frac{p_i}{\rho g} - \frac{p_o}{\rho g} + z_i - z_o} = kA_v\eta(x)\rho\sqrt{g}\sqrt{z_i^* - z_o^*}$$

1.4 Condotta

Si consideri una condotta percorsa da un fluido incomprimibile, cioè a densità ρ costante, a sezione costante A costante e in cui il fluido si muove di moto turbolento.
L'equazione di conservazione della massa

$$\frac{\partial \rho A}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

diventa

$$\frac{dw}{dx} = 0 \quad \rightarrow \quad w(x,t) = w(0,t) = w(t)$$

che mostra come la portata w e la velocità u siano costanti in ogni sezione lungo la coordinata x.
Quindi l'equazione della quantità di moto

$$\begin{aligned}\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} &= -\frac{\partial \rho(x,t)A(x)u^2(x,t)}{\partial x} - A(x)\frac{\partial p(x,t)}{\partial x} + \\ &-\frac{1}{2}C_f\rho(x,t)u(x,t)\left|u(x,t)\right|\pi D(x) - \rho(x,t)A(x)g\frac{dz(x)}{dx}\end{aligned}$$

si può scrivere come

$$\frac{dw(t)}{dt} = -A\frac{\partial p(x,t)}{\partial x} - \frac{1}{2}C_f\rho u(t)\left|u(t)\right|\omega - \rho A g\frac{dz}{dx}$$

dove si è posto $\omega = \pi D$.
Se poi si definisce

$$\frac{1}{2}C_f\rho u(t)\left|u(t)\right|\omega = \frac{1}{2}C_f\rho^2A^2u^2(t)\frac{|u(t)|}{\rho A^2 u(t)}\omega = f(w(t))w^2(t)$$

dove

$$f(w) = \frac{1}{2}C_f\frac{|w(t)|}{\rho A^2 w(t)}\omega$$

l'equazione di conservazione diventa

$$\frac{dw(t)}{dt} = -\left(A\frac{\partial p(x,t)}{\partial x} + \rho A g \frac{dz}{dx}\right) - f(w(t))w^2(t)$$

o anche, ricordando la definizione di altezza di carico $z^* = \frac{p}{\rho g} + z$,

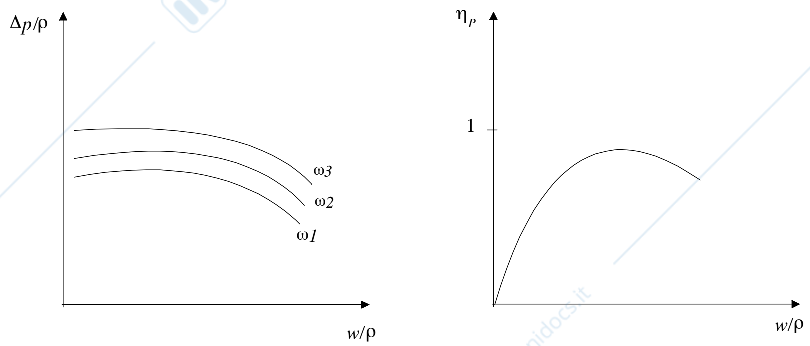
$$\frac{dw(t)}{dt} = -\rho A g \frac{\partial z^*(x,t)}{\partial x} - f(w(t))w^2(t)$$

Integrando questa relazione lungo la coordinata x da 0 a L si ottiene in definitiva

$$L\frac{dw(t)}{dt} = -\rho A g\left(z^*(L,t) - z^*(0,t)\right) - Lf(w(t))w^2(t)$$

1.5 Pompa

Le pompe sono macchine che consentono di aumentare la pressione del liquido che fluisce, trasferendogli l'energia cinetica dell'organo meccanico utilizzato. Possono essere centrifughe o assiali, queste ultime sono usate soprattutto per muovere grandi volumi di liquido con bassi salti di pressione.
Le pompe centrifughe sono usualmente descritte tramite mappe statiche, si veda la Figura 1.5, in cui ogni curva fa riferimento alla velocità di rotazione ω del motore elettrico. Una mappa lega quindi il salto di pressione per volume specifico $\frac{\Delta p}{\rho} = \frac{p_o - p_i}{\rho}$ a cavallo della pompa alla portata volumetrica $\frac{w}{\rho}$. Altre mappe, tipicamente associate alla velocità di rotazione nominale prevista per il loro funzionamento, sono relative al legame tra la portata volumetrica e la potenza richiesta alla pompa P_D, e tra la portata volumetrica e il rendimento η_P della pompa, a sua volta definito come il rapporto tra la potenza P_P, effettivamente disponibile a causa delle potenze perse per attriti, e la potenza richiesta P_D.



Caratteristiche della pompa.

La descrizione completa della pompa richiede di considerare anche il modello dinamico del motore elettrico, supposto nel seguito in corrente continua. L'insieme di motore e pompa si può descrivere a partire dall'equazione dell'energia

$$\frac{dE_t}{dt} = \Phi + \Psi + w_i\left(h_i + \frac{1}{2}u_i^2 + gz_i\right) - w_o\left(h_o + \frac{1}{2}u_o^2 + gz_o\right)$$

In questo caso, supponendo di considerare una portata costante w, si può supporre che il flusso di calore Φ sia nullo, che il livello, la portata e la velocità siano costanti, cioè $z_i = z_o$, $w_i = w_o = w$, $u_i = u_o$, e che che la potenza trasmessa sia

$$\Psi = \eta_m \eta_P P_S$$

dove $P_S = P_D$ è la potenza fornita e η_mè il rendimento meccanico.
Per il sistema composto dalla pompa e dal motore, l'energia totale è

$$E_t = \frac{1}{2}J\omega^2 + me$$

dove il primo termine rappresenta l'energia meccanica, mentre il secondo rappresenta l'energia termica. Inoltre J è il momento d'inerzia delle masse rotanti e ω è la velocità angolare del motore.
L'equazione dell'energia diventa quindi

$$J\omega\frac{d\omega}{dt} + \frac{dme}{dt} = \eta_m \eta_P P_S + w\left(h_i - h_o\right)$$

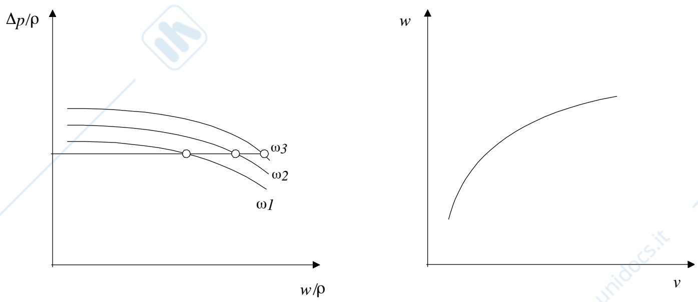
Nell'ipotesi che l'energia interna si mantenga circa costante, realistica dato che la sua dinamica è certamente nettamente più lenta di quella rotazionale del motore, e ricordando che $h = \frac{p}{\rho} + e$, l'equazione diventa

$$J\omega \frac{d\omega}{dt} = \eta_m \eta_P P_S - \frac{w}{\rho}(p_o - p_i)$$

in cui il termine $\frac{w}{\rho}(p_o - p_i)$ è la potenza spesa per il pompaggio.
Il termine $\eta_m \eta_P P_S$ è la potenza effettivamente fornita, e usualmente rappresenta la variabile manipolabile, seppure in modo indiretto, variando la tensione di comando del motore. Per esempio, in condizioni di regime, per un motore elettrico si può supporre che la velocità di rotazione ω sia proporzionale alla tensione di comando v, per cui

$$\omega = kv$$

e dalla mappa $\left(\frac{w}{\rho}, \frac{\Delta p}{\rho}\right)$ si può, per un fissato valore di Δp, determinare la relazione statica tra tensione di alimentazione e portata, si veda la Figura **??**.



Modello semplificato del sistema pompa- motore.

1.6 Turbina

La turbina è un componente che ha lo scopo di trasformare l'energia cinetica del fluido in energia meccanica. Le turbine sono di vari tipi, per i nostri scopi è sufficiente osservare che la potenza idraulica all'uscita dell'ugello, o della valvola, turbina è data da

$$P_t = w\frac{u^2}{2}$$

In realtà, la potenza meccanica effettivamente disponibile è inferiore ed è espressa come

$$P_m = \eta(\omega) P_t$$

dove η è un rendimento che usualmente dipende dal numero di giri.